МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова
Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

Движение фотонов в поле черной дыры в расширенных моделях гравитации

Курсовая работа
студента 2 курса, 207 группы
Канапина Алана

Научный руководитель
к ф.-м. н., Сибиряков С.М.

Москва, 2013г.

Содержание

Введение

В данной курсовой работе рассматривается движение фотонов в поле чёрной дыры. В основе метода лежит волновое уравнение, которое обобщается на случай кривого пространства-времени. Сам фотон рассматривается в приближении геометрической оптики, т.е. как луч.

В конце рассматривается дисперсионное соотношение, нарушающее Лоренцеву симметрию, отказ от которой рассматривается в контексте расширенных моделей гравитации. Из этого соотношения находится изменённое волновое уравнение и соответствующие законы движения. Подобная задача о линзировании света актуальна, так как она представляет большой интерес в астрономии.

Движение фотонов в стандартной ОТО

В общей теории относительности поле сферически симметричного распределения массы даётся метрикой Шварцшильда:

$$ds^2 = (1 - \frac{r_g}{r})dt^2 - (1 - \frac{r_g}{r})^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

Координата t есть время, измеряемое на бесконечности. Также интерес представляет другой набор координат, отличающийся от Шварцшильдовых заменой координаты t на v:

$$v = t + r + r_g \log|\frac{r}{r_g} - 1|$$

Такой набор координат называется координатами Финкельштейна. В них метрика чёрной дыры имеет вид:

$$ds^2 = (1 - \frac{r_g}{r})dv^2 - 2dvdr - r^2 d\Omega$$

Закон движения фотона получим из стандартного волнового уравнения:

$$\ddot{\varphi} = \Delta\varphi$$

где φ - какая либо из компонент векторов напряжённости $\vec{E}$ или $\vec{H}$, $\varphi = e^{iS}$. Перепишем это уравнение, используя метрику Минковского и заменяя частные производные на ковариантные:

$$\eta^{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi = 0$$

Обобщим на искривлённое пространство-время заменой метрики:

$$g^{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi = 0$$

$$\nabla_i\varphi = i\nabla_i S\varphi$$

$$\nabla_i\nabla_j\varphi = \nabla_i\nabla_j S\varphi - \nabla_i S\nabla_j S\varphi$$

$$\nabla_i\nabla_j\varphi = i\nabla_i\nabla_j S\varphi - \nabla_i S\nabla_j S\varphi$$

Рассмотрим случай, когда длина волны $\lambda \ll r_g$, а её изменение происходит на расстояниях порядка r_g. Тогда

$$S' \propto \frac{1}{\lambda},\ \ S'' \propto \frac{\lambda'}{\lambda^2}$$

откуда видно, что $(S')^2 \gg S''$, и наше волновое уравнение сводится к:

$$g^{ij}\partial_i S\partial_j S = 0$$

Полученное уравнение является уравнением Гамильтона-Якоби. Будем решать его, как это принято в механике, вводя гамильтониан и канонические импульсы:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H,\ \ \frac{\partial S}{\partial r} = p_r,\ \ \frac{\partial S}{\partial \varphi} = p_\varphi,\ \ \frac{\partial S}{\partial \theta} = p_\theta$$

Подставляя метрику Шварцшильда и выражая Гамильтониан, получаем:

$$H = \pm\sqrt{(1-\frac{r_g}{r})^2 p_r^2 + \frac{(1-\frac{r_g}{r})}{r^2}p_\theta^2 + \frac{(1-\frac{r_g}{r})}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2}$$

Уравнения движения получим из уравнений Гамильтона.

$$\dot\theta = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \pm\frac{\frac{(1-\frac{r_g}{r})}{r^2}p_\theta}{H}$$

$$\dot{p_\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \pm\frac{\frac{(1-\frac{r_g}{r})}{r^2\sin^3\theta}p_\varphi^2\cos\theta}{H}$$

Видно, что если отсчитывать θ так, чтобы в какой-то момент времени $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot\theta = 0$, то $p_\theta = 0$, $\dot{p_\theta} = 0$, а значит импульс p_θ всегда будет равен 0. Помимо этого $\sin\theta = 1$, и гамильтониан несколько упрощается:

$$H = \pm\sqrt{(1-\frac{r_g}{r})^2 p_r^2 + \frac{(1-\frac{r_g}{r})}{r^2}p_\varphi^2}$$

Для радиальных лучей:

$$H = \pm(1-\frac{r_g}{r})p_r$$

$$\dot r = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \pm(1-\frac{r_g}{r})$$

Видно, что $\dot r \to 0$ при $r \to r_g$.

Из независимости гамильтониана от угла φ следует постоянство импульса p_φ. Этот импульс есть угловой момент, и он равен $p_r(\infty)b$, где b - прицельный параметр. А $p_r(\infty) = H$, т.е. $p_\varphi = Hb$.

Найдём уравнение траектории:

$$\dot r = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \pm\frac{(1-\frac{r_g}{r})^2 p_r}{H}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \pm \frac{\frac{(1-\frac{r_g}{r})}{r^2} p_\varphi}{H}$$

Тогда:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{(1-\frac{r_g}{r})p_r}{p_\varphi} r^2$$

$$p_r = \pm \frac{\sqrt{H^2 - \frac{(1-\frac{r_g}{r})}{r^2} p_\varphi^2}}{(1-\frac{r_g}{r})}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{\sqrt{H^2 - \frac{(1-\frac{r_g}{r})}{r^2} H^2 b^2}}{Hb} r^2$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \sqrt{\frac{r^4}{b^2} - r^2 + r r_g}$$

Сделав замену $\tilde{r} = \frac{r}{r_g}$, $\tilde{b} = \frac{b}{r_g}$, получим:

$$\frac{d\tilde{r}}{d\varphi} = \pm \sqrt{\frac{\tilde{r}^4}{\tilde{b}^2} - \tilde{r}^2 + \tilde{r}}$$

Критическим значением прицельного параметра является $\tilde{b} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Если $\tilde{b} < \tilde{b}_{cr}$, то подкоренное выражение не имеет действительных положительных корней, а значит фотон будет падать на чёрную дыру. При $\tilde{b} = \tilde{b}_{cr}$ подкоренное выражение имеет один положительный корень $\tilde{r} = \frac{3}{2}$, фотон будет бесконечно долго наматываться на окружность этого радиуса. При $\tilde{b} > \tilde{b}_{cr}$ есть 2 положительных корня, при достижении большего из них фотон начнёт удаляться от чёрной дыры, т.е. испытает рассеяние.

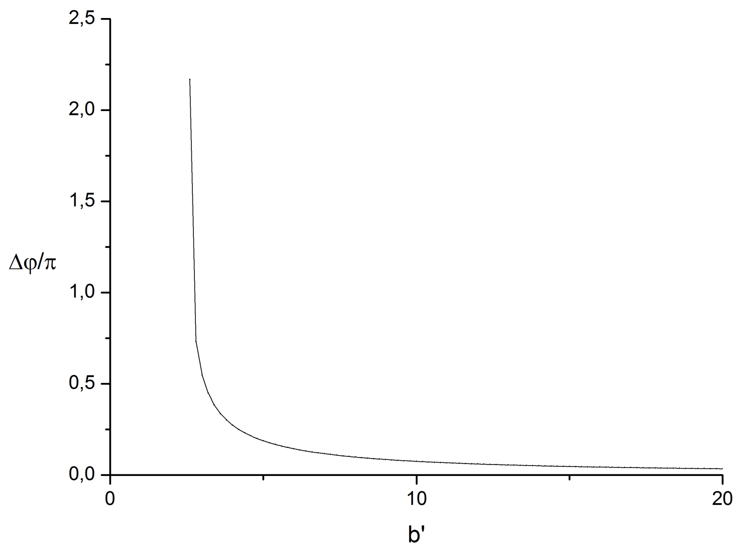

Рис. 1: Зависимость угла отклонения от прицельного параметра

Также важным результатом является независимость полученной траектории от энергии фотона H.

Теперь рассмотрим движение фотона в координатах Финкельштейна. Подставляя соответствующую метрику в волновое уравнени и отбрасывая слагаемые, отвечающие изменению θ, получим следующее:

$$2Hp_r = (1 - \frac{r_g}{r})p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}$$

$$H = \frac{1}{2}(1 - \frac{r_g}{r})p_r + \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{p_r r^2}$$

Удобство этих координат видно из того, что нет 2-х веток гамильтониана, которые требуют рассмотрения, в отличие от Шварцшильдовских координат. Как входящие, так и выходящие лучи описываются одним гамильтонианом. Также эти координаты описывают движение фотонов внутри горизонта чёрной дыры. Ими будет удобно пользоваться, например, для изучения излучения Хокинга, но это не входит в рамки данной работы.

Модель с нарушением Лоренцевой симметрии

Рассмотрим, дисперсионное соотношение, нарушающее лоренцеву симметрию:

$$\omega^2 = k^2 + ak^4 + bk^6 + ...$$

Найдём волновое уравнение, соответствующее этому соотношению. В плоском пространстве

$$\varphi = e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

$$\omega^2 \varphi = -\ddot{\varphi}$$

$$k^2 \varphi = -\Delta\varphi$$

Тогда уравнение запишется в виде:

$$0 = \ddot{\varphi} - \Delta\varphi + a\Delta^2\varphi - ...$$

В данном уравнении разделены производные по пространственным и временной координате. Чтобы записать его в ковариантном виде введём вектор u^i, который в плоском пространстве имеет вид $u^i = (1, 0, 0, 0)$. Тогда

$$\dot{\varphi} = u^i \nabla_i \varphi$$

$$\ddot{\varphi} = u^i \nabla_i (u^j \nabla_j \varphi) = u^i \nabla_i u^j \nabla_j \varphi + u^i u^j \nabla_i \nabla_j \varphi$$

Первое слагаемое $\propto u'S'$, второе $\propto (S')^2$. В поле чёрной дыры $u' \propto \frac{1}{r_g}$, а значит первым слагаемым мы можем пренебречь. Имеем

$$\ddot{\varphi} \approx u^i u^j \nabla_i \nabla_j \varphi$$

Также введём проектор $P^{ij} = u^i u^j - g^{ij}$. Тогда

$$\Delta\varphi \approx P^{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi$$

Волновое уравнение запишется в виде:

$$0 = u^i u^j \nabla_i\nabla_j\varphi - P^{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi + a(P^{ij}\nabla_i\nabla_j)^2\varphi - ...$$

$$0 = u^i u^j \nabla_i\nabla_j\varphi - (u^i u^j - g^{ij})\nabla_i\nabla_j\varphi + a((u^i u^j - g^{ij})\nabla_i\nabla_j)^2\varphi - ...$$

Рассмотрим уравнение только с первой поправкой к стандартному уравнению. Отбрасывая малые слагаемые, уравнение сведётся к:

$$0 = g^{ij}\nabla_i S\nabla_j S + a((g^{ij} - u^i u^j)\nabla_i S\nabla_j S)^2$$

В Шварцшильдовых координатах в силу симметрии вектор u^i будет иметь вид $(u_t, u_r, 0, 0)$. При $r \to \infty$, т.е. при приближении к плоскому пространству $u_t \to 1$, $u_r \to 0$, а также длина этого вектора равна 1, что накладывает ограничения на его общий вид.
Для рассмотрения движения фотонов в дали от чёрной дыры (где поправки к стандартному уравнению малы) удобно воспользоваться методом последовательных приближений. Для этого возьмём выражение для стандартного гамильтониана, обозначив за H_0, и подставим его в дополнительное слагаемое. Отбросив импульс p_θ, получим:

$$H^2 = H_0^2 - a(1 - \frac{r_g}{r})(H_0^2((1 - \frac{r_g}{r})^{-1} - u_t^2) - p_r^2((1 - \frac{r_g}{r}) + u_r^2) - \frac{p_\varphi^2}{r^2} - 2u_t u_r H_0 p_r)^2$$

Если теперь найти уравнение траектории фотона, то можно убедиться, что оно, в отличие от классического случая, зависит от энергии фотона, а также от вида вектора u. Это означает, что фотоны с различной энергией будут иметь различные траектории, т.е. чёрная дыра будет раскладывать в 'спектр' пролетающий мимо свет.

Заключение

В работе было показано, что траектория фотона не зависит от его энергии (частоты) в классической ОТО. Основным же результатом является то, что в случае отказа от Лоренцевой симметрии это уже не так. Наблюдение подобной дисперсии в результате эксперимента может послужить доводом в пользу подобных теорий.

В качестве продолжения данной работы можно найти асимптотическую формулу для угла отклонения в дали от чёрной дыры для различных векторов u, а также рассмотреть нашу в задачу в поле чёрной дыры Керра-Ньюмена.

Список использованной литературы

[1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля, Физматлит, 2003.
[2] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. Гравитация, Мир, 1977.