

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Физический факультет

Кафедра физики частиц и космологии

КУРСОВАЯ РАБОТА

ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК В  
НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

студента 209-й группы Копчинского Ильи Дмитриевича

Научный руководитель

к.ф.-м.н. н.с. ОТФ ИЯИ РАН Пётр Сергеевич Сатунин

Москва 2020

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
1.1	Обзор	2
1.2	Краткое содержание	2
<b>2</b>	<b>Теоретическая часть</b>	<b>2</b>
2.1	Уравнения электромагнитного поля	2
2.2	Поправки к уравнениям Максвелла	4
2.3	Новые волновые уравнения	5
2.4	Линейно растущая сигнальная мода	6
2.5	Поиск высших гармоник	8
2.5.1	В параллелепипеде	10
2.5.2	В цилиндре	11
<b>3</b>	<b>Практическая часть</b>	<b>14</b>
3.1	Наглядная иллюстрация	14
3.2	Расчёт сигнальных мод в параллелепипеде	15
<b>4</b>	<b>Основные итоги</b>	<b>15</b>

## 1 Введение

### 1.1 Обзор

В конце XIX века Джеймс Клерк Максвелл обобщил накопленные к тому времени экспериментальные данные об электромагнитном взаимодействии и сформулировал свою знаменитую систему уравнений, претерпевшую впоследствии лишь формальные изменения и ставшую основой классической электродинамики. Однако любая система получает в своё название добавку "классический", когда появляются новые теоретические построения, расширяющие область её применимости путём введения специфических поправок, регистрация которых возможна, как правило, лишь на пределе точности новейших измерительных приборов. Электродинамика, построенная на уравнениях Максвелла, стала "классической" в середине XX века, когда в работах Фейнмана, Швингера, Томонаги, Дайсона и др. получила развитие квантовая электродинамика (КЭД). С тех пор многие её предсказания не раз подтверждались экспериментально, в частности фотон-фотонное рассеяние, невозможное с точки зрения классической теории. Однако до сих пор не было зарегистрировано взаимодействие реальных фотонов частотой порядка  $10^9$  герц, проявление которого описывается лагранжианом Эйлера-Гейзенберга. На современном этапе технического развития появилась практическая возможность поставить соответствующий эксперимент, и данная работа преследует цель изучить теоретические основы такого опыта, а также провести численное моделирование его упрощённых частных случаев.

### 1.2 Краткое содержание

Отправной точкой работы является лагранжиан Эйлера-Гейзенберга, принимаемый как данность. Далее используется принцип наименьшего действия для получения уравнений электромагнитного поля. Затем полученные уравнения сравниваются с максвелловскими, в результате чего вводятся поправки к последним: поляризация и магнетизация вакуума. После этого выводятся скорректированные волновые уравнения, и рассматриваются возможности регистрации их нелинейного поведения. Для этого ищется резонансное решение волновых уравнений, а затем применяется метод функции Грина. В практической части работы осуществляется численное моделирование упрощённого эксперимента по разностной схеме, а также расчёт неклассического поведения поля средствами языка программирования Fortran с использованием технологий MPI и OpenMP.

## 2 Теоретическая часть

### 2.1 Уравнения электромагнитного поля

Знаковым отличием КЭД от классической теории является корпускулярно-волновая трактовка электромагнитного поля, позволяющая рассматривать его на мельчайших масштабах, где сказываются квантовые эффекты. Например, учитывается способность фотонов рождать виртуальные электрон-позитронные пары и через них взаимодействовать друг с другом. Время жизни такой пары мало и имеет характерный

масштаб времён электромагнитного взаимодействия  $10^{-18}$  с. Однако в достаточно сильных полях вероятность этого процесса перестаёт быть пренебрежимо малой, что приводит к появлению нелинейной динамики электромагнитного поля даже в вакууме. Для её описания обратимся к лагранжиану, полученному Гансом Эйлером и Вернером Гейзенбергом в 1936 году (в ином виде):

$$L = -\frac{1}{4}\varepsilon_0 f + \kappa \varepsilon_0^2 \left( f^2 + \frac{7}{4}g^2 \right),$$

где используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f &= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2(E^2 - c^2B^2) \text{ — первый инвариант электромагнитного поля, } [f]_{\text{СИ}} = \frac{\text{кг}^2\text{м}^2}{\text{А}^2\text{с}^6} \\ g &= F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -4(\mathbf{E}, c\mathbf{B}) \text{ — второй инвариант электромагнитного поля, } [g]_{\text{СИ}} = [f]_{\text{СИ}} \\ F^{\mu\nu} &= c(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & +cB_y \\ E_y & +cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & +cB_x & 0 \end{pmatrix} \text{ — тензор электромагнитного поля,} \\ \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -cB_x & -cB_y & -cB_z \\ cB_x & 0 & +E_z & -E_y \\ cB_y & -E_z & 0 & +E_x \\ cB_z & +E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \text{ — дуальный ему тензор,} \\ A^\nu &\text{ — 4-потенциал электромагнитного поля, } \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \text{ — четырёхмерный символ Лёви-Чивиты,} \\ \varepsilon_0 &\approx 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{А}^2\text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} \text{ — электрическая постоянная,} \\ \kappa &= \frac{2\alpha_e^2\hbar^3}{45m_e^4c^5} \approx 1.66 \cdot 10^{-30} \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}} \text{ — специальный размерный множитель,} \\ \alpha_e &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \text{ — постоянная тонкой структуры.} \end{aligned}$$

Чтобы избежать излишней сложности, промежуточные выкладки будем производить в естественной системе единиц, в которой масса электрона, приведённая постоянная Планка и скорость света полагаются безразмерными и равными единице:  $m_e = 1$ ,  $\hbar = 1$ ,  $c = 1$ . Это упрощает не только запись констант, но и вид инвариантов и тензора электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} f &= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2(E^2 - H^2), \\ g &= F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -4(\mathbf{E}, \mathbf{H}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & +H_y \\ E_y & +H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & +H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & +E_z & -E_y \\ H_y & -E_z & 0 & +E_x \\ H_z & +E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Отметим, что для возврата в СИ в выражениях (1) и (2) следует заменить  $H \rightarrow cB$ .

Итак, рассмотрим лагранжиан Эйлера-Гейзенберга, произведя в нём незначительное обобщение — заменив числовые коэффициенты буквенными  $\alpha$  и  $\beta$ . В исходном лагранжиане выполняется  $\beta/\alpha = 7/4$ , но в других теориях, предполагающих наличие новых тяжёлых частиц, слабо взаимодействующих с электромагнитным полем, (например, аксионы и аксиоподобные частицы), отношение  $\beta/\alpha$  отличается. В итоге, отправной точкой будет служить следующий лагранжиан:

$$L = -\frac{1}{4}f + \alpha f^2 + \beta g^2. \quad (3)$$

При сравнении (3) с исходным лагранжианом возникает ещё несколько правил возврата в СИ:  $f \rightarrow \varepsilon_0 f$ ,  $g \rightarrow \varepsilon_0 g$ ,  $\alpha \rightarrow \kappa$ ,  $\beta \rightarrow \kappa \frac{\beta}{\alpha}$ .

По определению лагранжиан есть подынтегральная функция в выражении, дающем *действие* соответствующей физической системы, и, в частности, действие электромагнитного поля в вакууме, без зарядов и токов:

$$S = \int L d\Omega = \int \left( -\frac{1}{4}f + \alpha f^2 + \beta g^2 \right) d\Omega.$$

Здесь интегрирование производится по четырёхмерному пространству-времени, а значит интеграл на самом деле четырёхкратный и может быть сведён к повторным интегралам, что пригодится в дальнейшем.

Для получения уравнений, описывающих поведение электромагнитного поля, пойдём хрестоматийным путём из [1, сс. 108–109], прибегнув к варьированию действия и инвариантов поля:

$$\delta S = \int \left( -\frac{1}{4}\delta f + 2\alpha f\delta f + 2\beta g\delta g \right) d\Omega, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \delta f &= \delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = (\delta F_{\mu\nu})F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}(\delta F^{\mu\nu}) = 2F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} = \\ &= 2F^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 2F^{\mu\nu}\partial_\mu\delta A_\nu + 2F^{\nu\mu}\partial_\nu\delta A_\mu = 4F^{\mu\nu}\partial_\mu\delta A_\nu, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \delta g &= (F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}) = (\delta F_{\mu\nu})\tilde{F}^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}(\delta\tilde{F}^{\mu\nu}) = \tilde{F}^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\delta F_{\alpha\beta} = \\ &= \tilde{F}^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}\delta F_{\mu\nu} = 2\tilde{F}^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} = 4\tilde{F}^{\mu\nu}\partial_\mu\delta A_\nu. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь подставим (6) и (5) в (4):

$$\delta S = \int \left( -F^{\mu\nu} + 8\alpha fF^{\mu\nu} + 8\beta g\tilde{F}^{\mu\nu} \right) \partial_\mu\delta A_\nu d\Omega.$$

Далее проинтегрируем по частям, сводя четырёхмерный интеграл к повторному  $d\Omega = dx^\mu dS_\mu$ :

$$\begin{aligned} \delta S &= \iiint \left( -F^{\mu\nu} + 8\alpha fF^{\mu\nu} + 8\beta g\tilde{F}^{\mu\nu} \right) \frac{\partial(\delta A_\nu)}{\partial x^\mu} dx^\mu dS_\mu = \\ &= \int \left( -F^{\mu\nu} + 8\alpha fF^{\mu\nu} + 8\beta g\tilde{F}^{\mu\nu} \right) \delta A_\nu \Big|_{x_0^\mu}^{x_1^\mu} dS_\mu - \\ &- \iiint \frac{\partial \left( -F^{\mu\nu} + 8\alpha fF^{\mu\nu} + 8\beta g\tilde{F}^{\mu\nu} \right)}{\partial x^\mu} \delta A_\nu dx^\mu dS_\mu \end{aligned}$$

Уменьшаемое в последнем выражении зануляется на пределах интегрирования по  $x^\mu$ : если  $\mu = 0$  (интегрирование по временной оси), то  $\delta A(t_0) = \delta A(t_1) = 0$ , а если  $\mu = 1, 2, 3$  (интегрирование по пространственной оси), то  $F_{\mu\nu}(\pm\infty) = 0$ . Значит, остаётся только вычитаемое:

$$\delta S = - \int \partial_\mu \left( -F^{\mu\nu} + 8\alpha fF^{\mu\nu} + 8\beta g\tilde{F}^{\mu\nu} \right) \delta A_\nu d\Omega$$

Согласно принципу наименьшего действия  $\delta S \equiv 0$  при всех  $\delta A_\nu$ , откуда необходимо следуют 4 уравнения электромагнитного поля (при  $\nu = 0, 1, 2, 3$ ):

$$\partial_\mu \left( F^{\mu\nu} - 8\alpha fF^{\mu\nu} - 8\beta g\tilde{F}^{\mu\nu} \right) = 0 \quad (7)$$

## 2.2 Поправки к уравнениям Максвелла

Для получения скорректированных уравнений Максвелла осталось совершить переход к трёхмерной форме уравнений (7). Для этого обратимся к покомпонентной записи (2) тензора электромагнитного поля. Подставим  $\nu = 0$  в (7) и свернём по  $\mu = 0, 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} - 8\alpha \operatorname{div}(f\mathbf{E}) - 8\beta \operatorname{div}(g\mathbf{H}) &= 0, \\ \operatorname{div}(\mathbf{E} - 8\alpha f\mathbf{E} - 8\beta g\mathbf{H}) &= 0, \\ \operatorname{div}(\mathbf{E} + (-8\alpha f\mathbf{E} - 8\beta g\mathbf{H})) &= 0, \\ \operatorname{div}(\mathbf{E} + \mathbf{P}) &= 0. \end{aligned}$$

Проводя аналогию между вакуумом и материальной средой, целесообразно сохранить внешний вид уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$  (отсутствие в вакууме объёмных зарядов), введя *поляризацию вакуума* так же, как и в материальной среде:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}, \text{ где} \quad (8)$$

$$\mathbf{P} = 16 \left[ \alpha (E^2 - H^2) \mathbf{E} + 2\beta (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \mathbf{H} \right]. \quad (9)$$

Далее подставим в (7)  $\nu = 1, 2, 3$ , сворачивая по  $\mu = 0, 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{H} + 8\alpha \frac{\partial(f\mathbf{E})}{\partial t} - 8\alpha \operatorname{rot}(f\mathbf{H}) + 8\beta \frac{\partial(g\mathbf{H})}{\partial t} + 8\beta \operatorname{rot}(g\mathbf{E}) &= 0, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{H} - 8\alpha f\mathbf{H} + 8\beta g\mathbf{E}) &= \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} - 8\alpha f\mathbf{E} - 8\beta g\mathbf{H}), \\ \operatorname{rot}(\mathbf{H} + \mathbf{M}) &= \frac{\partial(\mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t}. \end{aligned}$$

Используя уже введённую поляризацию вакуума, сохраним вид теоремы о циркуляции магнитного поля  $\text{rot} \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ , определив *магнетизацию вакуума* так же, как и в материальной среде:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M}, \text{ где} \quad (10)$$

$$\mathbf{M} = 16 [\alpha (E^2 - H^2) \mathbf{H} - 2\beta(\mathbf{E}, \mathbf{H})\mathbf{E}]. \quad (11)$$

Обратимся теперь к теореме Гаусса для магнитного поля и закону электромагнитной индукции Фарадея. Эта пара уравнений остаётся неизменной для напряжённостей полей, так как они выводятся из общего вида тензора электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \text{ следовательно:} \\ \partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0 \quad \forall \xi, \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\},$$

откуда подстановками всевозможных троек индексов  $\mu, \nu, \xi$  получаются соотношения, из которых составляются два векторных уравнения:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (12)$$

$$\text{div} \mathbf{H} = 0. \quad (13)$$

Начнём постепенно возвращаться в СИ. Для этого применим указанные ранее правила возврата в СИ к определениям (9) и (11), помня о том, что в СИ первичны векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — силовые характеристики полей, из-за чего придётся поменять  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  ролями. Стремясь сохранить классические определения вспомогательных векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$ , получим несколько другие определения поляризации и магнетизации вакуума:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \text{ где } \mathbf{P} = 16\kappa\varepsilon_0^2 \left[ (E^2 - c^2 B^2) \mathbf{E} + 2\frac{\beta}{\alpha}(\mathbf{E}, c\mathbf{B})c\mathbf{B} \right], \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \text{ где } \mathbf{M} = -c \cdot 16\kappa\varepsilon_0^2 \left[ (E^2 - c^2 B^2) c\mathbf{B} - 2\frac{\beta}{\alpha}(\mathbf{E}, c\mathbf{B})\mathbf{E} \right].$$

В таких обозначениях система полевых уравнений Максвелла в вакууме без зарядов и токов сохраняет свой вид и в системе СИ:

$$\text{div} \mathbf{D} = 0, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0, \\ \text{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

## 2.3 Новые волновые уравнения

Принимая во внимание способность вакуума к поляризации и магнетизации, можно вывести скорректированные волновые уравнения для электрического и магнитного полей. Для этого повторим классический подход из [2, с. 14], применив его к уравнениям с поправками (в естественной системе единиц):

$$\text{rot} \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \text{rot rot} \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{D}, \\ \text{rot rot}(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\mathbf{E} + \mathbf{P}), \\ \text{grad div} \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H} = -\text{rot rot} \mathbf{M} + \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{P}, \\ \text{grad div} \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{E} = -\text{rot rot} \mathbf{M} + \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{P}.$$

Используем первую пару уравнений Максвелла:

$$\text{grad}(\mathbf{0}) - \Delta \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\text{rot rot} \mathbf{M} + \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{P}, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{H} = -\text{rot rot} \mathbf{M} + \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{P}.$$

Аналогично получим волновое уравнение для напряжённости электрического поля:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}(\mathbf{B} - \mathbf{M}), \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{D} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{P} - \Delta \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{M}.\end{aligned}$$

Используем вторую пару уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\mathbf{0}) - \Delta \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{M} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{P}, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{E} + \mathbf{P}) - \Delta \mathbf{E} &= \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{M} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{P}, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{E} &= -\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{P} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{M}.\end{aligned}$$

Итак, с учётом поправок волновые уравнения принимают следующий вид:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{M} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{P} - \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (14)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{P} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{M} + \Delta \mathbf{M}. \quad (15)$$

Можно обратить внимание на то, что некоторая симметрия в новых волновых уравнениях всё же присутствует:  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$  входят в них зеркальным образом, разве что вторая производная поляризации по времени заменяется на лапласиан магнетизации, играющий роль второй производной “по пространству”.

Чтобы продолжить возвращение в СИ, можно провести совершенно аналогичный вывод волновых уравнений, но для других определений поправок, приведенных в конце предыдущего раздела. В результате получатся и несколько другие волновые уравнения:

$$\begin{aligned}\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{E} &= -\mu_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{M} - c^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{P} + \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \right), \\ \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{B} &= +\mu_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{P} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{M} - \Delta \mathbf{M} \right).\end{aligned}$$

## 2.4 Линейно растущая сигнальная мода

Заметим, что в случае плоской волны  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \Rightarrow g = 0$ , а также  $E^2 = H^2 \Rightarrow f = 0$ , поэтому в соответствии с (9)  $\mathbf{P} = 0$ , и согласно (11)  $\mathbf{M} = 0$ . Тогда:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{E} = 0, \quad (16)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{H} = 0. \quad (17)$$

Значит, волновые уравнения принимают классический вид и, следовательно, не могут привести к появлению нелинейной динамики в вакууме. Поэтому экспериментальный интерес представляет собой случай неплюской волны достаточно большой амплитуды, способной проявить своё нелинейное поведение в масштабе, доступном регистрации современными приборами. Для наглядной оценки требуемых амплитуд обратимся вновь к исходному лагранжиану:

$$L = L_0 + L_{EH} = -\frac{1}{4} \varepsilon_0 f + \varkappa \varepsilon_0^2 \left( f^2 + \frac{7}{4} g^2 \right).$$

Так как вся нелинейность сокрыта во втором слагаемом, хотелось бы достичь такой амплитуды электромагнитных колебаний, при которой  $L_{EH}$  перестает быть бесконечно малым в сравнении с классическим первым слагаемым  $L_0$ . Оценим отношение второго слагаемого к первому:

$$\frac{L_{EH}}{L_0} \sim \frac{\varkappa \varepsilon_0^2 (f^2 + \frac{7}{4} g^2)}{\frac{1}{4} \varepsilon_0 f} \sim \frac{\varkappa \varepsilon_0 (f^2 + g^2)}{f} \sim \varkappa \varepsilon_0 (c B_0)^2, \text{ где } B_0 \text{ — амплитуда магнитной индукции поля.}$$

Для примерной оценки можно использовать характерную предельную величину магнитной индукции в ниобиевых сверхпроводящих резонаторах  $B_0 \sim 0.15$  Тл (см. [9]):

$$\frac{L_{EH}}{L_0} \sim \kappa \varepsilon_0 (cB_0)^2 \sim 10^{-26}.$$

Это говорит о том, что даже при использовании в качестве детекторов микропиксельных лавинных фотодиодов (счётчиков единичных фотонов с коэффициентом усиления порядка  $10^8$  согласно [7]), нелинейные эффекты будут не более чем шумом *по сравнению* с классическими колебаниями. Следовательно, эксперимент должен избегать сравнения полей, при котором порождаемое нелинейное поведение затмевается полем порождающим. Идея такого опыта может заключаться в исследовании электромагнитных колебаний в резонаторе, обладающим максимально возможной добротностью (чем сильнее поля, тем больше проявляется нелинейность), а также имеющим специальную геометрию, подавляющую порождающее поле в месте расположения детектора.

При рассмотрении электромагнитных колебаний в резонаторе речь идёт в первую очередь о его *собственных* колебаниях, как о наиболее устойчивых. Поэтому будем называть порождающие классические электромагнитные колебания *модами накачки*, а порождаемые нелинейные колебания — *сигнальными модами*. Таким образом, преследуются две цели:

- максимально усилить сигнальные моды (желательно без сопутствующего усиления мод накачки),
- как можно дальше разнести сигнальные моды и моды накачки друг от друга по частоте.

В этом разделе попробуем решить первую задачу. Как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, возможно явление резонанса, если в правую часть неоднородного уравнения входит решение однородного (то есть система возбуждается на собственной частоте). Сначала рассмотрим простейший случай, в котором моды накачки выбраны так, что в правой части нелинейного волнового уравнения оказалось какое-либо решение однородной задачи:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) E^{sig} = A \sin(\omega x) \cos(\omega t). \quad (18)$$

Уравнение (18) записано исключительно для сигнальной моды  $E^{sig}$ , в то время как моды накачки рассматриваются сами по себе в рамках классической теории. Такое разделение возможно на основании малости поправок:  $E^{total} = E^{pump} + E^{sig} \simeq E^{pump}$ . Оказывается, частным решением (18) является мода с линейно нарастающей во времени амплитудой:

$$E^{sig} = \frac{A}{2\omega} t \cdot \sin(\omega x) \sin(\omega t).$$

Убедимся в этом, проведя соответствующие подстановки:

$$\frac{\partial^2 E^{sig}}{\partial t^2} = \frac{A}{2\omega} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sin(\omega x) \sin(\omega t) + t\omega \cdot \sin(\omega x) \cos(\omega t) \right) = A \sin(\omega x) \cos(\omega t) - \frac{A\omega}{2} t \cdot \sin(\omega x) \sin(\omega t), \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 E^{sig}}{\partial x^2} = \frac{A}{2\omega} \frac{\partial}{\partial x} \left( t\omega \cdot \cos(\omega x) \sin(\omega t) \right) = -\frac{A\omega}{2} t \cdot \sin(\omega x) \sin(\omega t). \quad (20)$$

Вычитая (20) из (19), получаем требуемое уравнение (18). Данный пример обобщается, очевидно, и на трёхмерный случай. Итак, если решение волнового уравнения линейно входит в правую часть такого же уравнения, то стоит ожидать появления сигнальной моды, чья амплитуда будет линейно нарастать со временем. На практике, конечно, этот рост будет ограничен неизбежными потерями, однако он благоприятствует регистрации такой сигнальной моды, так как усиливает её без сопутствующего усиления моды накачки, к чему мы и стремимся.

В ходе работы была исследована следующая трёхмерная конфигурация мод накачки, являющаяся частным случаем собственных колебаний прямоугольного резонатора (см. [3, с. 162]):

$$\begin{aligned} E_x &= 0, & E_z &= +E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cdot \sin(\omega t), & E_0 &= \sqrt{2}cB_0, \\ E_y &= 0, & B_x &= +B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cdot \cos(\omega t), & a &= \sqrt{2}c \frac{\pi}{\omega}. \\ B_z &= 0, & B_y &= -B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cdot \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (21)$$

Параметры имеют следующий физический смысл:  $E_0, B_0$  — амплитуды напряжённости электрического поля и магнитной индукции соответственно,  $a$  — длина стороны параллелепипеда вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  (квадратное основание),  $\omega$  — циклическая частота колебаний. Нетрудно убедиться в том, что такие моды

накачки удовлетворяют классическим уравнениям Максвелла и обычным волновым уравнениям, а также граничному условию резонатора с идеально проводящими стенками  $(\mathbf{E}, \boldsymbol{\tau}) = 0$ , где  $\boldsymbol{\tau}$  — касательный вектор к поверхности параллелепипеда. Кроме того, они удовлетворяют ещё условию  $(\mathbf{B}, \mathbf{n}) = 0$ , где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности параллелепипеда. Единственной занятой особенностью данной конфигурации является тот факт, что она явно не зависит от длины третьей стороны параллелепипеда (вдоль оси  $Oz$ ). Конечно, длина третьей стороны всё же накладывает ограничение на амплитудное значение напряжённости электрического поля  $E_0$ . Тем не менее независимость полей от координаты  $z$  сильно упрощает их анализ, особенно численное моделирование.

В данной конфигурации поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  взаимно перпендикулярны, вследствие чего инвариант  $g = 0$ . Однако этого уже не скажешь про инвариант  $f$ :

$$f = -2(E^2 - c^2 B^2) = -E_0^2 \left( 2 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{a} \right) \sin^2 \left( \frac{\pi y}{a} \right) - \cos^2(\omega t) \left[ \sin^2 \left( \frac{\pi x}{a} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi y}{a} \right) \right] \right).$$

Тогда, в соответствии с определениями (9) и (11), ненулевыми окажутся и нелинейные поправки:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= +16\kappa\varepsilon_0^2(E^2 - c^2 B^2)\mathbf{E} \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{M} &= -16\kappa\varepsilon_0^2(E^2 - c^2 B^2)c^2 \mathbf{B} \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Если теперь подставить<sup>1</sup> эти поправки в правые части скорректированных волновых уравнений (14), (15) для сигнальной моды, то в них как раз проявится *линейное вхождение* мод накачки:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) E_z^{sig} &= -24\varepsilon_0\kappa \cdot B_0^2 \omega^2 \cdot E_z + \dots \\ \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) B_x^{sig} &= +48\varepsilon_0\kappa \cdot B_0^2 \omega^2 \cdot B_x + \dots \\ \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) B_y^{sig} &= +48\varepsilon_0\kappa \cdot B_0^2 \omega^2 \cdot B_y + \dots \end{aligned}$$

Следовательно, рассмотренная конфигурация обеспечивает линейный рост функций  $E_z^{sig}, B_x^{sig}, B_y^{sig}$  и тем самым помогает достичь первой цели — усиления сигнальных мод без сопутствующего увеличения амплитуды мод накачки. На практике линейный рост будет неизбежно ограничен потерями в резонаторе. Продолжая пример (18), оценим максимальное значение амплитуды, которого достигнет мода  $E^{sig}$ , чей линейный рост ограничен диссипациями с коэффициентом затухания  $\delta$ :

$$E^{sig} \sim \frac{A}{2\omega} \cdot te^{-\delta t}, \quad \frac{\partial}{\partial t} (te^{-\delta t}) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\delta}, \quad \max E^{sig} \sim \frac{A}{2\omega\delta} \sim A \frac{Q}{\omega^2}, \quad \text{где } Q = \frac{\omega}{2\delta} \text{ — добротность.}$$

Отсюда следует, что определяющим параметром является *добротность* резонатора, которой пропорциональна пиковая амплитуда сигнальной моды. Согласно [8], на текущий момент в ниобиевых сверхпроводящих резонаторах достижимы значения добротностей  $Q \sim 10^{11}$ , накладывающие, правда, существенные ограничения на амплитуду магнитной индукции мод накачки:  $2 \cdot 10^{-5}$  Тл. Тем не менее, это ограничение можно обойти, если сигнальные моды будут отличаться по частоте от мод накачки (см. следующий раздел). В итоге, благодаря линейному нарастанию неклассическое поведение становится заметнее:

$$\frac{E_z^{sig}}{E_z} \sim c^2 \cdot \varepsilon_0 \kappa B_0^2 \omega^2 \cdot \frac{Q}{\omega^2} \sim \frac{\kappa}{\mu_0} B_0^2 Q \sim 10^{-15}.$$

Однако эффект такого масштаба всё ещё неотличим от шумов (даже при коэффициенте усиления детектора  $10^8$ ), что ещё раз подчёркивает бесперспективность попыток регистрации сигнальных мод на фоне мод накачки, особенно в одном и том же частотном диапазоне.

## 2.5 Поиск высших гармоник

В таком случае попробуем достичь второй цели — как можно дальше разнести сигнальные моды и моды накачки друг от друга по частоте. Различие в пространственных частотах позволит, например, использовать резонатор специфической геометрии, локально подавляющей моды накачки в месте расположения детектора. Различие во временных частотах можно использовать при настройке детектора, понижая его чувствительность на частоте мод накачки.

При поиске высших гармоник предпринимались попытки, аналогичные предыдущему разделу: перебирались различные конфигурации порождающих полей, далее моды накачки подставлялись в правые

<sup>1</sup>Несложные, но несколько громоздкие символьные преобразования были проведены с помощью программного пакета wxMaxima 19.09.0.



части (14) и (15), а затем проводился поиск решений (высших частот) в правых частях волновых уравнений. Вопреки ожиданиям, не удалось эмпирически подобрать моды накачки, способные породить высшую гармонику с линейно нарастающей амплитудой.

Также была предпринята попытка повторить схожие результаты, заявленные в [4]: комбинация двух мод накачки разных частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  должна порождать сигнальные моды на частотах  $2\omega_1 \pm \omega_2$  и  $2\omega_2 \pm \omega_1$ . На удивление, эта попытка также обернулась неудачей. Поэтому возникла необходимость применить более совершенный подход, основанный на методе функции Грина.

В нашем случае требуется решить начально-краевую задачу возбуждения колебаний  $u$  из нулевого состояния под воздействием поля  $f$  в резонаторе  $T$ , ограниченном поверхностью  $S$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_M \right) u(M, t) &= f(M, t) \quad \forall M = (x, y, z) \in T, \quad t > 0, \\ \forall M \in S, \quad t > 0 \quad \begin{cases} u(M, t) = 0, & \text{(для электрического поля)} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(M, t) = \mathbf{0}, & \text{(для магнитного поля)} \end{cases} \\ u(M, 0) &= 0 \quad \forall M \in T, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(M, 0) &= 0 \quad \forall M \in T. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь под функцией  $u(M, t)$  подразумевается любая компонента сигнальных мод  $\mathbf{E}^{sig}$  и  $\mathbf{B}^{sig}$ , а под функцией  $f(M, t)$  — правая часть соответствующего волнового уравнения (14) или (15). Необходимо отметить, что правые части новых волновых уравнений (14) и (15) зависят от координат и времени косвенно через поправки  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$ , являющиеся в свою очередь функциями *суммарных* полей  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{rump} + \mathbf{E}^{sig}$  и  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{rump} + \mathbf{B}^{sig}$ . К счастью, в этом случае чрезвычайная малость поправок играет нам на руку, делая справедливыми допущения  $\mathbf{E} \approx \mathbf{E}^{rump}$  и  $\mathbf{B} \approx \mathbf{B}^{rump}$ , что позволяет считать правую часть  $f(M, t)$  явной функцией координат и времени, так как моды накачки  $\mathbf{E}^{rump}$  и  $\mathbf{B}^{rump}$  известны (задаются при поиске).

Согласно методу функции Грина, описанному, например, в [5, сс. 265–267], искомую функцию  $u$  можно представить в виде:

$$u(M, t) = \int_0^t \int_T G(M, Q, t - \tau) f(Q, \tau) dV d\tau, \quad (23)$$

где дифференциал  $dV$  отвечает трёхмерному интегрированию по переменной точке  $Q$  в области  $T$ , а функция  $G(M, Q, t)$  является *функцией Грина*, определяемой, как решение более простой задачи:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta_Q \right) G(M, Q, t - \tau) &= \delta(M, Q) \cdot \delta(t, \tau) \quad \forall Q \in T, \quad \tau > 0, \\ \forall Q \in S \quad \begin{cases} G(M, Q, t - \tau) = 0, & \text{(для электрического поля)} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(M, Q, t - \tau) = \mathbf{0}. & \text{(для магнитного поля)} \end{cases} \\ G(M, Q, t - \tau) &= 0 = \frac{\partial G}{\partial t}(M, Q, t - \tau) \quad \forall Q \in T, \quad \tau \geq t. \end{aligned}$$

Можно убедиться в корректности (23) непосредственной подстановкой решения в саму задачу (22):

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_M \right) u(M, t) &= \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_M \right) \iint G(M, Q, t - \tau) f(Q, \tau) dV d\tau = \\ &= \iint f(Q, \tau) \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_M \right) G(M, Q, t - \tau) dV d\tau = \end{aligned}$$

Чтобы провести дальнейшие преобразования, обратимся к следующим свойствам функции Грина данной задачи:

$$\begin{aligned} G(M, Q, \cdot) &= G(Q, M, \cdot) \quad \Rightarrow \quad \Delta_M G(M, Q, \cdot) = \Delta_Q G(M, Q, \cdot), \\ \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}(M, Q, t - \tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left( -\frac{\partial G}{\partial t}(M, Q, t - \tau) \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(M, Q, t - \tau). \end{aligned}$$

Пользуясь её симметричностью и временной инвариантностью, продолжаем равенство:

$$= \iint f(Q, \tau) \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta_Q \right) G(M, Q, t - \tau) dV d\tau = \iint f(Q, \tau) \cdot \delta(M, Q) \delta(t, \tau) dV d\tau = f(M, t).$$

Также в [5] даётся указание к поиску функции Грина для решения задачи, аналогичной (22):

$$G(M, Q, t - \tau) = \sum_{n,m,k=0}^{\infty} \left[ \frac{\sin \sqrt{\lambda_{nmk}c}(t - \tau)}{\sqrt{\lambda_{nmk}c}} \cdot v_{nmk}(Q) \cdot v_{nmk}(M) \right], \quad (24)$$

где  $v_{nmk}(M)$  — взаимно ортогональные нормированные собственные функции лапласиана  $\Delta_M$ , отвечающие его собственным значениям  $\lambda_{nmk}$  и учитывающие граничные условия задачи (22). Это выражение для функции Грина можно объяснить, воспользовавшись уточнением из [6, сс. 289], дающим разложение  $\delta$ -функции:

$$\delta(M, Q) = \sum_{n,m,k=1}^{\infty} (v_{nmk}(Q) \cdot v_{nmk}(M)).$$

Итак, осталось получить собственные значения  $\lambda_{nmk}$  и собственные функции  $v_{nmk}$  лапласиана  $\Delta_M$  с учётом граничных условий из (22), что является вариантом задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} \Delta v(M) + \lambda \cdot v(M) &= 0 \quad \forall M \in T, \\ \forall M \in S \quad \begin{cases} v(M) = 0, & \text{(для электрического поля)} \\ \frac{\partial}{\partial n} v(M) = 0. & \text{(для магнитного поля)} \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

### 2.5.1 В параллелепипеде

Сначала рассмотрим простейший резонатор в форме параллелепипеда, для которого рационально выбрать декартову систему координат. Пусть для определённости параллелепипед имеет линейные размеры  $a, b, c$ :

$$T := \{(x, y, z) \mid x \in [0, a_1] \wedge y \in [0, a_2] \wedge z \in [0, a_3]\}$$

Будем решать задачу (25) стандартным методом разделения переменных подобно частному случаю, описанному в [6, сс. 450–452]. Опираясь на равноправность координатных осей, будем предполагать следующий вид собственных функций:

$$v(M) = v(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z). \quad (26)$$

Воспользуемся представлением лапласиана в декартовой системе координат, подставляя (26) в задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} \Delta v(M) + \lambda v(M) = 0 &\Leftrightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (X(x)Y(y)Z(z)) + \lambda \cdot X(x)Y(y)Z(z) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y(y)Z(z) \cdot X''(x) + Z(y)X(z) \cdot Y''(y) + X(x)Y(y) \cdot Z''(z) = -\lambda \cdot X(x)Y(y)Z(z). \end{aligned}$$

Так как собственные функции по определению тождественно не равны нулю, будем рассматривать точки, где можно разделить на выражение  $X(x)Y(y)Z(z) \neq 0$ :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda.$$

Правая часть является числовой константой (собственным значением) и не зависит от координат. Значит, постоянна и левая часть. Предположим, что одно из слагаемых непостоянно:

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\xi(z) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda - \xi(z) = \bar{\xi}(z).$$

Противоречие заключается в том, что сумма двух оставшихся слагаемых начинает зависеть от третьей переменной, хотя по построению это невозможно. Значит, каждое из отношений постоянно:

$$\begin{aligned} X''(x) + \nu X(x) &= 0, \\ Y''(y) + \mu Y(y) &= 0, & \nu + \mu + \xi &= \lambda. \\ Z''(z) + \xi Z(z) &= 0, \end{aligned}$$

Такое же разделение переменных возможно и для однородных граничных условий задачи Штурма-Лиувилля. Например, рассмотрим грань параллелепипеда  $g = \{M \mid M \in S \wedge x = 0\}$ :

$$\forall M \in g \quad 0 = v(M) = X(0) \cdot Y(y) \cdot Z(z), \quad Y(y) \neq 0, \quad Z(z) \neq 0 \Rightarrow X(0) = 0 \quad \text{(для электрического поля)},$$

$$\forall M \in g \quad 0 = \frac{\partial v}{\partial n}(M) = \mathbf{e}_x(X'(0) \cdot Y(y) \cdot Z(z)) \Rightarrow X'(0) = 0 \quad \text{(для магнитного поля)}.$$

Аналогично доказывается, что все граничные условия одномерных задач Штурма-Лиувилля однородные. Решением таких задач для электрического поля будут следующие наборы ортонормированных собственных функций и значений:

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{a_1}} \cdot \sin \frac{\pi n}{a_1} x & \longleftrightarrow & \quad \nu_n = \left( \frac{\pi n}{a_1} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N} \\ Y_m(y) &= \sqrt{\frac{2}{a_2}} \cdot \sin \frac{\pi m}{a_2} y & \longleftrightarrow & \quad \mu_m = \left( \frac{\pi m}{a_2} \right)^2, \quad m \in \mathbb{N} \\ Z_k(z) &= \sqrt{\frac{2}{a_3}} \cdot \sin \frac{\pi k}{a_3} z & \longleftrightarrow & \quad \xi_k = \left( \frac{\pi k}{a_3} \right)^2, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Объединение этих результатов даёт ортонормированную систему собственных функций и собственных значений оператора Лапласа в параллелепипеде (для электрического поля):

$$v_{nmk}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{a_1 a_2 a_3}} \cdot \sin \frac{\pi n}{a_1} x \cdot \sin \frac{\pi m}{a_2} y \cdot \sin \frac{\pi k}{a_3} z \quad \longleftrightarrow \quad \lambda_{nmk} = \left( \frac{\pi n}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{\pi m}{a_2} \right)^2 + \left( \frac{\pi k}{a_3} \right)^2. \quad (27)$$

В случае магнитного поля собственные функции требуется чуть-чуть видоизменить, чтобы они удовлетворяли граничным условиям первого рода. Для этого достаточно заменить все синусы на косинусы и исключить возникающее нулевое собственное значение из рассмотрения (когда  $n = m = k = 0$ ). Положительные собственные значения при  $n, m, k > 0$  одинаковы для обоих случаев.

Теперь известно всё необходимое, чтобы найти решение исходной задачи (22) в общем виде. Для этого требуется подставить последний результат (27) в выражение для функции Грина (24), которое в свою очередь использовать в формуле общего решения (23):

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{8}{a_1 a_2 a_3} \int_0^t \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \int_0^{a_3} f(x', y', z', \tau) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\sin \sqrt{\lambda_{nmk}} c(t - \tau)}{\sqrt{\lambda_{nmk}} c} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin \frac{\pi n x}{a_1} \sin \frac{\pi n x'}{a_1} \cdot \sin \frac{\pi m y}{a_2} \sin \frac{\pi m y'}{a_2} \cdot \sin \frac{\pi k z}{a_3} \sin \frac{\pi k z'}{a_3} \right] dx' dy' dz' d\tau, \quad (\text{для электрического поля}). \end{aligned} \quad (28)$$

Для магнитной компоненты сигнальной моды решение записывается аналогично, за исключением того, что числа  $n, m, k$  могут обращаться в ноль (не все одновременно). Для единообразной записи случаев, когда среди этих чисел присутствуют нули, можно прибегнуть к символам Кронекера в знаменателе:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{8}{a_1 a_2 a_3} \int_0^t \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \int_0^{a_3} f(x', y', z', \tau) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\sin \sqrt{\lambda_{nmk}} c(t - \tau)}{\sqrt{\lambda_{nmk}} c \cdot (1 + \delta_{n0})(1 + \delta_{m0})(1 + \delta_{k0})} \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos \frac{\pi n x}{a_1} \cos \frac{\pi n x'}{a_1} \cdot \cos \frac{\pi m y}{a_2} \cos \frac{\pi m y'}{a_2} \cdot \cos \frac{\pi k z}{a_3} \cos \frac{\pi k z'}{a_3} \right] dx' dy' dz' d\tau, \quad (\text{для магнитного поля}). \end{aligned} \quad (29)$$

Полученные формулы позволяют напрямую рассчитывать поведение сигнальной моды. Казалось бы, они допускают интегрирование даже на символьном уровне (например, для моды накачки  $f(Q, \tau)$  из конфигурации (21)), так как произведение синусов и/или косинусов легко раскладывается в сумму. Однако ряд, образуемый тройной суммой, не является равномерно сходящимся, что не даёт разрешения менять интегрирование и суммирование местами. Поэтому дальнейший анализ проводится численно в практической части работы.

### 2.5.2 В цилиндре

В статье [4] отмечается, что резонатор цилиндрической геометрии более перспективен, чем резонатор-параллелепипед. Для определённости рассмотрим следующий резонатор в цилиндрической системе координат:

$$T := \{(\rho, \varphi, z) \mid \rho \in [0, r_0] \wedge \varphi \in [0, 2\pi) \wedge z \in [0, h]\}$$

Снова воспользуемся методом разделения переменных для решения задачи Штурма-Лиувилля (25):

$$v(M) = v(\rho, \varphi, z) = R(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \cdot Z(z), \quad (30)$$

учитывая периодичность угловой составляющей  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$  и ограниченность радиальной компоненты  $|R(\rho)| < \infty$ . Подставим (30) в задачу Штурма-Лиувилля, записывая лапласиан в цилиндрических

координатах:

$$\begin{aligned} \Delta v(M) + \lambda v(M) = 0 &\Leftrightarrow \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z)) + \lambda \cdot R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Phi(\varphi) Z(z) \cdot \left( R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) \right) + Z(z) \frac{R(\rho)}{\rho^2} \cdot \Phi''(\varphi) + R(\rho) \Phi(\varphi) \cdot Z''(z) = -\lambda \cdot R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z). \end{aligned}$$

Так как собственные функции по определению тождественно не равны нулю, будем рассматривать точки, где можно разделить на выражение  $R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z) \neq 0$ :

$$\frac{R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\rho^2 \Phi(\varphi)} = -\lambda - \frac{Z''(z)}{Z(z)}.$$

Левая часть не зависит от координаты  $z$ . Значит, от  $z$  не зависит и правая часть:

$$Z''(z) + \xi Z(z) = 0, \quad \frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\nu \rho^2, \quad \nu = \lambda - \xi.$$

Аналогично приходим к заключению, что переменные  $R$  и  $\Phi$  также успешно разделяются:

$$\begin{aligned} Z''(z) + \xi Z(z) &= 0, \\ \Phi''(\varphi) + \mu \Phi(\varphi) &= 0, \\ R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) + \left( \nu - \frac{\mu}{\rho^2} \right) R(\rho) &= 0, \end{aligned} \quad \xi + \nu = \lambda.$$

Для компоненты  $Z(z)$  одномерная задача имеет такое же решение, как и в случае параллелепипеда:

$$\begin{aligned} Z_k(z) = \sqrt{\frac{2}{h}} \cdot \sin \frac{\pi k}{h} z &\longleftrightarrow \xi_k = \left( \frac{\pi k}{h} \right)^2, \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{для электрического поля}), \\ Z_k(z) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{k0}}{h}} \cdot \cos \frac{\pi k}{h} z &\longleftrightarrow \xi_k = \left( \frac{\pi k}{h} \right)^2, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{для магнитного поля}). \end{aligned}$$

Однако на этом сходство заканчивается. Для составляющей  $\Phi$  имеются только условия периодичности  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$  и  $\Phi'(\varphi + 2\pi) = \Phi'(\varphi)$ , и каждому собственному значению  $\mu_m$  отвечает пара собственных функций, за исключением нулевого собственного значения:

$$\begin{aligned} \Phi_m(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot \begin{cases} \sin(m\varphi) \\ \cos(m\varphi) \end{cases} &\longleftrightarrow \mu_m = m^2, \quad m \in \mathbb{N}, \\ \Phi_0(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} &\longleftrightarrow \mu_0 = 0. \end{aligned}$$

Наиболее сложная подзадача связана с радиальной компонентой  $R(\rho)$ , которая ещё и зависит от угловых собственных значений  $\mu_m = m^2$ :

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) + \left( \nu - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0, \quad |R(\rho)| < \infty, \quad R(r_0) = 0 \quad (\text{для электрического поля}).$$

Сделаем замену  $x = \sqrt{\nu} \rho$  и  $R(\rho) = R(x/\sqrt{\nu}) = y(x)$ , сведём последнее уравнение к уравнению цилиндрических функций  $m$ -го порядка:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0, \quad |y(x)| < \infty, \quad y(\sqrt{\nu} r_0) = 0.$$

Его решениями, согласно [6, сс. 678-679], являются функции Бесселя:

$$y_m(x) = A_{nm} \cdot J_m(x), \quad 0 = J_m(\sqrt{\nu} r_0) \Rightarrow \nu_{nm} = \left( \frac{\chi_n^{(m)}}{r_0} \right)^2, \quad \text{где}$$

$\chi_n^{(m)}$  — бесконечный набор корней функции Бесселя  $m$ -го порядка  $J_m(\chi_n^{(m)}) = 0$ . В случае граничных условий второго рода собственные функции выглядят аналогично, отличаются только числа  $\tilde{\chi}_n^{(m)}$ , которые на этот раз должны занулять не саму функцию Бесселя, а её производную:

$$y_m(x) = A_{nm} \cdot J_m(x), \quad 0 = J'_m(\sqrt{\nu} r_0) \Rightarrow \nu_{nm} = \left( \frac{\tilde{\chi}_n^{(m)}}{r_0} \right)^2, \quad \text{где} \quad J'_m(\tilde{\chi}_n^{(m)}) = 0.$$

Используем свойство функций Бесселя для определения нормировочного множителя  $A$ :

$$1 = \int_0^{r_0} A_{nm}^2 J_m^2 \left( \frac{\chi_n^{(m)}}{r_0} \rho \right) \rho d\rho = A_{nm}^2 \cdot \frac{r_0^2}{2} \left[ J_m' \left( \chi_n^{(m)} \right) \right]^2 \Leftrightarrow A_{nm} = \pm \frac{\sqrt{2}}{J_m' \left( \chi_n^{(m)} \right) r_0}.$$

Нормировка собственных функций задачи второго рода выглядит сложнее (см. [6, с. 682]):

$$1 = \int_0^{r_0} A_{nm}^2 J_m^2 \left( \frac{\tilde{\chi}_n^{(m)}}{r_0} \rho \right) \rho d\rho = A_{nm}^2 \cdot \frac{r_0^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{m}{\tilde{\chi}_n^{(m)}} \right)^2 \right] \cdot J_m^2 \left( \tilde{\chi}_n^{(m)} \right) \Leftrightarrow A_{nm} = \pm \frac{\sqrt{2}}{J_m \left( \tilde{\chi}_n^{(m)} \right) r_0 \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{m}{\tilde{\chi}_n^{(m)}} \right)^2}}.$$

Проводя обратную замену переменной, получаем наборы  $R_{nm}(\rho) \leftrightarrow \nu_{nm}$ :

$$R_{nm}(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{J_m' \left( \chi_n^{(m)} \right) r_0} J_m \left( \chi_n^{(m)} \frac{\rho}{r_0} \right) \longleftrightarrow \nu_{nm} = \left( \frac{\chi_n^{(m)}}{r_0} \right)^2 \quad (\text{для электрического поля}).$$

$$R_{nm}(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{J_m \left( \tilde{\chi}_n^{(m)} \right) r_0 \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{m}{\tilde{\chi}_n^{(m)}} \right)^2}} J_m \left( \tilde{\chi}_n^{(m)} \frac{\rho}{r_0} \right) \longleftrightarrow \nu_{nm} = \left( \frac{\tilde{\chi}_n^{(m)}}{r_0} \right)^2 \quad (\text{для магнитного поля}).$$

Наконец, осталось соединить разделённые переменные, чтобы получить полные наборы собственных функций и собственных значений оператора Лапласа в цилиндре.

Для электрического поля:

$$v_{nmk}(\rho, \varphi, z) = \frac{2 \cdot J_m \left( \chi_n^{(m)} \frac{\rho}{r_0} \right)}{\sqrt{\pi h} \cdot J_m' \left( \chi_n^{(m)} \right) r_0} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \sin(m\varphi) \\ \cos(m\varphi) \\ 1/\sqrt{2} \end{array} \right\} \cdot \sin \frac{\pi k}{h} z \longleftrightarrow \lambda_{nmk} = \left( \frac{\chi_n^{(m)}}{r_0} \right)^2 + \left( \frac{\pi k}{h} \right)^2. \quad (31)$$

Для магнитного поля:

$$v_{nmk}(\rho, \varphi, z) = \frac{2 \cdot J_m \left( \tilde{\chi}_n^{(m)} \frac{\rho}{r_0} \right)}{\sqrt{\pi h} \cdot J_m \left( \tilde{\chi}_n^{(m)} \right) r_0} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \sin(m\varphi) \\ \cos(m\varphi) \\ 1/\sqrt{2} \end{array} \right\} \cdot \frac{\sin \frac{\pi k}{h} z}{\sqrt{1 - \left( \frac{m}{\tilde{\chi}_n^{(m)}} \right)^2}} \longleftrightarrow \lambda_{nmk} = \left( \frac{\tilde{\chi}_n^{(m)}}{r_0} \right)^2 + \left( \frac{\pi k}{h} \right)^2. \quad (32)$$

В выражениях (31) и (32) фигурные скобки дают тройное разветвление формул, но ветвь  $1/\sqrt{2}$  выбирается тогда и только тогда, когда  $m = 0$ . При  $m \geq 1$  действуют обе другие ветви одновременно: одному и тому же собственному значению  $\lambda_{nmk}$  соответствует две собственные функции — одна с  $\sin(m\varphi)$ , другая с  $\cos(m\varphi)$ . Это имеет определённые последствия для функции Грина, в чьей формуле (24) тройное суммирование учитывает все собственные функции для каждого  $\lambda_{nmk}$ . Из-за этого при суммировании выделяются конструкции вида  $\sin(m\varphi) \sin(m\varphi') + \cos(m\varphi) \cos(m\varphi')$ , которые дают косинусы разностей угловых координат  $\cos m(\varphi - \varphi')$  (инвариантность относительно поворота системы координат вокруг оси цилиндра). После подстановки собственных значений и функций оператора Лапласа в формулу функции Грина, её можно использовать для явной записи решения исходной задачи:

$$u(\rho, \varphi, z, t) = \frac{4}{\pi r_0^2 h} \int_0^t \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^h f(\rho', \varphi', z', \tau) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\sin \sqrt{\lambda_{nmk}} c(t - \tau)}{\sqrt{\lambda_{nmk}} c \cdot J_m'^2 \left( \chi_n^{(m)} \right)} \cdot \frac{\cos[m(\varphi - \varphi')]}{1 + \delta_{m0}} \times \right. \\ \left. \times J_m \left( \chi_n^{(m)} \frac{\rho'}{r_0} \right) J_m \left( \chi_n^{(m)} \frac{\rho}{r_0} \right) \cdot \sin \frac{\pi k z}{h} \sin \frac{\pi k z'}{h} \right] d\rho' d\varphi' dz' d\tau \quad (\text{для электрического поля}). \quad (33)$$

Внутри записи решения использован знаменатель  $1 + \delta_{m0}$  с символом Кронекера, позволяющий компактно учесть собственные функции  $v_{n0k}$  для собственных значений  $\lambda_{n0k}$ , то есть в случае  $m = 0$ . Аналогично записывается и явное решение для магнитной компоненты сигнальной моды:

$$u(\rho, \varphi, z, t) = \frac{4}{\pi r_0^2 h} \int_0^t \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^h f(\rho', \varphi', z', \tau) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\sin \sqrt{\lambda_{nmk}} c(t - \tau)}{\sqrt{\lambda_{nmk}} c \cdot J_m^2 \left( \tilde{\chi}_n^{(m)} \right)} \cdot \frac{\cos[m(\varphi - \varphi')]}{1 - \left( \frac{m}{\tilde{\chi}_n^{(m)}} \right)^2 + \delta_{m0}} \times \right. \\ \left. \times J_m \left( \tilde{\chi}_n^{(m)} \frac{\rho'}{r_0} \right) J_m \left( \tilde{\chi}_n^{(m)} \frac{\rho}{r_0} \right) \cdot \frac{\cos \frac{\pi k z}{h} \cos \frac{\pi k z'}{h}}{1 + \delta_{k0}} \right] d\rho' d\varphi' dz' d\tau \quad (\text{для магнитного поля}). \quad (34)$$

Если явный вид решений в параллелепипеде ещё подавал надежды на возможность аналитического интегрирования, то получение сигнальных мод в цилиндре однозначно попадает в разряд задач, решаемых численно.

### 3 Практическая часть

В этом разделе кратко освещаются результаты нескольких численных экспериментов, проведенных в ходе работы.

#### 3.1 Наглядная иллюстрация

В разделе 2.4 было сделано заключение, что линейного нарастания сигнальной моды недостаточно для её регистрации на фоне мод накачки (т.е. на той же частоте). Естественно, это заключение во многом обязано чрезвычайной малости специального размерного коэффициента  $\varkappa \approx 1.66 \cdot 10^{-30} \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}}$  перед неклассическим слагаемым в лагранжиане Эйлера-Гейзенберга. Ради интереса было проведено численное моделирование эволюции мод накачки (21) в резонаторе-параллелепипеде при коэффициенте  $\varkappa$ , намеренно увеличенном на много порядков так, чтобы нелинейное поведение стало заметно невооружённым глазом. Так как данная модель заведомо нефизична и носит чисто иллюстративный характер, расчёты проводились безразмерно без привязки к какой-либо системе единиц.

Например, следующая пара мгновенных “снимков” полей в двумерном срезе резонатора, перпендикулярном оси  $Oz$ , наглядно демонстрирует различие между классическим сценарием развития событий и неклассическим:

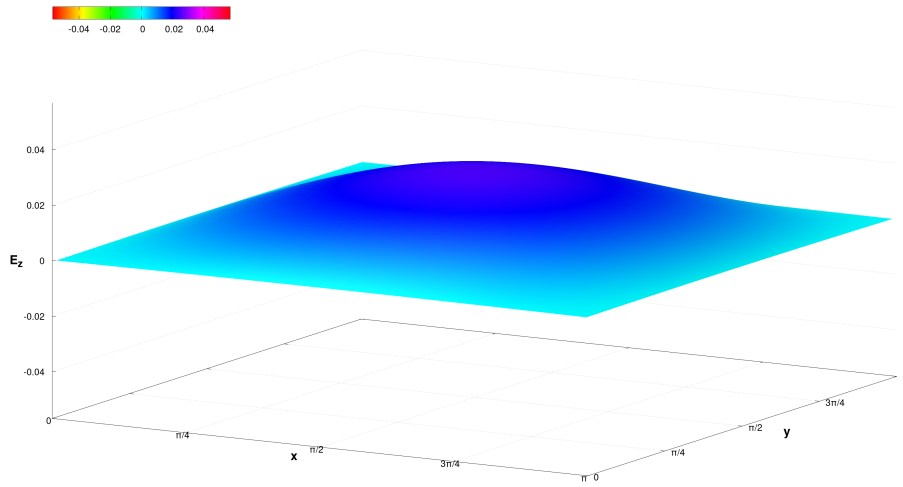


Рис. 1: Электрическое поле в срезе резонатора (модель без учёта поправок).

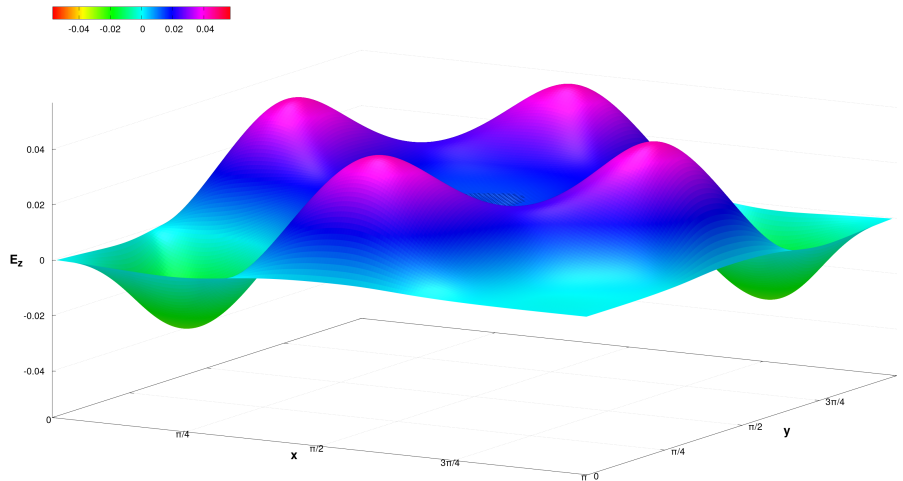


Рис. 2: Электрическое поле в срезе резонатора (модель с учётом поправок).

Полная анимация эволюции электрической составляющей поля (суммы моды накачки и сигнальной моды), исходные коды программы (Fortran, MPI) и вспомогательных элементов, а также краткая инструкция доступны по адресу: <https://drive.google.com/open?id=1d1030s0uvFtuhkuMnDrBFTTSjW1xpLYB>.

### 3.2 Расчёт сигнальных мод в параллелепипеде

В разделах 2.5.1 и 2.5.2 были получены формулы, позволяющие явно рассчитать сигнальные моды в резонаторах простейших форм при произвольных модах накачки. Несмотря на немалую вычислительную сложность расчётов, была численно получена зависимость энергии сигнальных мод от времени.

По формулам 28 и 29 вычисляются величины сигнальных мод из конфигурации (21) для нескольких моментов времени во всём резонаторе. Для каждого момента времени рассчитывается объёмная плотность энергии сигнальных мод, которая затем усредняется по объёму. Наконец, полученное значение масштабируется для построения графика. Все расчёты строго привязаны к системе СИ.

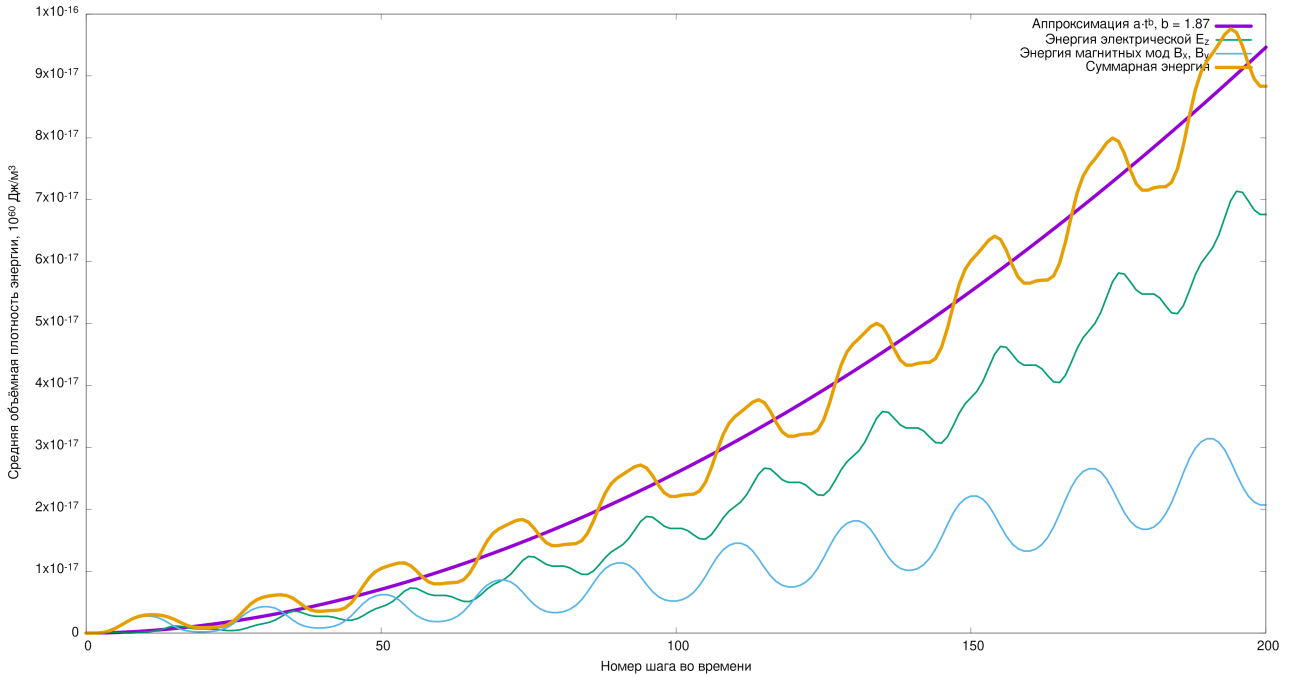


Рис. 3: Средняя объёмная плотность энергии сигнальных мод в параллелепипеде.

Поведение энергии аппроксимируется степенным ростом  $A \cdot (t + \varepsilon)^B$ , и в случае линейного роста амплитуды сигнальных мод ожидается значение показателя нарастания энергии  $B = 2$ . В результате численного эксперимента получено значение  $B = 1.87$ , что удовлетворительно согласуется с ожиданиями. По графику энергии можно судить о монохроматичном поведении магнитных мод  $B_x, B_y$ , в то время как колебания энергии электрической моды  $E_z$  свидетельствуют о наличии нескольких её частотных составляющих. Это делает возможным появление высших гармоник, нарастающих во времени, — более тщательный спектральный анализ является перспективой развития данной работы.

Полноразмерное изображение графика роста средней объёмной плотности энергии сигнальных мод в резонаторе-параллелепипеде, а также исходный код программы (Fortran, OpenMP) доступны по адресу: <https://drive.google.com/open?id=1Ip60Jz7SCFVPEhRQ2wGurNRsrIeTuqbr>.

## 4 Основные итоги

В ходе данной работы были получены:

- нелинейные поправки к уравнениям Максвелла на основе лагранжиана Эйлера-Гейзенберга — поляризация и магнетизация вакуума,
- скорректированные волновые уравнения, учитывающие эти поправки,

а также проанализированы возможности регистрации данных эффектов при использовании явления резонанса для усиления сигнальных мод. Попутно была численно построена наглядная иллюстрация их нелинейного поведения. При дальнейшем изучении был применён метод функции Грина для получения явного решения волновых уравнений, однако численный расчёт через функцию Грина дал результат, вопрос достоверности которого остаётся открытым.

Перспективным направлением развития данной работы является исследование вариантов лагранжиана Эйлера-Гейзенберга, учитывающих вклад аксионов и аксиоподобных частиц, а также построение

надёжной модели эксперимента, посвящённого регистрации неклассического поведения электромагнитного поля, обусловленного как эффектами КЭД, так и вкладом со стороны аксионов и аксионоподобных частиц.



## Список литературы

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. II. Теория поля. – 8-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 536 с. – ISBN 5-9221-0056-4 (Т. II).
- [2] Бутиков Е. И. Оптика: Учеб. пособие для вузов / Под ред. Н. И. Калитеевского. – М.: Высш. шк., 1986. – 512 с: ил.
- [3] Бережной В. А., Курдюмов В.Н. Лекции по высокочастотной электродинамике – М. 2013. – 405 с. – ISBN 978-5-94274-227-0. URL: <https://arxiv.org/abs/1310.0994v1> (дата обращения: 11.03.2020).
- [4] D. Eriksson, G. Brodin, M. Marklund, L. Stenflo. A possibility to measure elastic photon–photon scattering in vacuum. Phys.Rev. A70 (2004) 013808. 01.04.2018. URL: <https://arxiv.org/abs/physics/0411054v1> (дата обращения: 11.03.2020).
- [5] Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике: Учебное пособие. М.: Изд-во МГУ, 1993. – 352 с. – ISBN 5-211-02073-1.
- [6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МГУ, 1999 – 799 с. – ISBN 5-211-04138-0.
- [7] Статья о фотонных детекторах на сайте “Ядерная физика в Интернете”. URL: <http://nuclphys.sinp.msu.ru/experiment/detectors/pd/index.html> (дата обращения: 08.05.2020).
- [8] Appl. Phys. Lett. 105, 234103 (2014). URL: <https://doi.org/10.1063/1.4903808> (дата обращения: 08.05.2020).
- [9] K. Saito. Critical field limitation of the niobium superconducting RF cavity. URL: <https://accelconf.web.cern.ch/srf01/papers/ph003.pdf> (дата обращения: 09.05.2020).