

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. Ломоносова  
Физический факультет  
Кафедра физики частиц и космологии

---

**КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С НАРУШЕНИЕМ  
СВЕТОПОДОБНОГО УСЛОВИЯ ЭНЕРГОДОМИНАНТНОСТИ**

Курсовая работа  
студента 2 курса, 207 группы  
Колеватова Романа

Научный руководитель  
академик РАН, доктор физ.-мат. наук  
профессор В. А. Рубаков

Москва, 2013 г.

## Аннотация

В курсовой работе рассматривается новая космологическая модель, в которой стандартная инфляция заменена фазой расширения с нарушением светоподобного условия энергодоминантности (null energy condition, NEC):  $\dot{H} \gg H$ . Модель основана на недавно предложенных теориях с галилеоном (galileon-theories), в которых нарушается NEC, однако решение системы уравнений, описывающих динамику эволюции Вселенной, существует. Решение с нарушением NEC описывают Вселенную с пространством Минковского при  $t \rightarrow -\infty$ , параметр Хаббла которой увеличивается с течением времени.

# Оглавление

<b>1 Введение</b>	<b>2</b>
<b>2 Действие. Уравнение поля</b>	<b>3</b>
<b>3 Тензор энергии-импульса. Уравнения Фридмана</b>	<b>5</b>
3.1 Тензор энергии-импульса . . . . .	5
3.2 Уравнения Фридмана. . . . .	6
<b>4 Эволюция Вселенной</b>	<b>7</b>
4.1 Нахождение начальных условий . . . . .	8
4.2 Процедура обезразмеривания системы . . . . .	8
4.3 Приведение системы к задаче типа Коши . . . . .	10
4.4 Эволюция Вселенной . . . . .	10
<b>5 Заключение</b>	<b>14</b>
<b>Приложение. Описание программы</b>	<b>15</b>
<b>Литература</b>	<b>19</b>

# Глава 1

## Введение

По современным представлениям экстраполяция наблюдаемого расширения Вселенной назад во времени при использовании общей теории относительности и некоторых других альтернативных теорий гравитации приводит к бесконечной плотности и температуре вещества Вселенной в конечный момент времени в прошлом. С уменьшением размеров Вселенной растёт плотность энергии, пока в конечном итоге не наступает так называемая «Планковская эпоха», температура вещества в этот момент достигает  $\approx 10^{32}$  К (Планковская температура), а плотность вещества  $\approx 10^{93}$  г/см<sup>3</sup>(Планковская плотность).

Главный аргумент, лежащий в основе всех этих предположений, состоит в том, что тензор энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  удовлетворяет условию NEC, которое постулирует, что для любого светоподобного вектора  $k^\mu$  справедливо неравенство

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0. \quad (1.1)$$

Для идеальной жидкости, приближения, хорошо описывающего Вселенную на больших масштабах, это неравенство эквивалентно условию

$$\rho + p \geq 0, \quad (1.2)$$

где  $\rho$  и  $p$  - плотность энергии и давление вещества соответственно.

Для метрики Фридмана это означает, что плотность энергии, а, следовательно, и параметр Хаббла  $H$ , уменьшаются с расширением Вселенной, так как согласно условию ковариантного сохранения тензора энергии импульса

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \quad (1.3)$$

В соответствие с современными экспериментальными данными плотность энергии и давление материи во Вселенной удовлетворяют условию  $\rho + p \approx 0$ . Отсюда, однако, не следует обязательное выполнение NEC, так как сумма плотности энергии и давления могут быть как больше, так и меньше нуля. Таким образом, космологические модели с нарушением NEC не противоречат экспериментальным данным.

Если допустить нарушение NEC, перед нами открывается возможность построения нестандартных космологических моделей. В частности, возможно построение модели, в которой экс-

траполяция Вселенной назад во времени неизбежно приводит к росту плотности энергии, температуры и давления материи.

Есть и другие доводы в пользу теорий с нарушением NEC. Например, выполнение сильного условия энергодоминантности (strong energy condition, SEC) означает, что для любого времениподобного вектора  $X^\mu$  справедливо неравенство

$$\left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) X^\nu \geq 0, \quad (1.4)$$

в случае идеальной жидкости это эквивалентно условию

$$\rho + 3p \geq 0. \quad (1.5)$$

Согласно этому неравенству расширение Вселенной происходит с замедлением  $\ddot{a} \leq 0$ , но современные наблюдения говорят об обратном: Вселенная расширяется с ускорением. Нарушение SEC происходило и в прошлом, в частности, в период инфляции – наиболее правдоподобной теории ранней Вселенной. Если принять во внимание необходимость отказа от SEC для сохранения теории инфляции, то не означает ли это, что отказ от NEC также повлечёт за собой создание новых теорий, которые станут превалирующими в будущем?

В данной работе рассматривается космологическая модель, в которой наблюдается сильное нарушение NEC. Пространство Вселенной в данной модели асимптотически стремится к пространству Минковского при  $t \rightarrow -\infty$ . С течением времени Вселенная расширяется, параметр Хаббла и плотность энергии растут. При этом растёт, стремясь к бесконечности, производная параметра Хаббла по времени  $\dot{H}$ . Таким образом, с увеличением времени в предложенной космологической модели увеличивается степень нарушения NEC.

## Глава 2

### Действие. Уравнение поля

Построение космологической модели начнём с введения лагранжиана

$$L = F(Y) e^{4\pi} + G(Y) \square\pi \cdot e^{2\pi}, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} Y &= e^{-2\pi} (\partial\pi)^2 \\ \square\pi &= g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \pi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \pi) \\ (\partial\pi)^2 &= g^{\mu\nu} \nabla_\mu \pi \nabla_\nu \pi = g^{\mu\nu} \partial_\mu \pi \partial_\nu \pi. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Лагранжиан инвариантен относительно преобразований дилатации

$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu, \pi \rightarrow \pi - \ln \lambda. \quad (2.3)$$

Получим уравнение поля из вариации действия этого поля

$$\delta S_\pi = \delta \int d^4x \sqrt{g} [F(Y) e^{4\pi} + G(Y) \square \pi \cdot e^{2\pi}] = 0. \quad (2.4)$$

При варьировании, интегрируя по частям и учитывая, что на границах интегрирования вариация поля равна нулю, можно получить следующие равенства

$$\begin{aligned} 2F' e^{2\pi} \partial_\mu \pi \partial_\mu (\delta \pi) &= -2\partial_\mu (F' e^{2\pi} \partial_\mu \pi) \delta \pi \\ 2G' \partial_\mu \pi \partial (\delta \pi) \square \pi &= -2\partial_\mu (G' \partial_\mu \pi \square \pi) \delta \pi \\ G \delta (\square \pi) e^{2\pi} &= \square (e^{2\pi} G) \delta \pi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Опуская промежуточные выкладки, напишем уравнение поля, полученное в результате вариации действия

$$\begin{aligned} 4e^{4\pi} F - 2e^{2\pi} (\partial \pi)^2 F' - 2\partial_\mu (e^{2\pi} F' \partial_\mu \pi) + 2e^{2\pi} \square \pi \cdot G + \\ + \square (e^{2\pi} G) - 2\square \pi \cdot (\partial \pi)^2 G' - 2\partial_\mu (\square \pi \cdot G' \partial_\mu \pi) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Скалярное поле  $\pi$  пространственно однородно, поэтому единственная входящая в уравнение производная от  $\pi$ , отличная от нуля, – это производная от  $\pi$  по времени. Запишем уравнение поля, рассматривая все производные, входящие в уравнение, как производные по времени. Будем при этом учитывать гравитацию, то есть рассматривать уравнение в метрике Фридмана. Принимая всё это во внимание получим

$$\begin{aligned} \partial_\mu \pi = \partial_0 \pi = \dot{\pi} \\ \square \pi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 (g^{00} \sqrt{-g} \partial_0 \pi) = \frac{1}{a^3} (3a^2 \dot{a} \dot{\pi} + a^3 \ddot{\pi}) = 3\frac{\dot{a}}{a} \dot{\pi} + \ddot{\pi}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

т.к.  $g_{00} = g^{00} = 1$  и  $g = -a^6$ , где  $a$  – масштабный фактор.

Тогда уравнение поля будет выглядеть так

$$\begin{aligned} 4e^{4\pi} F - 6e^{2\pi} F' \dot{\pi}^2 - 4F'' \dot{\pi}^2 \ddot{\pi} - 6\frac{\dot{a}}{a} e^{2\pi} F' \dot{\pi} - 2e^{2\pi} F' \ddot{\pi} + 12\frac{\dot{a}}{a} e^{2\pi} G \dot{\pi} + 4e^{2\pi} G \ddot{\pi} - 12\frac{\dot{a}}{a} G' \pi^3 - \\ - 4G' \dot{\pi}^2 \ddot{\pi} - 6\frac{\ddot{a}}{a} G' \dot{\pi}^2 + 12\frac{\dot{a}}{a} e^{-2\pi} G'' \dot{\pi}^5 - 12\frac{\dot{a}}{a} G'' \dot{\pi}^3 \ddot{\pi} - 12 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 G' \dot{\pi}^2 - 12\frac{\dot{a}}{a} G' \dot{\pi} \ddot{\pi} + \\ + 4e^{-2\pi} G'' \dot{\pi}^6 - 4e^{-2\pi} G'' \dot{\pi}^4 \ddot{\pi} - 4G' \dot{\pi}^4 + 4e^{2\pi} G \dot{\pi}^2 + 4F'' \dot{\pi}^4 = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

# Глава 3

## Тензор энергии-импульса. Уравнения Фридмана

### 3.1 Тензор энергии-импульса

Для получения полной системы уравнений необходимо также вывести уравнения Фридмана, в которые входят  $\frac{\dot{a}}{a}$  и  $\frac{\ddot{a}}{a}$ . Для этого сначала получим выражение для тензора энергии-импульса поля  $\pi$ . Для нахождения тензора энергии-импульса вычислим вариационную производную от лагранжевой плотности функционала действия по метрическому тензору

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L)}{\delta g_{\mu\nu}}.$$

Варьируя лагранжиан, получим формулу для тензора энергии-импульса поля  $\pi$ :

$$T_{\mu\nu} = 2e^{2\pi} F' \partial_\mu \pi \partial_\nu \pi - g_{\mu\nu} e^{4\pi} F + 2G' \square \pi \partial_\mu \pi \partial_\nu \pi + g_{\mu\nu} g^{\lambda\rho} \partial_\lambda \partial_\rho (e^{2\pi} G) - 2\partial_\mu \partial_\nu (e^{2\pi} G). \quad (3.1)$$

Это равенство не является окончательным: поскольку тензор энергии-импульса по определению является симметричным, симметризуем его

$$\begin{aligned} -2\partial_\mu \pi \partial_\nu (e^{2\pi} G) &= -\partial_\mu \pi \partial_\nu (e^{2\pi} G) - \partial_\nu \pi \partial_\mu (e^{2\pi} G) - \\ &\quad \underbrace{-\partial_\mu \pi \partial_\nu (e^{2\pi} G) + \partial_\nu \pi \partial_\mu (e^{2\pi} G)}_{= 0}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тогда тензор энергии-импульса запишется следующим образом

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= 2e^{2\pi} F' \partial_\mu \pi \partial_\nu \pi - g_{\mu\nu} e^{4\pi} F + 2G' \square \pi \partial_\mu \pi \partial_\nu \pi - \partial_\mu \pi \partial_\nu (e^{2\pi} G) - \\ &\quad - \partial_\nu \pi \partial_\mu (e^{2\pi} G) + g_{\mu\nu} g^{\lambda\rho} \partial_\lambda \partial_\rho (e^{2\pi} G). \end{aligned} \quad (3.3)$$

### 3.2 Уравнения Фридмана.

Как и раньше, единственная производная от  $\pi$ , отличная от нуля, – это производная от  $\pi$  по времени в силу пространственной однородности поля. Рассмотрим отдельно временные и пространственные компоненты тензора.

При рассмотрении временной компоненты тензора все производные, входящие в уравнение (3.1), станут производными по времени, а временная компонента метрического тензора в метрике Фридмана равна единице

$$g_{00} = g^{00} = 1.$$

Также учтём, что  $\square\pi$  в метрике Фридмана равен

$$\square\pi = 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\pi} + \ddot{\pi}.$$

С учётом вышесказанного получим выражение для временной компоненты тензора энергии-импульса

$$T_{00} = 2G'\dot{\pi}^4 + 2e^{2\pi} \left( F' - G \right) \dot{\pi}^2 + 6\frac{\dot{a}}{a}G'\dot{\pi}^3 - e^{4\pi}F. \quad (3.4)$$

Аналогичным образом рассмотрим пространственную компоненту тензора. Так как поле пространственно однородно, то единственными ненулевыми слагаемыми, входящими в уравнение (3.1) в случае пространственных координат, будут второе и последнее слагаемые. Пространственная компонента метрического тензора в метрике Фридмана

$$g_{ij} = -a^2\gamma_{ij},$$

где  $\gamma_{ij}$  - метрика трёхмерной плоскости.

Пространственная компонента тензора энергии-импульса

$$T_{ij} = a^2\gamma_{ij}e^{4\pi}F - 2a^2\gamma_{ij}G'\dot{\pi}^2\ddot{\pi} - 2a^2\gamma_{ij}e^{2\pi}G\dot{\pi}^2. \quad (3.5)$$

Как известно, тензор энергии-импульса для макроскопического состояния изотропного вещества в пространстве Минковского равен

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

где  $u_\mu$  - вектор 4-скорости. Тогда нулевая компонента тензора энергии-импульса равна

$$T_{00} = (p + \rho)u_0 u_0 - pg_{00} = \rho, \quad (3.7)$$

а пространственная компонента с учётом метрики Фридмана

$$T_{ij} = (p + \rho)u_i u_j - pg_{ij} = -pg_{ij} = pa^2\gamma_{ij}. \quad (3.8)$$

Сравним полученные нами выражения (3.2) и (3.2) для пространственной и временной компонент тензора энергии-импульса поля  $\pi$  с выражениями (3.2) и (3.2) соответственно.

Получим формулы для плотности энергии и давления материи во Вселенной

$$\rho = 2G' \dot{\pi}^4 + 2e^{2\pi} (F' - G) \dot{\pi}^2 + 6 \frac{\dot{a}}{a} G' \dot{\pi}^3 - e^{4\pi} F \quad (3.9)$$

$$p = e^{4\pi} F - 2G' \dot{\pi}^2 \ddot{\pi} - 2e^{2\pi} G \dot{\pi}^2. \quad (3.10)$$

Теперь легко записать уравнения Фридмана, замыкающие систему уравнений, определяющие динамику изменения Вселенной

$$\begin{aligned} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= \frac{8\tilde{\pi}}{3} G_N \left( 2G' \dot{\pi}^4 + 2e^{2\pi} (F' - G) \dot{\pi}^2 + 6 \frac{\dot{a}}{a} G' \dot{\pi}^3 - e^{4\pi} F \right) \\ 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= -8\tilde{\pi} G_N \left( e^{4\pi} F - 2G' \dot{\pi}^2 \ddot{\pi} - 2e^{2\pi} G \dot{\pi}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $\tilde{\pi}$  - иррациональное число «пи». Отметим, что мы рассматриваем пространственно-плоскую модель

$$\kappa = 0.$$

## Глава 4

### Эволюция Вселенной

В предыдущих главах нами была получена система уравнений, определяющая эволюцию Вселенной с нарушением NEC. В данной работе эта система уравнений была решена с помощью численного компьютерного расчёта, подробное описание написанной программы изложено в приложении. Перед использованием программы для решения системы поэтапно были проведены предварительные математические преобразования, такие как:

- 1 нахождение начальных условий;
- 2 обезразмеривание системы;
- 3 приведение системы к задаче типа Коши.

Перейдём к последовательному изложению всех проделанных преобразований.

## 4.1 Нахождение начальных условий

Как отмечалось раньше, при  $t \rightarrow -\infty$  пространство Вселенной стремится к пространству Минковского. Без учёта гравитации уравнение поля допускает решение в виде

$$e^\pi = \frac{1}{H_* (t_0 - t)}, \quad (4.1)$$

где  $H_*^2 \equiv Y_M = Y$  – решение уравнения поля (2) в пространстве Минковского.

Тогда

$$\begin{aligned} \pi &= -\ln(H_*(t_0 - t)) \\ \partial_\mu \pi &= \partial_0 \pi = \dot{\pi} = \frac{1}{t_0 - t} \\ \square \pi &= \ddot{\pi} = \frac{1}{(t_0 - t)^2}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

значение константы  $t_0$  определяет временной сдвиг и не несёт глубокого физического смысла. Подставляя (4.1) и (4.2) в уравнение поля (2), получим выражение

$$F - 2Y_M F' + 2Y_M \left( G - Y_M G' \right) = 0, \quad (4.3)$$

из которого можно найти значение константы  $H_*$  и таким образом определить начальные условия системы.

## 4.2 Процедура обезразмеривания системы

Для использования уравнений в компьютерной программе необходимо провести предварительное обезразмеривание системы. Как было выяснено выше, начальным условием системы является выражение (4.1). Следовательно,

$$[H_*] = \frac{1}{t} = M, \quad (4.4)$$

и перед введением уравнений в компьютер необходимо перейти к безразмерному времени  $\tau = H^* t$ . Для этого выясним размерности слагаемых, входящих в лагранжиан, напомним выражение для лагранжиана

$$L = F(Y) e^{4\pi} + G(Y) \square \pi \cdot e^{2\pi}.$$

Обратимся к функциям  $F(Y)$  и  $G(Y)$ . Эти функции могут иметь произвольный вид, однако, в силу их зависимости от  $Y = e^{-2\pi} (\partial \pi)^2$ , для обезразмеривания этих величин необходимо перейти к безразмерным функциям  $\tilde{F}(Y)$  и  $\tilde{G}(Y)$ , таким что

$$\begin{aligned} \tilde{F}(Y) &= F\left(\frac{Y}{H_*^2}\right) \\ \tilde{G}(Y) &= G\left(\frac{Y}{H_*^2}\right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Очевидно также, что  $[\square\pi] = \frac{1}{t^2} = M^2$  и для перехода к безразмерному оператору Д'Аламбера необходимо ввести

$$\tilde{\square}\pi = \frac{\square\pi}{H_*^2}. \quad (4.6)$$

Таким образом, лагранжиан можно переписать в следующем виде

$$L = M^4 \tilde{F}(Y) e^{4\pi} + M^4 \tilde{G}(Y) \tilde{\square}\pi \cdot e^{2\pi}. \quad (4.7)$$

Теперь запишем действие поля, перейдя к безразмерному дифференциалу путём замены

$$d^4x \longrightarrow \frac{1}{H_*^4} d^4\tilde{x}. \quad (4.8)$$

Тогда действие поля

$$S_\pi = \int d^4\tilde{x} \sqrt{g} \cdot \frac{M^4}{H_*^4} \left[ \tilde{F}(Y) e^{4\pi} + M^4 \tilde{G}(Y) \tilde{\square}\pi \cdot e^{2\pi} \right] = 0. \quad (4.9)$$

Очевидно, что безразмерный множитель  $\frac{M^4}{H_*^4}$  не влияет на значение вариации действия, и в результате мы получим такое же, как и полученное в главе 2, уравнение поля (2), с той лишь разницей, что все производные, входящие в новое уравнение, будут теперь производными по безразмерному времени  $\tau$ .

Проделав аналогичные действия с тензором энергии-импульса, получим

$$T_{\mu\nu} = \frac{M^4}{H_*^4} \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (4.10)$$

и, учитывая, что  $G_N = \frac{1}{M_{Pl}^2}$ , уравнения Фридмана (3.2) теперь можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\tilde{\rho}}{3} \frac{M^4}{M_{Pl}^2 H_*^2} \tilde{\rho} \\ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= -8\tilde{p} \frac{M^4}{M_{Pl}^2 H_*^2} \tilde{p}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{p}$  - выражения для безразмерных плотности энергии и давления материи, отличающиеся от выражений для  $\rho$  и  $p$  тем, что теперь производные берутся по безразмерному времени  $\tau$ . Введём обозначение  $\frac{M^4}{M_{Pl}^2 H_*^2} = \mu^2$

Далее для облегчения визуального восприятия формул будем опускать знак “~” над функциями, обозначающей безразмерность этих функций, но будем считать, что все функции, использующиеся далее, являются уже безразмерными.

## 4.3 Приведение системы к задаче типа Коши

Система была сведена к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешённых относительно первых производных путём замены переменных

$$\begin{aligned} p &= \dot{\pi} \\ \dot{p} &= \ddot{\pi}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Таким образом, из уравнения поля (2) была получена задача Коши, которая легко решается численно в MATLAB'е с помощью функции “ode45”.

Величины  $\frac{\dot{a}}{a}$  и  $\frac{\ddot{a}}{a}$ , входящие в уравнение поля (2), были найдены из уравнений Фридмана (3.2) решением квадратных уравнений относительно этих величин. После решения квадратных уравнений относительно  $\frac{\dot{a}}{a}$  и  $\frac{\ddot{a}}{a}$  оказалось, что выражение для  $\frac{\ddot{a}}{a}$  содержит слагаемое с  $\ddot{\pi}$ , поэтому, перед тем как делать замену (4.3) и приводить уравнение поля к задаче Коши,  $\frac{\ddot{a}}{a}$  подставлялось в уравнение поля в явном виде.

Запишем полученную систему дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\pi} = p \\ \dot{p} = \frac{4e^{4\pi}F - 6e^{2\pi}F'p^2 - 6\frac{\dot{a}}{a}e^{2\pi}F'p + 12\frac{\dot{a}}{a}e^{2\pi}Gp - 12\frac{\dot{a}}{a}G'p^3 - 6DG'p^2 + 12\frac{\dot{a}}{a}e^{-2\pi}G''p^5 - 4F''p^2 + 2e^{2\pi}F' - 4e^{2\pi}G + 4p^2G' + 12\frac{\dot{a}}{a}e^{-2\pi}p^3 + 12\frac{\dot{a}}{a}e^{-2\pi}p^3 + 12\frac{\dot{a}}{a}pG' + -12\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 G'p^2 + 4e^{-2\pi}G''p^6 - 4G'p^4 + 4e^{2\pi}Gp^2 + 4F''p^4 + 4G''e^{-2\pi}p^4 + 96\tilde{\pi}\mu^2(G')^2p^4}{+4G''e^{-2\pi}p^4 + 96\tilde{\pi}\mu^2(G')^2p^4}, \end{array} \right. \tag{4.13}$$

где

$$\begin{aligned} D &= -64\tilde{\pi}^2\mu^2\left(G'\right)^2G'^2p^6 - 8\tilde{\pi}\mu^2G'p^3\sqrt{64\tilde{\pi}^2\mu^4G'p^6 + E} - 8\tilde{\pi}\mu^2(e^{4\pi}F - 2e^{2\pi}Gp^2) \\ E &= \frac{8\tilde{\pi}\mu^2}{3}\left(2G'p^4 + 2e^{2\pi}(F' - G)p^2 - e^{4\pi}F\right) \\ \frac{\dot{a}}{a} &= 8\tilde{\pi}\mu^2G'p^3 + \sqrt{64\tilde{\pi}^2\mu^4G'p^6 + E}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

## 4.4 Эволюция Вселенной

Итак, после всех проделанных преобразований и решения системы с помощью компьютерного расчёта была получена картина эволюции Вселенной. Графики зависимостей параметра Хаббла  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  и поля  $\pi$  от времени представлены на рис. 4.1 и 4.2.

Графики отвечают решению на функциях

$$\begin{aligned} F(Y) &= \frac{1}{6}Y^2 - \frac{1}{2}Y \\ G(Y) &= \frac{1}{3}Y, \end{aligned} \tag{4.15}$$

где  $Y = e^{-2\pi}\dot{\pi}^2$ ;

Изменение параметра Хаббла  $H = \frac{\dot{a}}{a}$

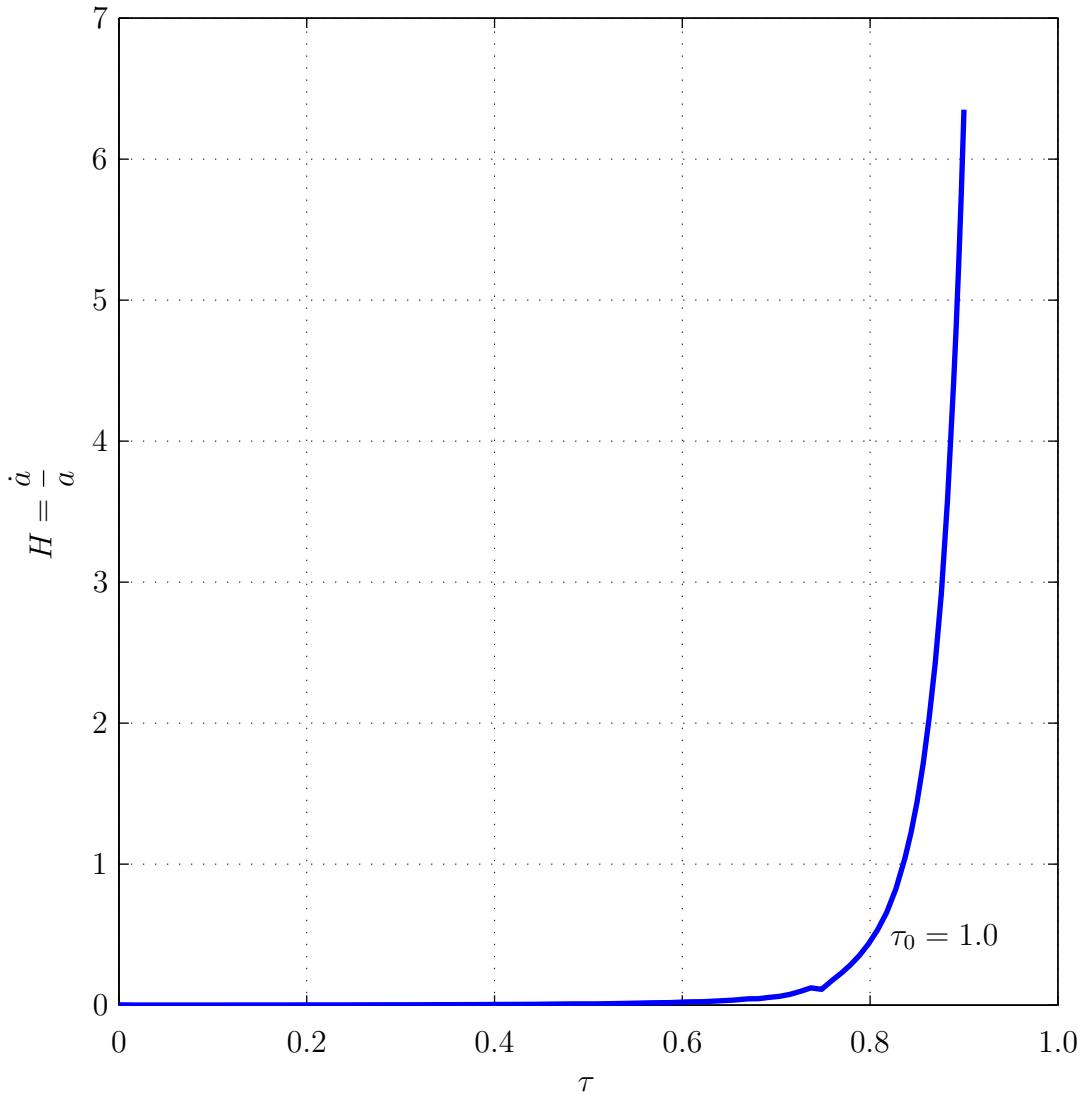


Рис. 4.1: Эволюция Вселенной. Параметр Хаббла.

- функциям  $F(Y)$  и  $G(Y)$  соответствует  $H_* = 1$ ;
- безразмерный параметр  $\mu = 0.01$ ;
- для  $\pi$  и  $e^\pi$  в тех же координатах построены графики при  $\mu = 0$  (отсутствие гравитации);
- соответствующее времени  $t_0$  безразмерное время  $\tau_0 = 1$ ;
- интервал интегрирования по времени  $\tau \in [0; 0.9]$ .

Из этого графика видно, что в начальный момент времени  $H \rightarrow 0$ , то есть пространство Вселенной близко к пространству Минковского. С течением времени параметр Хаббла растёт и при временах  $t \rightarrow t_0$  наблюдается сингулярность.

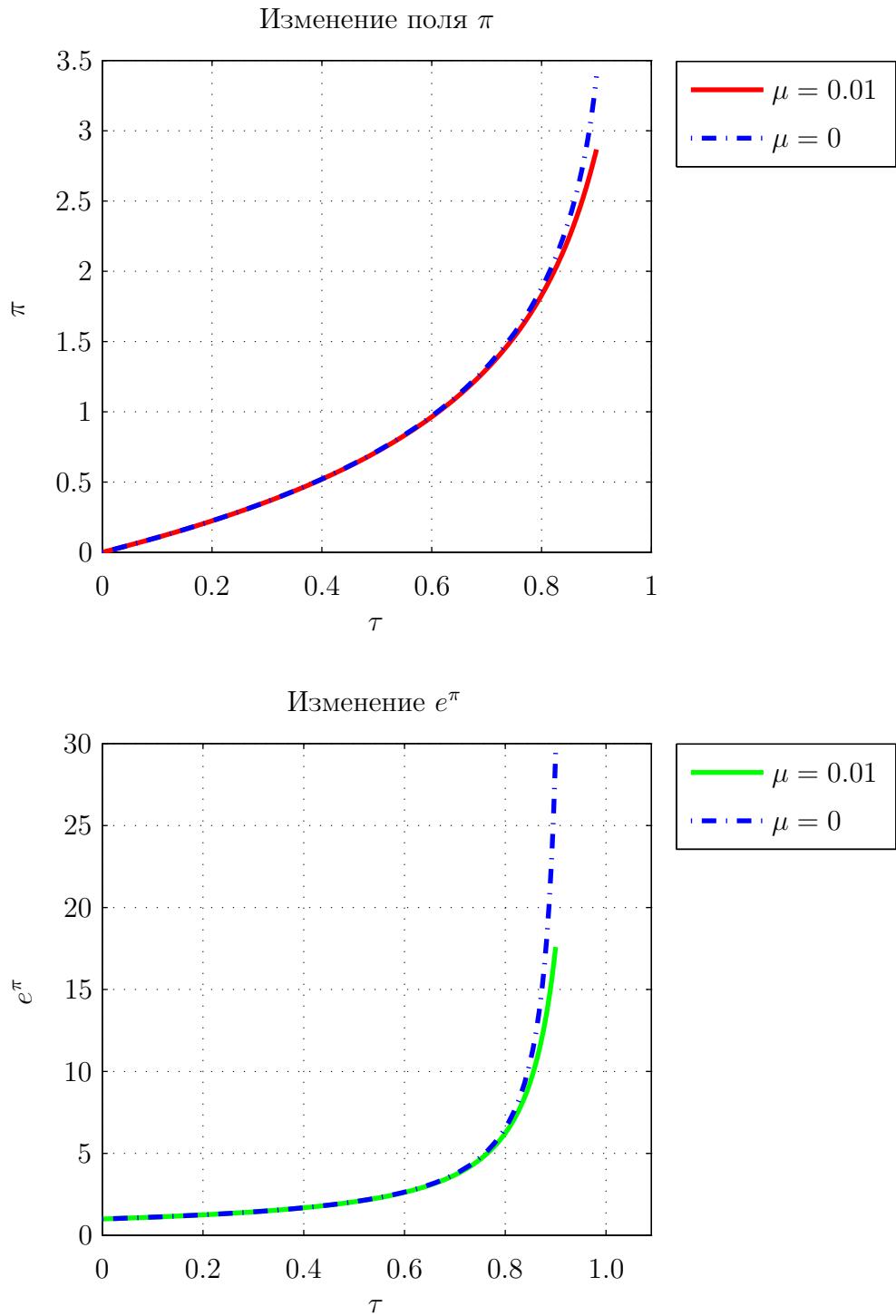


Рис. 4.2: Эволюция Вселенной. Скалярное поле.

# Глава 5

## Заключение

В курсовой работе была рассмотрена космологическая модель Вселенной с нарушением NEC. Для такой Вселенной был введён лагранжиан (2), из которого были найдены:

- 1 уравнение поля (2);
- 2 выражение для тензора энергии-импульса (3.1);
- 3 формула для плотности энергии материи (3.2);
- 4 формула для давления материи (3.2);
- 5 уравнения Фридмана (3.2).

Все полученные соотношения образуют замкнутую систему уравнений, описывающую эволюцию Вселенной. С помощью численного компьютерного расчёта было получено графическое решение системы. Графики наглядно демонстрируют нарушение NEC ( $\dot{H} \gg H$ ) при временах  $t \rightarrow t_0$ .

В продолжение данной работы планируется исследовать проблему сингулярности параметра Хаббла при временах  $t \rightarrow t_0$  и построить картину эволюции Вселенной при временах  $t > t_0$ . Также планируется найти аналитическое решение системы уравнений, описывающих динамику Вселенной с нарушением NEC.

# Приложение. Описание программы

Для написания программы в курсовой работе использовался пакет прикладных программ для решения задач, технических вычислений и одноимённый язык программирования “MATLAB” (MATLAB 7.11.0.584 R2010b). Выбор этого пакета и среды программирования был обусловлен большими возможностями математического оперирования и относительной простотой решения систем дифференциальных уравнений.

Начнём рассмотрение программы с m-файла, содержащего в себе описание системы дифференциальных уравнений, которые требуется решить. Полученные в результате решения системы значения  $\pi$  и  $p$  записываются программой в двумерный массив  $x(:,:,)$ , при этом значениям  $\pi$  отвечает одномерный массив  $x(:,1)$ , а значениям  $p$  – массив  $x(:,2)$ .

```
dip.m
function dxp=difp(~,x) %функция для описания и решения
    %системы дифф. уравнений

global mu %используется глобальная переменная
    %mu, которая задаётся в файле
    %"variables.m"

%далее идёт описание функций, входящих в систему;

%здесь x(1) - пи; x(2) - p; Hu - параметр Хаббла H

%mu - константа, определённая в файле variables.m

%F(Y), F1(Y), F2(Y) - соответственно F(Y), F'(y), F''(Y), заданные в
%соответствующих файлах (аналогично G(Y), G1(Y), G2(Y))

%функции E, K1, K2, D, chisl, znam введены для сокращения записи

Y=exp(-2*x(1))*x(2);
E=8*pi*mu*mu/3*(2*G1(Y)*x(2)*x(2)*x(2)*x(2)+2*x(2)*x(2)*(F1(Y)...
-G(Y))*exp(2*x(1))-F(Y)*exp(4*x(1)));
K1=8*pi*mu*mu*G1(Y)*x(2)*x(2)*x(2);
K2=sqrt(64*pi*pi*mu*mu*mu*mu*G1(Y)*x(2)*x(2)*x(2)*x(2)*x(2)+E);
D=-64*pi*pi*mu*mu*mu*mu*G1(Y)*G1(Y)*x(2)*x(2)*x(2)*x(2)*x(2)*x(2)...
```

```

-K1*K2-8*pi*mu*mu*(F(Y)*exp(4*x(1))-2*G(Y)*exp(2*x(1))*x(2)*x(2));
Hu=K1+K2;
chisl=4*exp(4*x(1))*F(Y)-6*exp(2*x(1))*x(2)*x(2)*F1(Y)...
-6*Hu*exp(2*x(1))*F1(Y)*x(2)+12*Hu*exp(2*x(1))*G(Y)*x(2)...
-12*Hu*x(2)*x(2)*x(2)*G1(Y)-6*D*G1(Y)*x(2)*x(2)...
+12*G2(Y)*Hu*exp(-2*x(1))*x(2)*x(2)*x(2)*x(2)*x(2)-12*Hu*Hu*x(2)*x(2)*G1(y)...
+4*G2(Y)*exp(-2*x(1))*x(2)*x(2)*x(2)*x(2)*x(2)*x(2)-4*G1(Y)*x(2)*x(2)*x(2)...
*x(2)...
+4*G(Y)*exp(2*x(1))*x(2)*x(2)+4*F2(Y)*x(2)*x(2)*x(2)*x(2);
znam=4*F2(Y)*x(2)*x(2)+2*exp(2*x(1))*F1(Y)-4*exp(2*x(1))*G(Y)+4*x(2)*x(2)...
*G1(Y)...+12*Hu*G2(Y)*exp(-2*x(1))*x(2)*x(2)*x(2)...
+12*Hu*x(2)*G1(Y)+4*G2(Y)*exp(-2*x(1))*x(2)*x(2)*x(2)*x(2)...
+96*pi*mu*mu*G1(Y)*G1(Y)*x(2)*x(2)*x(2)*x(2);
dxp=[x(2);chisl/znam]; %задание системы дифф. уравнений
end

```

В программе созданы функции  $F(Y)$ ,  $F1(Y)$ ,  $F2(Y)$ , в которых описываются функции  $F(Y)$ ,  $F'(Y)$ ,  $F''(Y)$  соответственно. Аналогично созданы функции  $G(Y)$ ,  $G1(Y)$ ,  $G2(Y)$  для описания функций  $G(Y)$ ,  $G'(Y)$ ,  $G''(Y)$ . Рассмотрим, например, m-файл, в котором описывается функция  $F(Y)$

F.m:

```

function result=F(Y) %описание функции F(Y)
global a b
result=-b.*Y+a.*Y.*Y;
end

```

Операция “.” здесь используется для почлененного умножения элементов массива. В рассмотренном примере функция  $F(Y)$  задана как квадратный многочлен относительно переменной  $Y$ , естественно, что в функции в m-файле “F.m” функцию  $F(Y)$  можно описать абсолютно произвольным образом. Точно так же в программе заданы функции  $F1(Y)$ ,  $F2(Y)$  и  $G(Y)$ ,  $G1(Y)$ ,  $G2(Y)$ .

После решения системы программы, как говорилось выше, создаёт двумерный массив, содержащий в себе значения  $\pi$  и  $r$  в зависимости от времени. Для построения графика зависимости параметра Хаббла от времени также необходимо найти аналогичный одномерный массив значений параметра Хаббла. Для этого в программе предусмотрена следующая функция

```

fHu.m:
function dxHu=fHu(x) %функция для нахождения массива
    %значений параметра Хаббла в
    %зависимости от времени
global mu
Y=exp(-2*x(:,1)).*x(:,2);

```

```

E=8*pi*mu*mu/3*(2*G1(Y).*x(:,2).*x(:,2).*x(:,2).*x(:,2)+2*x(:,2)...
*x(:,2).*(F1(Y)-G(Y)).*exp(2*x(:,1))-F(Y).*exp(4*x(:,1)));
K1=8*pi*mu*mu*G1(Y).*x(:,2).*x(:,2).*x(:,2);
K2=sqrt(64*pi*pi*mu*mu*mu*mu*G1(Y).*x(:,2).*x(:,2).*x(:,2)...
*x(:,2).*x(:,2)+E);
dxHu=K1+K2;
end

```

Все входящие в уравнения переменные, которые задаёт пользователь программы, находятся в отдельно m-файле

**variables.m:**

```

%м-файл для описания переменных
global a b mu H t0 t1 t2 p1 p2;
a=0.5/3;
b=0.5;
mu=0.1;
H=sqrt(fzero('FG',1)); %вычисления значения
                         %H*, входящего в
                         %задание начальных условий
                         %с помощью функции FG

t0=1; %задание параметра t0,
       %определяющего временной сдвиг

t1=0;    %задание временного
t2=0.9;  %интервала интегрирования

p1=-log(H*t0); %задание начальных значений
p2=1/(H*t0);   %здесь p1 - пи(0); p2 - р(0)

```

Наконец, в программе создан m-файл, который задаёт программе начальные условия, полученные из файла “variables.m”, и вызывает остальные функции для нахождения всех необходимых для построения графиков неизвестных величин.

**solving.m:**

```

variables; %вызов функции, задающей переменные
t=[t1 t2]; %интервал интегрирования
x0=[p1 p2]; %начальные условия
mu=0.01 %решение при mu=0.01
[t,x]=ode45('difp',t,x0); %решение системы
                           %дифф. уравнений

mHu=fHu(x); %создание массива значений

```

```

%параметра Хаббла
%в зависимости от времени
exppi=exp(x(:,1)); %создание массива значений
                    %e^пи в зависимости от времени
p=x(:,1); %создание массива значений
            %пи в зависимости от времени
variables;
mu=0 %аналогично для решения при mu=0
to=[t1 t2];
x0=[p1 p2];

[to,x]=ode45('difp',to,x0);

exppi0=exp(x(:,1));

p0=x(:,1);
plots;

```

В программе также создан м-файл “plots.m”, отвечающий за построение графиков.

# Литература

- [1] Горбунов Д. С., Рубаков В. А. *Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего Большого взрыва*. Учеб. пособ.: Для вузов – М.: ЛКИ, ИЯИ РАН, 2006. - 464 с. – ISBN: 978-5-382-00657-4
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика*: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т.II. *Теория поля* / Под ред. Л. П. Питаевского. – 8-е изд., стереотип. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012 – 536 с. – ISBN 978-5-9221-0056-4 (Т.II)
- [3] Рубаков В. А. *Классические калибровочные поля*. Учеб. пособ.: Для вузов. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 336 с. – ISBN: 5-8360-0003-4
- [4] Степаньянц К. В. *Классическая теория поля*. Учеб. пособ.: Для вузов – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 540 с. – ISBN: 978-5-9221-1082-2
- [5] Поршнев С. В. *Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB*. Учеб. пособ.: Для вузов. Спец. лит. – 2-е изд., испр. – СПБ.: Лань, 2011 – 736 с. – ISBN 978-5-8114-1063-7
- [6] P. Creminelli, K. Hinterbichler, J. Khoury, E. Trincherini *Subluminal Galilean Genesis*, JHEP **1302** (2013) 006, arXiv:hep-th/1209.3768
- [7] P. Creminelli, A. Nicolis, E. Trincherini *Galilean Genesis: an alternative to inflation*, JCAP **1011** (2010) 021, arXiv:hep-th/1007.0027