МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

Кафедра физики частиц и космологии

Заведующий кафедрой: академик В.А.Рубаков

Связанные состояния в теориях с нарушенной Лоренц-инвариантностью

Курсовая работа
студента 2 курса 219 группы
Еремеева Дмитрия

Научные руководители
к.ф.-м.н. Г.И. Рубцов
к.ф.-м.н. С.М. Сибиряков

Москва 2013

Оглавление

1. Введение

1.1. Лоренц-инвариантность

В релятивистской теории пространство и время объединяются в четырехмерное пространство Минковского, снабженное метрикой $\eta_{\mu\nu}$. Преобразования Лоренца есть обратимые линейные преобразования координат, сохраняющие интервал между событиями:

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \tag{1}$$

Условие, которому должна удовлетворять матрица L, чтобы быть лоренцевским преобразованием:

$$L^T \eta L = \eta \tag{2}$$

Здесь η-матрица, компоненты которой равны $\eta_{\mu\nu}$.

Инвариантность законов природы относительно преобразований Лоренца проверена с высокой точностью в различных экспериментах и играет важную роль в современной физике. Например, из условия Лоренц-инвариантности теории струн вытекает фиксированная размерность пространства-времени. Теория струн не может быть хорошей лоренц-инвариантной квантовой теорией для любой произвольной размерности. Так, в теории суперструн это требование фиксирует размерность пространства-времени значением $D = 10$ [2].

1.2. Нарушение Лоренц-инвариантности

Однако сохраняется возможность того, что Лоренц-инвариантность не является точной: мы можем допустить нарушение симметрии относительно преобразований Лоренца без противоречий с современными данными, а именно, на очень высоких энергиях, недоступных современным ускорителям.

1.3. Постановка задачи

В курсовой работе исследована упрощенная модель свободной частицы в теории с нарушенной Лоренц-инвариантностью, рассмотрена модель связанного состояния в такой теории, которое образуется при взаимодействии двух частиц с притягивающим потенциалом.

2. Свободная частица

Одним из эффектов нарушения Лоренц-инвариантности является модификация связи между энергией и импульсом элементарных частиц. Напомним, что в Лоренц-инвариантном случае существует следующая связь: $E^2 = m^2 + p^2$. Рассмотрим видоизмененное соотношение:

$$E^2 = m^2 + p^2 + \frac{p^4}{M^2},\ m \ll M \tag{3}$$

2.1. Лагранжиан

2.1.1. Одномерный случай

Запишем Гамильтониан:

$$H = E = \sqrt{m^2 + p^2 + \frac{p^4}{M^2}} \tag{4}$$

Воспользуемся уравнением Гамильтона:

$$v = \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{5}$$

Дифференцируя, получаем:

$$v = \frac{p + \frac{2p^3}{M^2}}{\sqrt{m^2 + \frac{p^4}{M^2} + p^2}} \tag{6}$$

Сделаем обратное преобразование Лежандра:

$$L(q, \dot{q}, t) = p\dot{x} - H(q, p, t) = pv - E = \frac{\frac{p^4}{M^2} - m^2}{\sqrt{m^2 + \frac{p^4}{M^2} + p^2}} \tag{7}$$

В общем функция Лагранжа зависит от обобщенных координат и скоростей. Импульс, как функция от скорости, содержится неявно в уравнении Гамильтона. Попробуем его решить:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow v\sqrt{m^2 + p^2 + \frac{p^4}{M^2}} = p + \frac{2p^3}{M^2}$$

Преобразовывая, получаем кубическое (относительно $t = p^2$) уравнение:

$$\frac{4}{M^4}t^3 + \frac{(4 - v^2)}{M^2}t^2 + (1 - v^2)t - m^2v^2 = 0 \tag{8}$$

Уравнение (8) можно решать точно, однако мы будем искать решение в виде

$$p^2 = \frac{m^2v^2}{1 - v^2} + \frac{\delta}{M^2} \tag{9}$$

Заметим, что первый член в (9) является точным решением в случае $M^2 \to \infty$.

Подставляя это выражение в уравнение и пренебрегая степенями M, больше 2, получаем:

$$\frac{m^2v^2}{1 - v^2} + \frac{4m^4v^4}{M^2(1 - v^2)^2} - \frac{m^2v^4}{1 - v^2} - \frac{m^4v^6}{M^2(1 - v^2)^2} - m^2v^2 + \frac{\delta}{M^2} - \frac{\delta v^2}{M^2} = 0$$

Выражаем δ:

$$\delta = \frac{m^4v^4(v^2 - 4)}{(1 - v^2)^3} \tag{10}$$

Тогда:

$$p^2 = \frac{m^2v^2}{1 - v^2} + \frac{m^4v^4\left(v^2 - 4\right)}{M^2\left(1 - v^2\right)^3} \tag{11}$$

Остается подставить p^2 в (7) и получить громоздкое выражение для L, которое здесь не будет приведено. Введем для удобства параметр k, определяемый следующим образом:

$$k = 1/M,\ k \to 0$$

Подставляя $M = 1/k$ в выражение для Лагранжиана и раскладывая в ряд по k, получаем:

$$\boxed{L = -m\sqrt{1-v^2} - \frac{m^3v^4}{2M^2(1-v^2)\sqrt{1-v^2}} + o(k^3)} \tag{12}$$

Заметим, что первое слагаемое является Лагранжианом свободной релятивистской частицы.

Убедимся, что полученный Лагранжиан с нужной точностью соответствует заданному дисперсионному соотношению, т.е. что выполняется с нужной точностью равенство

$$E^2 - \frac{p^4}{M^2} - p^2 - m^2 = \left(v\frac{\partial L}{\partial v} - L\right)^2 - \frac{1}{M^2}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^4 - \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 - m^2 = 0 \tag{13}$$

Подставляя выражение для Лагранжиана и его производной в левую часть (13), получаем:

$$E^2 - \frac{p^4}{M^2} - p^2 - m^2 = \frac{m^6(16v^6 - 7v^8)}{4M^4(v^2-1)^4} + o(k^5) \tag{14}$$

2.1.2. Трехмерный случай

В этом случае логика построения Лагранжиана не меняется.

Уравнения Гамильтона:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \tag{15}$$

$$v_j = \frac{p_j + \frac{2p_jp^2}{M^2}}{\sqrt{m^2 + p^2 + \frac{p^4}{M^2}}} \tag{16}$$

Обратное преобразование Лежандра:

$$L = p_i\dot{q}_i - H = \frac{\frac{p^4}{M^2} - m^2}{\sqrt{m^2 + p^2 + \frac{p^4}{M^2}}} \tag{17}$$

Из уравнений Гамильтона получаем уравнение, аналогичное соответствующему в одномерном случае.

$$v^2\left(m^2 + p^2 + \frac{p^4}{M^2}\right) = p^2\left(1 + \frac{2p^2}{M^2}\right)^2 \tag{18}$$

Таким образом

$$\boxed{L = -m\sqrt{1-|\mathbf{v}|^2} - \frac{m^3|\mathbf{v}|^4}{2M^2(1-|\mathbf{v}|^2)^{3/2}}} \tag{19}$$

2.2. Преобразования Лоренца

Действие:

$$S = \int L dt = \int \left(-m\sqrt{1-|\mathbf{v}|^2} - \frac{m^3|\mathbf{v}|^4}{2M^2(1-|\mathbf{v}|^2)^{3/2}}\right) dt$$

Разбиваем интеграл на Лоренц-инвариантное действие и добавку:

$$S=-m\int\sqrt{1-|\mathbf{v}|^2}dt-\int\frac{m^3|\mathbf{v}|^4}{2M^2(1-|\mathbf{v}|^2)^{3/2}}dt \tag{20}$$

Посмотрим как преобразуется добавка при преобразованиях Лоренца ([5]):

$$\mathbf{v}=\frac{1}{1+(\mathbf{u},\mathbf{v}')}\left[\mathbf{u}+\frac{\mathbf{v}'}{\gamma}+\frac{\gamma}{1+\gamma}(\mathbf{u},\mathbf{v}')\mathbf{u}\right] \tag{21}$$

$$dt=\gamma(1+(\mathbf{u},\mathbf{v}'))dt' \tag{22}$$

Пусть $\alpha=(\mathbf{u},\mathbf{v}')$. Тогда:

$$\mathbf{v}=\frac{1}{1+\alpha}\left[\mathbf{u}+\frac{\mathbf{v}'}{\gamma}+\frac{\gamma\alpha}{1+\gamma}\mathbf{u}\right]$$

$$dt=\gamma(1+\alpha)dt'$$

Квадрат скорости:

$$|\mathbf{v}|^2=\frac{1}{(1+\alpha)^2}\left[\mathbf{u}+\frac{\mathbf{v}'}{\gamma}+\frac{\gamma\alpha}{1+\gamma}\mathbf{u}\right]^2$$

$$|\mathbf{v}|^2=\frac{1}{(1+\alpha)^2}\left[|\mathbf{u}|^2+\frac{2\alpha\gamma|\mathbf{u}|^2}{1+\gamma}+\frac{\alpha^2\gamma^2|\mathbf{u}|^2}{(1+\gamma)^2}+\frac{|\mathbf{v}'|^2}{\gamma^2}+\frac{2\alpha^2}{1+\gamma}+\frac{2\alpha}{\gamma}\right] \tag{23}$$

Введем два вектора: $\mathbf{n}$ – задает выделенное направление, $\mathbf{m}$ – задает направление движения:

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \tag{24}$$

$$\mathbf{m}=\frac{\mathbf{v}'}{|\mathbf{v}'|} \tag{25}$$

$\alpha=(\mathbf{u},\mathbf{v}')=|\mathbf{u}||\mathbf{v}'|(\mathbf{n},\mathbf{m})=|\mathbf{u}||\mathbf{v}'|\beta$, где введено обозначение $\beta=(\mathbf{n},\mathbf{m})$.

После записи преобразований Лоренца раскладываем добавочный Лагранжиан ($v'\to 0$):

$$L(v')=a+bv'+cv'^2+dv'^3+ev'^4+fv'^5+...$$

$$L(0)=\frac{m^3u^4}{2M^2(u^2-1)^2}$$

$$a=L(0)$$

$$L'(0)=\frac{2m^3u^3\left(1-u^2+\sqrt{1-u^2}\right)\beta}{M^2\left(1-u^2\right)^{5/2}\left(\sqrt{1-u^2}+1\right)}$$

$$b=L'(0)$$

$$L''(0)=\frac{m^3u^2\left(\left(4\beta^2-1\right)u^2+8\beta^2+4\right)}{2M^2\left(u^2-1\right)^2}$$

$$c = \frac{1}{2} L''(0)$$

$$L'''(0) = \frac{6m^3 u \left(\left(2\beta^2 + 1 \right) u^2 + 2 \right) \beta}{M^2 \left(u^2 - 1 \right)^2}$$

$$d = \frac{1}{6} L'''(0)$$

$$L^{(4)}(0) = \frac{3m^3 \left(\left(8\beta^4 + 8\beta^2 - 1 \right) u^4 + 8 \left(8\beta^2 + 1 \right) u^2 + 8 \right)}{2M^2 (u^2 - 1)^2}$$

$$e = \frac{1}{24} L^4(0)$$

Остановимся на членах второго порядка.

Учитывая, что $v' \to 0$, получаем Лагранжиан :

$$L'(v') = \frac{mv'^2}{2} - \frac{2m^3 u^3 (1 - u^2 + \sqrt{1 - u^2}) \beta}{M^2 (1 - u^2)^{5/2} (\sqrt{1 - u^2} + 1)} v - \frac{m^3 u^2 ((4\beta^2 - 1) u^2 + 8\beta^2 + 4)}{4M^2 (u^2 - 1)^2} v^2 \tag{26}$$

Или же, вспоминая определение β, запишем первое слагаемое в другом виде:

$$L'(v') = \frac{mv'^2}{2} - \frac{2m^3 u^3 (1 - u^2 + \sqrt{1 - u^2})}{M^2 (1 - u^2)^{5/2} (\sqrt{1 - u^2} + 1)} (\mathbf{n}, \mathbf{v}') - \frac{m^3 u^2 ((4\beta^2 - 1) u^2 + 8\beta^2 + 4)}{4M^2 (u^2 - 1)^2} v'^2 \tag{27}$$

Аналогично поступаем с последним слагаемым. Получим:

$$\boxed{L'(v') = \left[\frac{m}{2} - m^3 t_1 \right] v'^2 - m^3 t_2 (\mathbf{n}, \mathbf{v}') - m^3 [t_3 + t_4] (\mathbf{u}, \mathbf{v}')^2} \tag{28}$$

Здесь t_j-коэффициенты, зависящие от u и M:

$$t_1 = \frac{u^2 (4 - u^2)}{4M^2 (u^2 - 1)^2}$$

$$t_2 = \frac{2u^3 (1 - u^2 + \sqrt{1 - u^2})}{M^2 (1 - u^2)^{5/2} (\sqrt{1 - u^2} + 1)}$$

$$t_3 = \frac{2u^2}{M^2 (u^2 - 1)^2}$$

$$t_4 = \frac{u^4}{M^2 (u^2 - 1)^2}$$

В данной системе отсчета будет выделенное направление вдоль вектора **n**.

В силу нарушения Лоренц-инвариантности не все системы отсчета эквивалентны.

3. Система взаимодействующих частиц

3.1. С.Ц.М.

Рассмотрим систему, состоящую из двух частиц при наличии притягивающего потенциала $U(r)$:

$$L = L_1 + L_2 - U(r)$$

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

Лагранжиан системы взаимодействующих частиц (считаем M одинаковой для обеих частиц):

$$L = \left[\frac{m_1}{2} - m_1^3 t_1\right] v_1^2 - m_1^3 t_2(\mathbf{n}, \mathbf{v_1}) - m_1^3[t_3 + t_4](\mathbf{u}, \mathbf{v_1})^2 + \left[\frac{m_2}{2} - m_2^3 t_1\right] v_2^2 - m_2^3 t_2(\mathbf{n}, \mathbf{v_2}) - m_2^3[t_3 + t_4](\mathbf{u}, \mathbf{v_2})^2 - U$$

Перейдем в систему центра масс:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2 \mathbf{r}}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1 \mathbf{r}}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{V} - \frac{m_2 \mathbf{v}}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{V} + \frac{m_1 \mathbf{v}}{m_1 + m_2}$$

Учитывая, что $\mathbf{n}$, $\mathbf{V}$ – постоянные векторы, а добавление константы к Лагранжиану не меняет уравнения движения, получаем вид Лагранжиана в системе центра масс:

$$\boxed{L = \frac{\mu v^2}{2} + k_1 v^2 + k_2(\mathbf{n}, \mathbf{v}) + k_3(\mathbf{n}, \mathbf{v})^2 - U(r)} \tag{29}$$

Здесь:

$$k_1 = -\mu m_1 m_2 t_1$$

$$k_2 = m_1 m_2 (m_1 - m_2) \left[t_2 + 2(\mathbf{n}, \mathbf{V})\right]$$

$$k_3 = m_1 m_2 \mu [t_3 + t_4]$$

Опустили следующие слагаемые:
$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2$, $-(m_1^3 + m_2^3) t_1 V^2$, $-(m_1^3 + m_2^3) t_2(\mathbf{n}, \mathbf{V})$, $-(m_1^3 + m_2^3) \left[t_3 + t_4\right] (\mathbf{n}, \mathbf{V})^2$.

3.2. Уравнения движения

Уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \tag{30}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = k_2 \,\mathrm{grad}(\mathbf{n}, \mathbf{v}) + k_3 \,\mathrm{grad}(\mathbf{n}, \mathbf{v})^2 - \mathrm{grad}\, U \tag{31}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mu \mathbf{v} + 2k_1 \mathbf{v} + k_2 \mathbf{n} + 2k_3 (\mathbf{n}, \mathbf{v})\mathbf{n} \tag{32}$$

(!) **n**-постоянный (при заданном **u**) вектор, определяющий выделенное направление. Дифференцирование по **r** в (31) производится при постоянном **v**. Тогда:

$$\boxed{\mu \dot{\mathbf{v}} = -2k_1 \dot{\mathbf{v}} - 2k_3 (\mathbf{n}, \dot{\mathbf{v}})\mathbf{n} - \mathrm{grad}\, U} \tag{33}$$

$$\begin{cases} \mu \ddot{x} = -2k_1 \ddot{x} - 2k_3 \ddot{x} - \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \mu \ddot{y} = -2k_1 \ddot{y} - \dfrac{\partial U}{\partial y}. \end{cases}$$

Член с k_1 можно интерпретировать как поправку к массе.

Т.к. $k_1 = -\mu m_1 m_2 t_1 < 0$, надо следить, чтобы поправка не стала больше самой массы, что дает ограничение на γ. Вспоминая, что $t_1 = \frac{u^2(4-u^2)}{4M^2(u^2-1)^2}$, в пределе $\gamma \to \infty$ получаем: $t_1 = \frac{3\gamma^4}{4M^2}$. Отсюда:

$$\gamma^4 < \frac{2M^2}{3m_1 m_2}$$

Этот результат надо понимать в следующем смысле: если неравенство не будет выполнено, то вышеприведенные разложения некорректны. Потребуются высшие члены этих разложений

Член с k_3 приводит к неоднородному движению по почти эллиптической орбите.

Литература

[1] Diego Blas, Mikhail M.Ivanov, Sergey Sibiryakov. "Testing Lorentz invariance of dark matter". arXiv: 1209.0464

[2] Б. Цвибах. "Начальный курс теории струн", 2011, глава 12

[3] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. "Механика", 1988

[4] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. "Теория поля", 1988

[5] Abraham Albert Ungar. "An introduction to hyperbolic barycentric coordinates and their applications" arXiv:1304.0205