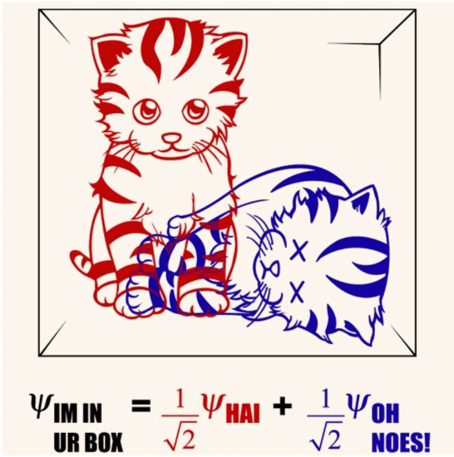
Задачи по квантовой механике

Сергей Владимирович Демидов, Дмитрий Геннадиевич Левков
(Тел. служебный: (499) 783-9291, E-mail: demidov@ms2.inr.ac.ru, levkov@ms2.inr.ac.ru)



Аннотация

В данном проекте предлагается решить набор задач по нерелятивистской квантовой механике. Каждая задача защищается с мелом у доски и ответом на дополнительные вопросы.

1. **Операторы рождения и уничтожения для двух–уровневой системы.**
Рассмотрим двух–уровневую систему с гамильтонианом
$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E & \epsilon \\ \epsilon & -E \end{pmatrix},$$
где $E, \epsilon \in \mathbb{R}$. Найти стационарные состояния $|0\rangle$, $|1\rangle$ и соответствующие им значения энергии. Построить операторы рождения и уничтожения $a^\dagger$, a, такие что
$$a|0\rangle = 0, \quad a^\dagger|0\rangle = |1\rangle,$$
Найти коммутатор $[a, a^\dagger]$ и антикоммутатор $\{a, a^\dagger\}$ этих операторов.

2. **Переходы в двух-уровневых системах.**
Рассмотрим двух-уровневую систему с гамильтонианом
$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix} E(t) & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix},$$
где $\epsilon \in \mathbb{R}$ не зависит от времени, а функция $E(t)$ описывает взаимодействие системы с нестационарным внешним полем. Пусть при $t \to -\infty$ система находилась в основном состоянии. Найти вероятности обнаружения системы в основном и возбужденном состояниях при $t \to +\infty$. Рассмотреть три случая.

(a) **Мгновенные возмущения**: $E(t) = E_0 \operatorname{sgn}(t)$.

(b) **Адиабатический случай**: $E = \tilde{E}(\lambda t)$, $\lambda \ll 1$. Здесь достаточно доказать, что искомые вероятности стремятся к 0 и 1 при $\lambda \to 0$. Отдельно рассмотреть случай, когда ϵ мало, а функция $\tilde{E}$ имеет ноль.
Подсказка. Разложить решение $|\psi(t)\rangle$ нестационарного уравнения Шредингера по базису собственных векторов мгновенного гамильтониана:
$|\psi(t)\rangle = c_0(t)|\phi_0(t)\rangle + c_1(t)|\phi_1(t)\rangle$, где $\hat{H}(t)|\phi_n(t)\rangle = E_n(t)|\phi_n(t)\rangle$.

(c) **Точно решаемый случай**: $E(t) = E_0 \operatorname{th}(\Omega t)$. Полученный ответ для вероятностей сравнить с результатами решения задач 2a и 2b в случаях бесконечно быстрого ($\Omega \to +\infty$) и адиабатически медленного ($\Omega \to 0$) изменений потенциала соответственно.
Подсказка. Для решения нестационарного уравнения Шредингера воспользоваться результатами задачи 4 параграфа 23 Ландау-Лифшица или задачи 39 тома 1 Флюгге.

3. **Два спина в магнитном поле.**
Рассмотрим систему из двух 1/2–спинов $\hat{\vec{s}}_1$, $\hat{\vec{s}}_2$ в постоянном магнитном поле $\vec{\mathcal{H}}$. Гамильтониан системы запишем в виде:

$$\hat{H} = -\alpha(\hat{\vec{s}}_1, \vec{\mathcal{H}}) - \alpha(\hat{\vec{s}}_2, \vec{\mathcal{H}}) + \beta(\hat{\vec{s}}_1, \hat{\vec{s}}_2) \ ,$$

где последний член отвечает взаимодействию между спинами. Найти стационарные состояния системы. Какое из состояний является основным? Отдельно рассмотреть случаи $\beta > 0$ и $\beta < 0$.

4. **Ларморовская прецессия s–спина.**
Компонентами спина назовем операторы $\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$, $\hat{s}_3$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\hat{s}_i,\ \hat{s}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{s}_k \ .$$

(a) Построить все конечномерные представления алгебры операторов $\hat{s}_i$. Показать, что каждое из этих представлений характеризуется определенным значением квадрата длины спина $\hat{s}^2 = \hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + \hat{s}_3^2$, обозначаемым $\hbar^2 s(s+1)$. Показать, что s — полуцелое.

(b) Включим взаимодействие s–спина с магнитным полем $\vec{\mathcal{H}} = (0, 0, \mathcal{H}_3)$:

$$\hat{H} = -\alpha\mathcal{H}_3\,\hat{s}_3 \ .$$

Пусть в начальный момент времени s–спин направлен вдоль оси 1 (что соответствует собственному состоянию оператора $\hat{s}_1$ с максимальным собственным значением). Найти зависимости средних значений компонент спина от времени.
Подсказка. Решать задачу в представлении Гайзенберга.

5. **Частица на окружности.**
Рассмотрим частицу на окружности:
$$L = \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2$$
где $I > 0$ — момент инерции частицы, $\phi \in [0; 2\pi]$ — угол поворота. Проквантовать систему: найти гамильтониан, канонические коммутационные соотношения, построить пространство состояний. Выполняется ли равенство
$$i \frac{d}{dt} \langle \Psi | \hat{\phi} | \Psi \rangle = \langle \Psi | [\hat{\phi}, \hat{H}] | \Psi \rangle$$
для произвольного состояния $|\Psi\rangle$?

6. **Падение.**
Рассмотрим «перевернутый» осциллятор с гамильтонианом
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{k\hat{x}^2}{2} \ .$$
Пусть система в начальный момент времени находится в состоянии
$$\Psi\left(x, t = 0\right) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2b^2}}{(\pi b^2)^{1/4}} \ .$$
Найти асимтотику дисперсии $\langle \Psi | \hat{x}^2 \left(t\right) | \Psi \rangle$ при больших t. Сравнить с квадратом асимтотики классического решения с начальными условиями $x\left(0\right) = r_0$, $x'\left(0\right) = 0$.

7. **Квазистационарные состояния.**
Найти квазистационарные состояния и их времена жизни для частицы массы m в одномерном потенциале
$$U\left(x\right) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \ , \\ \dfrac{\hbar^2 \kappa}{m} \delta\left(x - a\right), & x \geq 0 \ . \end{cases}$$
Считать, что $\kappa a \gg 1$.

8. **Расплывание.**
Частица находится в основном состоянии в потенциале гармонического осциллятора. Потенциал выключается на время T, затем снова включается. Найти вероятность того, что частица останется в основном состоянии.

9. **Когерентное состояние.**
Найти зависимость от времени операторов координаты и импульса гармонического осциллятора. С помощью этих зависимостей найти эволюцию дисперсии $\left(\Delta x\right)^2 = \langle \Psi | \hat{x}^2(t) | \Psi \rangle - \langle \Psi | \hat{x}(t) | \Psi \rangle^2$ для волновой функции
$$\Psi\left(x\right) = \frac{1}{(\pi b^2)^{1/4}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2} + i p_0 x\right) \ .$$

10. **Осциллятор с квадратичной добавкой.**
Добавим к гамильтониану гармонического осциллятора
$$\hat{H}_0 = \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + 1/2)$$
квадратичный член
$$\hat{H}_1 = i\gamma(\hat{a}^+)^2 - i\gamma\hat{a}^2 \ ,$$
где γ — действительный параметр.

    (a) Показать, что $\hat{H}_1$ эрмитов.
    (b) При каких значениях γ полный гамильтониан $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ положительно определен?
    (c) Найти спектр $\hat{H}$, построить пространство состояний системы.
    (d) Вычислить матричные элементы $\langle n|H_0|n'\rangle$, где $|n\rangle$, $|n'\rangle$ — собственные состояния полного гамильтониана $\hat{H}$.

11. **Резонанс.**
Одномерный квантовый осциллятор частоты ω первоначально находится в основном состоянии. В момент времени $t = 0$ на него начинает действовать внешняя сила $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$. Через время T сила мгновенно выключается. Найти среднюю энергию E_f конечного состояния осциллятора. Построить график зависимости E_f от частоты внешней силы ω_0. Что происходит в пределе $\omega \to \omega_0$?
Указание. Решать задачу в представлении Гайзенберга.

12. **Потенциал Морса.**
Найти дискретную часть спектра энергий одномерной частицы в потенциале Морса:
$$U(x) = A\,\mathrm{e}^{-2\alpha x} - B\,\mathrm{e}^{-\alpha x} \ .$$
Здесь $A > 0$ и $B > \hbar\alpha\sqrt{A/2m}$.

13. **Две частицы на окружности.**
Две частицы массы m и заряда e каждая могут свободно двигаться по окружности радиуса R. Найти низколежащие уровни системы при $R \gg \hbar^2/me^2$.

14. **Тряска.**
Частица находится в связанном состоянии в одномерном потенциале
$$U(x) = -\frac{\hbar^2\kappa}{m}\delta(x-a).$$
Найти вероятность перехода в единицу времени в состояния непрерывного спектра, если точка a совершает колебания по закону
$$a\,(t) = b\cos\omega t.$$
Считать $b \ll 1/\kappa$, $\hbar\omega \gg \hbar^2\kappa^2/2m$.

15. **Волновод.**
Рассмотрим двумерную частицу в потенциале
$$U\left(x,y\right)=\omega^{2}y^{2}/2+\epsilon\left(x\right)y^{2}/2\ ,$$
где $\epsilon\left(x\right)$ — ограниченная функция с конечным носителем. Пусть при $x\to-\infty$ волновая функция имеет вид $\Psi\left(x,y\right)=\psi_{0}\left(y\right)\mathrm{e}^{ikx}$, где $\psi_{0}\left(y\right)$ — волновая функция основного состояния осциллятора. Считая $\epsilon\left(x\right)$ малой величиной, найти вероятность перехода осциллятора в первое и второе возбужденные состояния при $x\to+\infty$.

16. **Наблюдаемая Белла для состояния GHZ**
Построить наблюдаемую Белла для состояния GHZ трех фотонов:
$$|GHZ\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|HHH\rangle+|VVV\rangle\right)\ , \tag{1}$$
где $|H\rangle$ и $|V\rangle$ отвечают состояниям с горизонтальной и вертикальной поляризациями.
Определение. Наблюдаемой Белла называется физическая величина B, которая обладает следующими свойствами. (i) Статистическое среднее от B удовлетворяет неравенству Белла $\langle B\rangle\leq 1$ для любой теории со скрытыми переменными. (ii) Неравенство Белла нарушается на квантовом уровне: $\langle GHZ|\hat{B}|GHZ\rangle\geq 1$.

17. **Передача информации с помощью состояния GHZ.**
Какое максимальное количество информации можно передать с помощью трехфотонного состояния (1)? Какую информацию можно узнать, перехватив такую передачу? Можно ли подобрать состояние трех фотонов так, чтобы передача максимального количества информации была полностью защищена от перехвата?

Список литературы

[1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц «Курс теоретической физики, т. 3. «Квантовая механика», М: Наука, 1974.

[2] П.В. Елютин, В.Д. Кривченков «Квантовая механика с задачами», М: Физматлит, 2000.

[3] З. Флюгге «Задачи по квантовой механике», М: Мир, 1974.

[4] М.Б. Менский «Квантовые измерения и декогеренция: модели и феноменология», М: Физматлит, 2001.

[5] J.S. Bell «On the problem of hidden variables in quantum, mechanics», Rev. Mod. Phys. **38**, 447 (1966).

[6] D.M. Greenberger, M.A. Home, A. Zeilinger «Going beyond Bell's theorem», arXiv:0712.0921.