Связанные состояния в теориях с нарушением Лоренц-инвариантности

Еремеев Д.В.

МГУ им. М.В.Ломоносова

Научные руководители:
к.ф.-м.н. Г.И. Рубцов
к.ф.-м.н. С.М. Сибиряков

Москва, 2013

Лоренц-инвариантность

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

Условие на матрицу L: $L^T \eta L = \eta$

$\eta_{\mu\nu}$ – метрика.

Нарушение Лоренц-инвариантности

- Нарушение Лоренц-инвариантности при высоких энергиях.
- Модификация связи между энергией и импульсом элементарных частиц.

Гамильтониан, уравнения Гамильтона

Дисперсионное соотношение:

$$E^2 = m^2 + p^2 + \frac{p^4}{M^2}$$

Гамильтониан:

$$H = E = \sqrt{m^2 + p^2 + \frac{p^4}{M^2}}$$

Уравнение Гамильтона:

$$v = \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p + \frac{2p^3}{M^2}}{\sqrt{m^2 + p^2 + \frac{p^4}{M^2}}}$$

Преобразование Лежандра

Обратное преобразование Лежандра:

$$L = p\dot{x} - H = pv - E = \frac{\frac{p^4}{M^2} - m^2}{\sqrt{m^2 + p^2 + \frac{p^4}{M^2}}}$$

Импульс, как функция от v, содержится неявно в уравнении Гамильтона. Попробуем его решить:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow v\sqrt{m^2 + p^2 + \frac{p^4}{M^2}} = p + \frac{2p^3}{M^2}$$

Замена $p^2 = t$:

$$\frac{4}{M^4}t^3 + \frac{(4 - v^2)}{M^2}t^2 + (1 - v^2)t - m^2v^2 = 0$$

Лагранжиан

Ищем решение в виде

$$p^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - v^2} + \frac{\delta}{M^2}$$

Получаем:

$$\delta = \frac{m^4 v^4 (v^2 - 4)}{(1 - v^2)^3}$$

Раскладываем выражение для Лагранжиана в ряд по $k = 1/M$:

$$L = -m\sqrt{1 - v^2} - \frac{m^3 v^4}{2M^2(1 - v^2)\sqrt{1 - v^2}} + o(k^3)$$

Соответствие Лагранжиана заданному дисперсионному соотношению

$$p = \frac{\partial L}{\partial v},\ E = v\frac{\partial L}{\partial v} - L;$$

.

Выполняется ли дисперсионное соотношение?

$$E^2 - \frac{p^4}{M^2} - p^2 - m^2 = 0\ ?$$

$$\left(v\frac{\partial L}{\partial v} - L\right)^2 - \frac{1}{M^2}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^4 - \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^2 - m^2 = \frac{m^6(16v^6 - 7v^8)}{4M^4(v^2-1)^4} + o(k^5)$$

Трехмерный случай

Уравнения Гамильтона:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$v_j = \frac{p_j + \frac{2p_j p^2}{M^2}}{\sqrt{m^2 + p^2 + \frac{p^4}{M^2}}}$$

$$L = p_i \dot{q}_i - H = \frac{\frac{p^4}{M^2} - m^2}{\sqrt{m^2 + p^2 + \frac{p^4}{M^2}}}$$

Из уравнений Гамильтона получаем уравнение:

$$v^2 \left(m^2 + p^2 + \frac{p^4}{M^2} \right) = p^2 \left(1 + \frac{2p^2}{M^2} \right)^2$$

Действие

$$S = \int L dt = \int \left(-m\sqrt{1-|\mathbf{v}|^2} - \frac{m^3|\mathbf{v}|^4}{2M^2(1-|\mathbf{v}|^2)^{3/2}} \right) dt$$

Разбиваем интеграл:

$$S = -m \int \sqrt{1-|\mathbf{v}|^2} dt - \int \frac{m^3|\mathbf{v}|^4}{2M^2(1-|\mathbf{v}|^2)^{3/2}} dt$$

Преобразования Лоренца

$$\mathbf{v} = \frac{1}{1 + (\mathbf{u}, \mathbf{v}')} \left[\mathbf{u} + \frac{\mathbf{v}'}{\gamma} + \frac{\gamma}{1+\gamma} (\mathbf{u}, \mathbf{v}') \mathbf{u} \right]$$

$$dt = \gamma (1 + (\mathbf{u}, \mathbf{v}')) dt'$$

Пусть $\alpha = (\mathbf{u}, \mathbf{v}')$.

$$|\mathbf{v}|^2 = \frac{1}{(1+\alpha)^2} \left[|\mathbf{u}|^2 + \frac{2\alpha\gamma |\mathbf{u}|^2}{1+\gamma} + \frac{\alpha^2 \gamma^2 |\mathbf{u}|^2}{(1+\gamma)^2} + \frac{|\mathbf{v}'|^2}{\gamma^2} + \frac{2\alpha^2}{1+\gamma} + \frac{2\alpha}{\gamma} \right]$$

Направления

Выделенное направление: $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$

.

Направление движения: $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{v}'}{|\mathbf{v}'|}$

.

$$\alpha = (\mathbf{u}, \mathbf{v}') = |\mathbf{u}||\mathbf{v}'|(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = |\mathbf{u}||\mathbf{v}'|\beta$$

Лагранжиан после преобразований Лоренца

$$L'(v') = \left[\frac{m}{2} - m^3 t_1\right] |\mathbf{v}'|^2 - m^3 t_2 (\mathbf{n}, \mathbf{v}') - m^3 [t_3 + t_4](\mathbf{u}, \mathbf{v}')^2$$

$$t_1 = \frac{u^2(4 - u^2)}{4M^2(u^2 - 1)^2}$$

$$t_2 = \frac{2u^3(1 - u^2 + \sqrt{1 - u^2})}{M^2(1 - u^2)^{5/2}(\sqrt{1 - u^2} + 1)}$$

$$t_3 = \frac{2u^2}{M^2(u^2 - 1)^2}$$

$$t_4 = \frac{u^4}{M^2(u^2 - 1)^2}$$

Система взаимодействующих частиц

Рассмотрим систему, состоящую из двух частиц с притягивающим потенциалом U(r):

$$L = L_1 + L_2 - U(r)$$

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

СЦМ

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2 \mathbf{r}}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1 \mathbf{r}}{m_1 + m_2}$$

Лагранжиан в СЦМ:

$$L = \frac{\mu v^2}{2} + k_1 v^2 + k_2(\mathbf{n}, \mathbf{v}) + k_3(\mathbf{n}, \mathbf{v})^2 - U(r)$$

Уравнения движения

Уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = k_2 \operatorname{grad}(\mathbf{n}, \mathbf{v}) + k_3 \operatorname{grad}(\mathbf{n}, \mathbf{v})^2 - \operatorname{grad} U$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mu \mathbf{v} + 2k_1 \mathbf{v} + k_2 \mathbf{n} + 2k_3 (\mathbf{n}, \mathbf{v}) \mathbf{n}$$

Уравнения движения

(!) **n**-постоянный (при заданном **u**) вектор, определяющий выделенное направление.

$$\mu\dot{\mathbf{v}} = -2k_1\dot{\mathbf{v}} - 2k_3(\mathbf{n},\dot{\mathbf{v}})\mathbf{n} - \mathrm{grad}\, U$$

$$\begin{cases} \mu\ddot{x} = -2k_1\ddot{x} - 2k_3\ddot{x} - \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \mu\ddot{y} = -2k_1\ddot{y} - \dfrac{\partial U}{\partial y}. \end{cases}$$

Ограничение на γ:

$$\gamma^4 < \frac{2M^2}{3m_1m_2}$$