МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА
Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

КУРСОВАЯ РАБОТА

«Описание осцилляций нейтрино с помощью волновых пакетов»

студента 2 курса, 217 группы
Гармаева Бориса Дмитриевича

Научный руководитель:
кандидат физ. - мат. наук
Демидов Сергей Владимирович

МОСКВА 2013

Содержание

1 Введение

В настоящее время известно три типа нейтрино. Кроме того, известно, что при эволюции со временем одни типы нейтрино могут переходить в другие. Это экспериментально зарегестрированное явление(эксперименты описаны например в [1]) называется нейтринными осцилляциями.

Продолжительные эксперименты с солнечными и атмосферными нейтрино привели к открытию нейтринных осцилляций и принципиально изменили понимание физики нейтрино, поскольку это явление возможно только при отличной от нуля массе нейтрино. В Стандартной модели нейтрино являются безмассовыми частицами, которые в процессе распространения со скоростью света не могут изменять свой аромат и, следовательно, не смешиваются. На самом деле, как это следует из осцилляций, нейтрино имеют малую ненулевую массу, смешиваются, и ароматы нейтрино не сохраняются. Этот фундаментальный результат явился прямым экспериментальным доказательством существования новой физики вне рамок Стандартной модели и одновременно положил начало изучению этой физики.

В упрощённом выводе вероятности нейтринных осцилляций(см.например[2]) предполагается, что движущиеся нейтрино имеют определённую энергию (или импульс). Другими словами, движение нейтрино описывается плоской монохроматической волной. Однако, из квантовой механики известно, что такое описание является идеализацией для описания квантовой частицы, и любая реальная волна является суперпозицией монохроматических волн. В данной задаче предлагается изучить нейтринные осцилляции для реалистичного случая волновых пакетов конечного размера.

2 Постановка задачи

Дан начальный волновой пакет:

$$\psi_i(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} f_i(\vec{p} - \vec{p}_i) e^{i\vec{p}\vec{x}}, \tag{1}$$

где f_i – Гауссов пик вида:

$$f_i\left(\vec{p} - \vec{p}_i\right) = N \exp\left\{ - \frac{(\vec{p} - \vec{p}_i)^2}{2\sigma_s^2} \right\}, \tag{2}$$

σ_s – начальная ширина волнового пакета.

Типы нейтрино определяются формулой:

$$|\nu_\alpha(\vec{x})\rangle = \sum_i U^*_{\alpha i} \psi_i(\vec{x}) |\nu_i\rangle \quad \text{, где}$$

$\alpha = e, \mu, \tau$, а $i = 1, 2, 3$ – массовые типы.

Нам необходимо расчитать вероятность регистрации детектором нейтрино типа β , когда детектор регестрирует частицы с импульсом $\vec{p_i}'$ и шириной диапазона σ_D, и находится на расстоянии $\vec{L}$ от источника. Нейтрино на детекторе: $|\nu_\beta(\vec{x})\rangle = \sum_i U^*_{\beta i} \varphi_i(\vec{x} - \vec{L}) |\nu_i\rangle$. Где $\varphi_i(\vec{x})$ – волновая функция для нейтрино, регистрирующихся детектором:

$$\varphi_i(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} g_i(\vec{p} - \vec{p_i}') e^{i\vec{p}\vec{x}}, \text{где} \tag{3}$$

$$g_i(\vec{p}-\vec{p}_i{}') = K \exp\Big\{-\frac{(\vec{p}-\vec{p}_i{}')^2}{2\sigma_D^2}\Big\}, \tag{4}$$

K и N — нормировочные коэффициенты.

3 Решение задачи

Найдём явно волновые функции в пространстве координат:

$$\psi_i(\vec{x}) = \frac{N}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{p}\vec{x} - \frac{(\vec{p}-\vec{p}_i)^2}{2\sigma_s^2}} d^3p \tag{5}$$

После интегрирования получаем:

$$\psi_i(\vec{x}) = N\sigma_s^3 \exp\Big(-\frac{\sigma_s^2\vec{x}^2}{2} + i\vec{p}_i\vec{x}\Big)$$

Аналогично получаем ВФ $\varphi_i(\vec{x}-\vec{L})$:

$$\varphi_i(\vec{x}-\vec{L}) = K\sigma_D^3 \exp\Big(-\frac{\sigma_D^2(\vec{x}-\vec{L})^2}{2} + i\vec{p}_i{}'(\vec{x}-\vec{L})\Big)$$

Из условия нормировки находим коэффициенты $K = \pi^{-3/4}\sigma_D^{-3/2}$ и $N = \pi^{-3/4}\sigma_s^{-3/2}$, и окончательно получаем:

$$\psi_i(\vec{x}) = \frac{\sigma_s^{3/2}}{\pi^{3/4}} \exp\Big(-\frac{\sigma_s^2\vec{x}^2}{2} + i\vec{p}_i\vec{x}\Big) \tag{6}$$

$$\varphi_i(\vec{x}-\vec{L}) = \frac{\sigma_D^{3/2}}{\pi^{3/4}} \exp\Big(-\frac{\sigma_D^2(\vec{x}-\vec{L})^2}{2} + i\vec{p}_i{}'(\vec{x}-\vec{L})\Big) \tag{7}$$

Амплитуда вероятности зарегестрировать нейтрино типа β, если в начале у нас было нейтрино типа α равна:

$$A(\alpha \to \beta) = \langle \nu_\beta(\vec{x}) | \nu_\alpha(\vec{x}, t) \rangle \tag{8}$$

Соответственно нужно найти $\psi_i(\vec{x}, t)$, т.е. решить уравнение Шрёдингера:

$$i\frac{\partial \psi_i(\vec{x}, t)}{\partial t} = \sqrt{\hat{\vec{p}}^2 + m_i^2}\,\psi_i(\vec{x}, t) \tag{9}$$

Для простоты будем сначала искать ВФ от времени в импульсном представлении, то есть $\psi_i(\vec{p}, t)$. А после воспользуемся преобразованием Фурье для нахождения ВФ в координатном представлении

$$\psi_i(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \psi_i(\vec{p}, t) e^{i\vec{p}\vec{x}}.$$

Разделим переменные, то есть представим нашу ВФ как произведение зависящей только от импульса части и части, зависящей только от времени:
$\psi_i(\vec{p}, t) = f_i(\vec{p})q(t)$, где $f_i(\vec{p}) \equiv f_i(\vec{p}-\vec{p}_i)$. УШ запишется так:

$$i\frac{\partial \psi_i(\vec{p}, t)}{\partial t} = \sqrt{\vec{p}^2 + m_i^2}\,\psi_i(\vec{p}, t)$$

$$f_i(\vec{p})\frac{\partial q(t)}{\partial t} = -iE_i(\vec{p})f_i(\vec{p})q(t)$$
$$\ln q(t) = -iE_i(\vec{p})t$$

откуда получаем:

$$\psi_i(\vec{p},t) = f_i(\vec{p})q(t) = \frac{1}{\pi^{3/4}\sigma_s^{3/2}}\exp\Big(-\frac{(\vec{p}-\vec{p}_i)^2}{2\sigma_s^2} - iE(\vec{p})t\Big).$$

Для нахождения ВФ в кординатном представлении разложим $E_i(\vec{p}) == \sqrt{\vec{p}^2+m_i^2}$ в ряд Тейлора до членов первого порядка в окрестности $\vec{p}_i$:

$$E_i(\vec{p}) = E_i(\vec{p}_i) + \frac{\partial E_i}{\partial p_x}\Big|_{\vec{p}_i}(p_x - p_{ix}) + \frac{\partial E_i}{\partial p_y}\Big|_{\vec{p}_i}(p_y - p_{iy}) + \frac{\partial E_i}{\partial p_z}\Big|_{\vec{p}_i}(p_z - p_{iz}) + \ldots =$$
$$= E_i(\vec{p}_i) + \frac{\vec{p}\vec{p}_i - \vec{p}_i^2}{E_i(\vec{p}_i)}.$$

Далее будем обозначать $E_i \equiv E_i(\vec{p}_i) = \sqrt{\vec{p}_i^2 + m_i^2}$.

Сделав преобразование Фурье получаем ВФ в координатном пространстве:

$$\psi_i(\vec{x},t) = \frac{\sigma_s^{3/2}}{\pi^{3/4}}\exp\Big(-\frac{\sigma_s^2(\vec{x}-\vec{v}_{gi}t)^2}{2} + i(\vec{p}_i\vec{x} - E_it)\Big), \tag{10}$$

где

$$\vec{v}_{gi} = \frac{\partial E_i(\vec{p})}{\partial \vec{p}}\Big|_{\vec{p}_i} = \frac{\vec{p}_i}{E_i} \text{ — групповая скорость волнового пакета.}$$

Теперь из формулы (10) найдём амплитуду вероятности:

$$A(\alpha\to\beta) = \sum_i \langle\nu_i|\nu_i\rangle U_{\beta i}U_{\alpha i}^*\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_i^*(\vec{x}-\vec{L})\psi_i(\vec{x},t)d^3\vec{x} =$$
$$= \Big(\frac{\sigma_D\sigma_s}{\pi}\Big)^{3/2}\sum_i U_{\beta i}U_{\alpha i}^*\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{\sigma_s^2(\vec{x}-\vec{v}_{gi}t)^2 + \sigma_D^2(\vec{x}-\vec{L})^2}{2} +$$
$$+ i((\vec{p}_i - \vec{p}_i{}')\vec{x} - E_it + \vec{p}_i{}'\vec{L})\Big)d^3\vec{x}$$

Примем для простоты $\vec{p}_i = \vec{p}_i'$, вычисляя интеграл получаем амплитуду вероятности:

$$A(\alpha\to\beta) = \Big(\frac{2\sigma_s\sigma_D}{\sigma_s^2+\sigma_D^2}\Big)^{3/2}\sum_i U_{\beta i}U_{\alpha i}^*\exp\Big(-\frac{\sigma_s^2\sigma_D^2(\vec{L}-\vec{v}_{gi}t)^2}{2(\sigma_s^2+\sigma_D^2)} +$$
$$+ i(\vec{p}_i\vec{L} - E_it)\Big) \tag{11}$$

Откуда находим вероятность зарегестрировать нейтрино типа β, если на источнике нетрино типа α:

$$P_{\alpha\beta}(\vec{L},t) = |A(\alpha\to\beta)|^2 = \Big(\frac{2\sigma_s\sigma_D}{\sigma_s^2+\sigma_D^2}\Big)^3\sum_{i,j}U_{\alpha i}^*U_{\beta i}U_{\alpha j}U_{\beta j}^*\times$$
$$\times\exp\Big(-\frac{\sigma_s^2\sigma_D^2((\vec{L}-\vec{v}_{gi}t)^2 + (\vec{L}-\vec{v}_{gj}t)^2)}{2(\sigma_s^2+\sigma_D^2)} +$$
$$+ i\Big((\vec{p}_i - \vec{p}_j)\vec{L} - (E_i - E_j)t\Big)\Big) \tag{12}$$

Но в реальных эксперементах время не измеряется, известно только расстояние от источника до детектора, поэтому нужно усреднить по времени:

$$P_{\alpha\beta}(\vec{L}) = N\int_{-\infty}^{+\infty} dt P(\vec{L},t),$$

где N – нормировочный коэффициент, появляющийся в связи с интегрированием по времени.

После интегрирования получаем вероятность зависящую только от расстояния между источником и детектором:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(\vec{L}) = \frac{8\sigma_s^2\sigma_D^2}{(\sigma_s^2+\sigma_D^2)^{5/2}} \sum_{i,j} U^*_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j} N \times \\ \times \left(\frac{2\pi}{\vec{v}_{gi}^2+\vec{v}_{gj}^2}\right)^{1/2} \exp(i\vec{L}(\vec{p}_i-\vec{p}_j))\exp\Bigg(-\frac{\sigma_s^2\sigma_D^2}{\sigma_s^2+\sigma_D^2}\vec{L}^2 + \\ + \frac{(\vec{L}(\vec{v}_{gi}+\vec{v}_{gj})\sigma_s^2\sigma_D^2 - i(\sigma_s^2+\sigma_D^2)(E_i-E_j))^2}{2\sigma_s^2\sigma_D^2(\sigma_s^2+\sigma_D^2)(\vec{v}_{gi}^2+\vec{v}_{gj}^2)}\Bigg) \end{aligned} \tag{13}$$

Нормировочный коэффициент находим из следующих соображений: мы знаем, что если массовые типы одинаковой массы, то осцилляций нет, т.е. $P_{\alpha\beta}(\vec{L}) = \delta_{\alpha\beta}$. Пренебрежём, для упрощения, компонентой импульса, а значит, и скорости, в перпендикулярном направлении к $\vec{L}$. И окончательная формула для вероятности:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(L) = \Bigg(\sum_i \frac{|U_{\alpha i}|^2}{|v_{gi}|}\Bigg)^{-1} \sum_{i,j} U^*_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}\Bigg(\frac{2}{v_{gi}^2+v_{gj}^2}\Bigg)^{1/2} \times \\ \times \exp\Bigg(-\frac{\sigma_s^2\sigma_D^2(v_{gi}-v_{gj})^2}{2(\sigma_s^2+\sigma_D^2)(v_{gi}^2+v_{gj}^2)}L^2\Bigg) \times \\ \times \exp\Bigg(-\frac{(E_i-E_j)^2(\sigma_s^2+\sigma_D^2)}{2\sigma_s^2\sigma_D^2(v_{gi}^2+v_{gj}^2)}\Bigg) \times \\ \times \exp\Bigg(-iL(E_i-E_j)\Bigg(\frac{v_{gi}+v_{gj}}{v_{gi}^2+v_{gj}^2} - \frac{p_i-p_j}{E_i-E_j}\Bigg)\Bigg) \end{aligned} \tag{14}$$

Мы уже знаем, что осцилляции могут быть только в случае разных масс нейтрино, то есть $\Delta m_{ij}^2 = |m_i^2 - m_j^2| \neq 0$. Так же осцилляции буду наблюдаться, если расстояние от источника до детектора меньше чем длина когерентности:

$$L < L_{coh} \sim \frac{\sqrt{(\sigma_s^2+\sigma_D^2)(v_{gi}^2+v_{gj}^2)}}{\sigma_s\sigma_D(v_{gi}-v_{gj})} \tag{15}$$

Введём обозначение $\overline{\sigma}^2 = \frac{\sigma_s^2\sigma_D^2}{\sigma_s^2+\sigma_D^2}$,тогда вторую экспоненту в формуле (14) можно записать так:

$$\exp\Bigg(-\frac{(\Delta E_{ij})^2}{2\overline{\sigma}^2(v_{gi}^2+v_{gj}^2)}\Bigg).$$

От сюда видно, что при увеличении разности энергий, осцилляции будут убывать. Из (14) получим длину осцилляций:

$$L_{osc} = \frac{2\pi}{|E_i - Ej|}\Bigg(\frac{v_{gi}+v_{gj}}{v_{gi}^2+v_{gj}^2} - \frac{p_i-p_j}{E_i-E_j}\Bigg)^{-1} \tag{16}$$

Что бы перейти к стандартной формуле для вероятности [2] сделаем следующие приближения: положим $p_i = p_j = p$, тогда $E_i - E_j \approx \frac{\Delta m_{ij}^2}{2p}$, так как предел релятивистский, то мы можем положить $p = E$, где E среднее значение энергии. Из этих же соображений преобразуем групповую скорость:

$$v_{gi} = \frac{\partial E(p)}{\partial p} = \frac{p}{E_i},$$

но так как все значения энергий близки и $p = E$, то

$$v_{gi} = \frac{E}{E_i} \approx 1.$$

Аналогично получим и для v_{gj}. После преобразований получим:

$$P_{\alpha\beta}(L) = \sum_{i,j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(- \frac{\overline{\sigma}^2 (\Delta m_{ij}^2)^2}{16E^4} L^2 \right) \exp\left(- \frac{(\Delta m_{ij}^2)^2}{16E^2 \overline{\sigma}^2} \right) \times$$
$$\times \exp\left(- i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} L \right). \tag{17}$$

Для перехода к стандартной формуле необходимо занулить показатели в первых двух экспонентах, так как, если значение показателей этих экспонент велико, то вероятность будет стремиться к нулю. Показатели зануляются, если:

$$\frac{\overline{\sigma}^2 (\Delta m_{ij}^2)^2}{E^4} L^2 << 1 \text{ и } \frac{(\Delta m_{ij}^2)^2}{E^2 \overline{\sigma}^2} << 1,$$

такое выполняется в случае $(\Delta m_{ij}^2)^2 << 1$, либо при больших энергиях, что справедливо для нейтрино. И отсюда получаем стандартную формулу для вероятности осцилляций нейтрино [2]:

$$P_{\alpha\beta}(L) = \sum_{i,j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(- i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} L \right) \tag{18}$$

4 Заключение

В работе было рассмотренно распространение и осцилляции нейтрино, описываемые с помощью Гауссовых волновых пакетов. Получено выражение для вероятности осцилляций. Из полученной формулы было показано, что в этом случае появляется такой фактор, как длина когерентности, показывающий, что начиная с какого-то расстояния от источника до детектора осцилляции не будут наблюдаться, так как на этом расстоянии волновые пакеты, соответствующие разным массовым состояниям, перестанут перекрываться, в связи с тем, что скорости составляющих пакета различаются. Показана значимость разности энергий массовых состояний, то есть при большом различии энергий осцилляции наблюдаться не будут.

Так же рассмотрен предельный переход к стандартной формуле для вероятности осцилляций, показывающий факторы, которыми в ней пренебрегают.

5 Список использованной литературы

1. Ю.Г.Куденко, "Исследование нейтринных осцилляций в ускорительных экспериментах с длинной базой", УФН 181 569-594 (2011)

2. Д.С.Горбунов, В.А.Рубаков, "Введение в теорию ранней вселенной. Теория горячего большого взрыва."

3. C.Guinti, C.W.Kim, U.W.Lee, PhysRevD.44.3635 (1991)

4. E. Kh. Akhmedov, A. Yu. Smirnov "Paradoxes of neutrino oscillations".