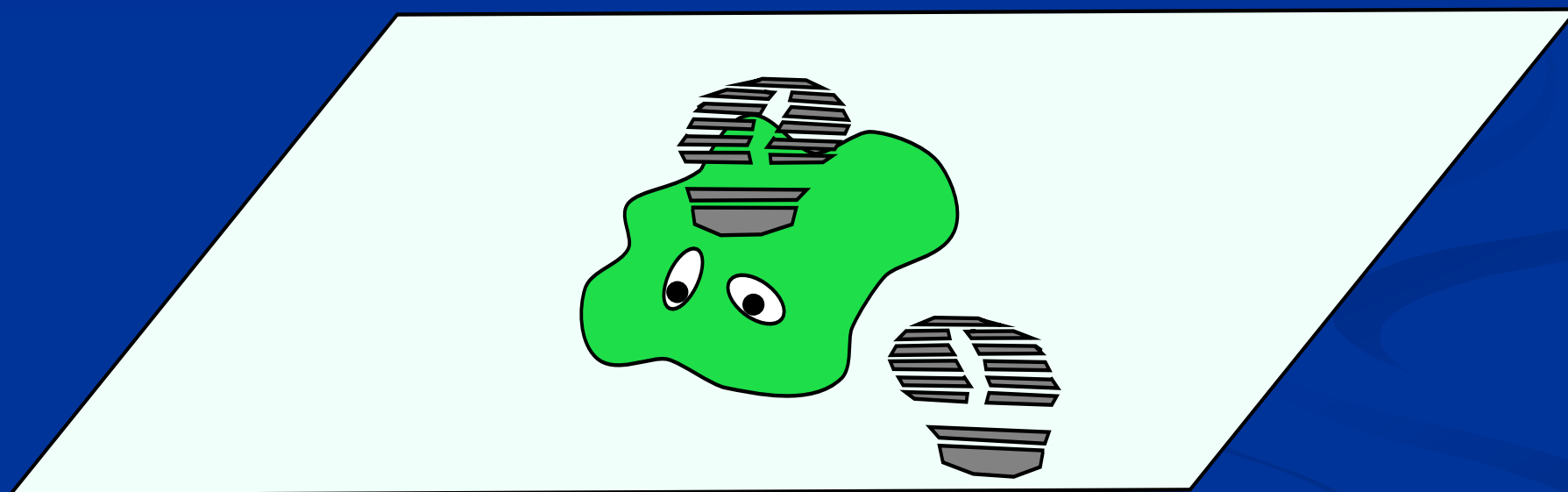


Многомерные миры

Максим Либанов

ИЯИ РАН



«МГУ», 20 октября 2011 г.

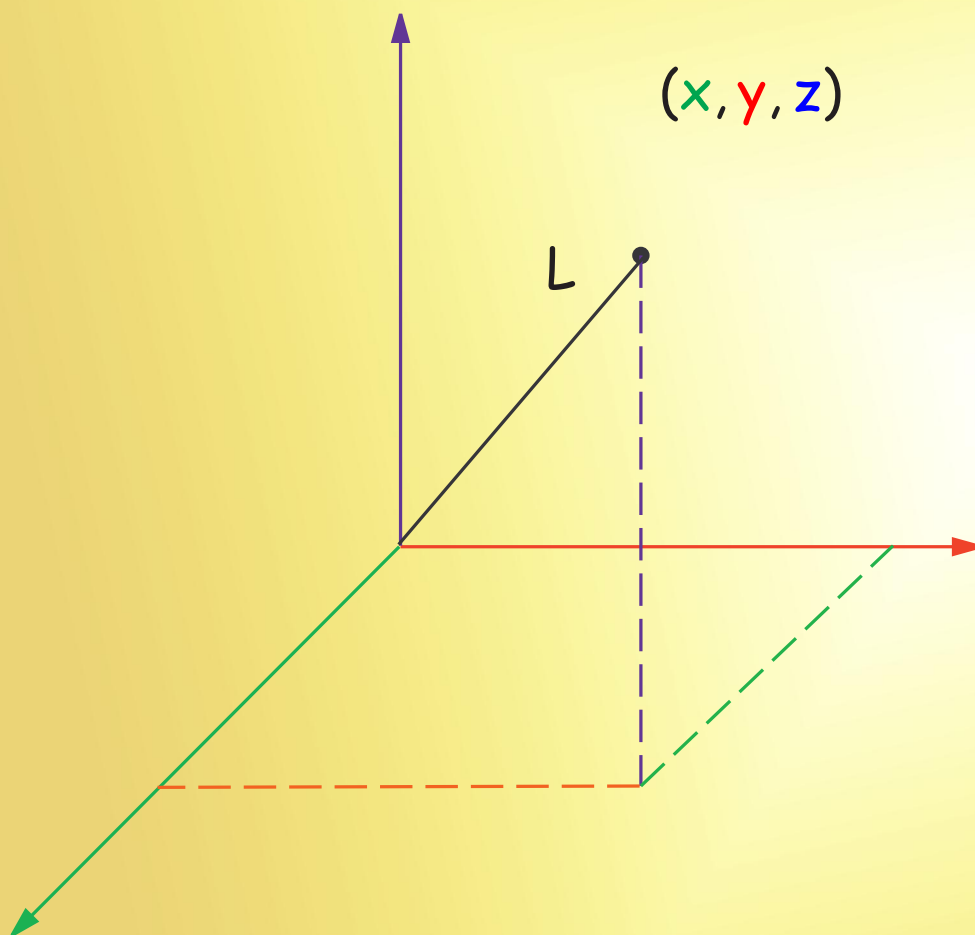
Что такое размерность?

Почему наш мир трёхмерный?

Евклид (300 до н.э.):

- Точка - это то, что не имеет частей.
- Линия - длина, лишённая ширины.
- Плоскость - это то, что имеет только длину и ширину.
- Объём - это то, что имеет длину, ширину и глубину.

Трёхмерное пространство



- Три числа необходимы для задания положения точки

- Три перпендикулярные прямые проходят через одну точку
-- Эквивалентно определению размерности линейного векторного пространства

- Расстояние

$$L^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

- Метрическое пространство

- Можно обобщить на пространство произвольной размерности

☹️ Такое построение некорректно!!! ☹️

Кантор (конец XIX века):

Число точек на плоскости равно числу точек на прямой!

Задача: Построить **взаимоднозначное** соответствие между точками прямой и плоскости

Брауэр, Лебег и др. (рубеж XIX и XX веков):

Строгое определение размерности, основанное на теории
МНОЖЕСТВ

? Почему три ?

🟢 $\exists \infty$ число правильных многоугольников, но 5 многогранников
 $\Rightarrow$ число измерений < 4 (Птолемей и др.)

🟢 Закон Ньютона (Кулона) в d -измерениях

$$\vec{F} \sim \frac{1}{r^{d-1}}$$

При $d > 3$ не существует ни стационарных орбит планет, ни устойчивых состояний электронов в атомах (Эренфест 1917 г.)

🟢 При $d = 1$ -- невозможны безстолкновительные процессы

🟢 d -- четное:

🔴 Нет киральности -- что с CP ?

🔴 Реверберации (эхо) -- за чётко сформированным сигналом обязательно следуют возмущения (диффузное распространение) -- невозможно передавать информацию (Уитроу 1955 г.)

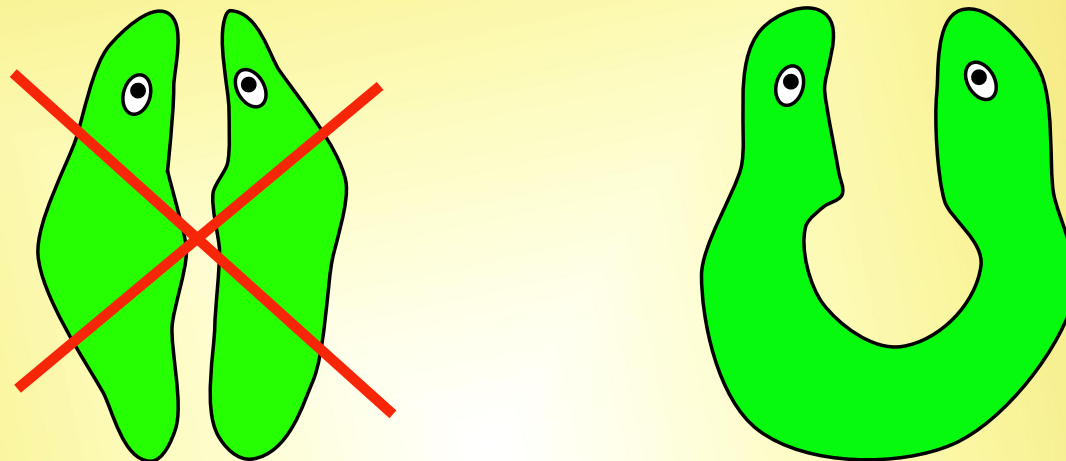
$$G_{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \begin{cases} \frac{\Theta(t)}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial t^2} \right)^{\frac{d-3}{2}} \delta(t^2 - \vec{x}^2) & d \geq 3 \text{ -- нечет.} \\ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial t^2} \right)^{\frac{d-2}{2}} \frac{\Theta(t - |\vec{x}|)}{\sqrt{t^2 - \vec{x}^2}} & d \geq 2 \text{ -- чет.} \end{cases}$$

“паразитные” возмущения
отсутствует задний фронт



Круги на воде

- При $d = 2$ -- невозможна "обычная" пищеварительная система (Левков 2008)



- ОТО не допускает существование гравитационно-связанных состояний при $d = 2$, а при $d > 3$ не позволяет инфинитного движения.

- ✓ По всей видимости, при нашем уровне понимания вопроса жизнь не может существовать в пространстве с $d \neq 3$
- ✓ Законы (уравнения) физики -- законы Ньютона, принципы квантовой теории и т.д. -- практически без изменений переносятся на пространства с произвольной размерностью. Более того, этот факт экспериментально проверен при $d = 1, 2$ ($d = 1$: квантовые проволоки; $d = 2$: графен).
- ✓ Таким образом, сам факт, что Вселенная трёхмерна, а жизнь может существовать только в трёхмерном пространстве, не может не вызывать удивления:

Что это? Великий замысел Творца?

или

"Счастливая случайность"?

или

$d \neq 3$?

Если вдуматься, в физике немало счастливых случайностей.

- Нейтрон тяжелее протона, но всего на 0.1 %.

- Нейтрон и протон -- не элементарные, состоят из кварков разного типа:

$$n = (udd) , \quad p = (uud)$$

- Нейтрон нестабилен, $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$.

- Если бы u-кварк был немного тяжелее, чем на самом деле, протон был бы тяжелее нейтрона, протон был бы нестабилен, $p \rightarrow n + e^+ + \nu$, в природе не было бы водорода, вряд ли жизнь была бы возможна.

- Наоборот, если бы d-кварк был немного тяжелее, чем на самом деле, нейтрон был бы слишком тяжелым, он бы распадался внутри любого ядра, в природе не было бы других ядер, кроме протона. Никаких элементов, кроме водорода. Жизнь невозможна.

КАК К ТАКИМ СЛУЧАЙНОСТЯМ ОТНОСИТЬСЯ?

? Почему НЕ три измерения ?

- Внутренние потребности теории.

Фундаментальная теория должна быть красивой и
самосогласованной

Красивые и самосогласованные теории (супергравитация, теория суперструн) "живут" в 11-мерном пространстве-времени, $d = 10$ (1970 -- 90-е годы).

- Гипотеза: объединение всех взаимодействий с гравитацией (первая попытка -- Т. Калуца, 1921).

- Взаимодействия $\iff$ симметрии

Электродинамика, электрические и магнитные взаимодействия
 $\iff$ электрический заряд

Электрический заряд сохраняется

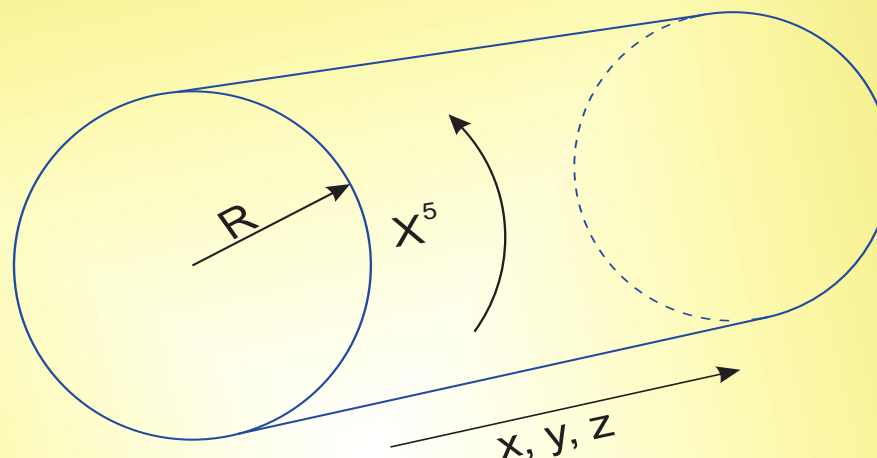
Законы сохранения $\iff$ симметрии

- Законы сохранения энергии, импульса, углового момента: $\iff$ "очевидные", пространственно-временные симметрии: например, относительно пространственных сдвигов и вращений

- Сохранение электрического заряда $\iff$ "неочевидная", внутренняя симметрия

- Сохраняющийся электрический заряд -- проявление внутренней симметрии

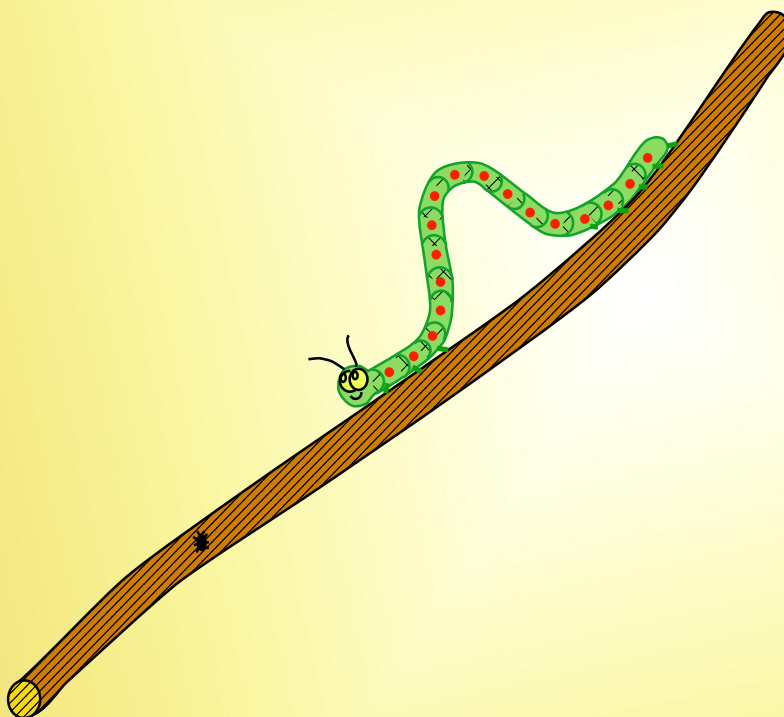
- В теориях с "лишними" измерениями внутренняя симметрия на самом деле является пространственно-временной!



- Сохранение электрического заряда $\iff$ симметрия относительно вращений 5-го измерения
- Общая теория относительности:
гравитация = геометрия пространства-времени.
- Электромагнетизм -- часть гравитационных взаимодействий!
- Так же обстоит дело с другими взаимодействиями.

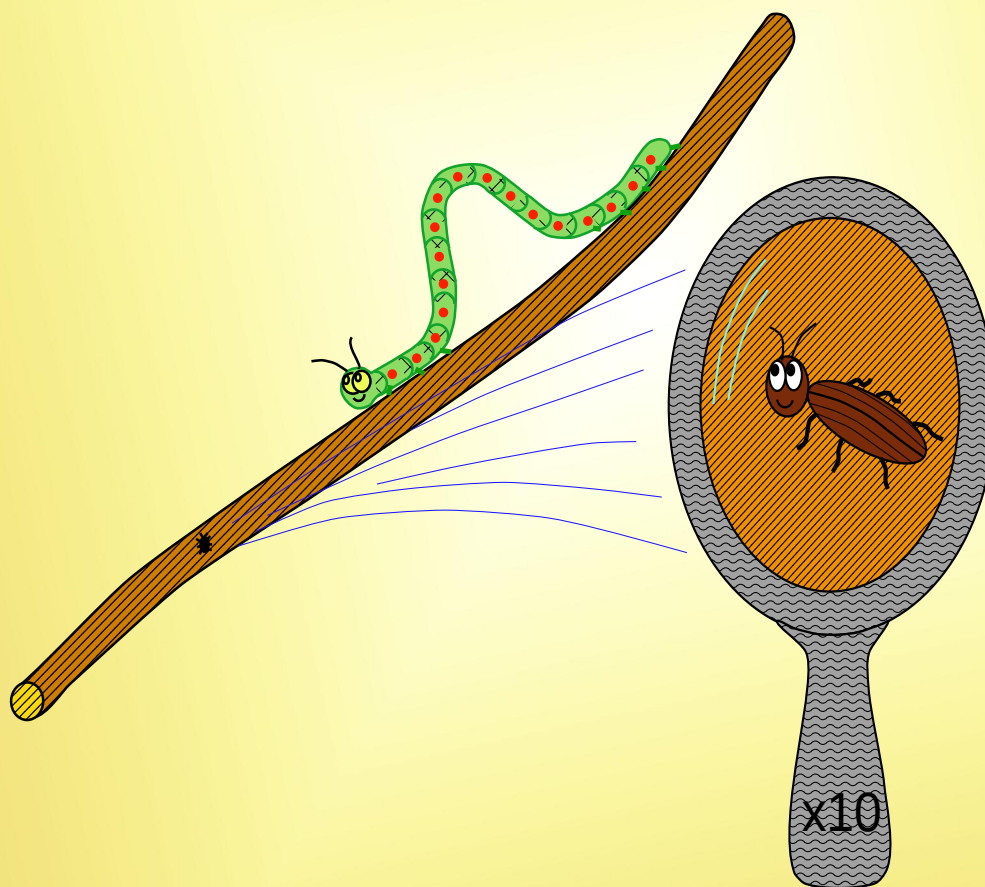
Почему дополнительные измерения невидимы?

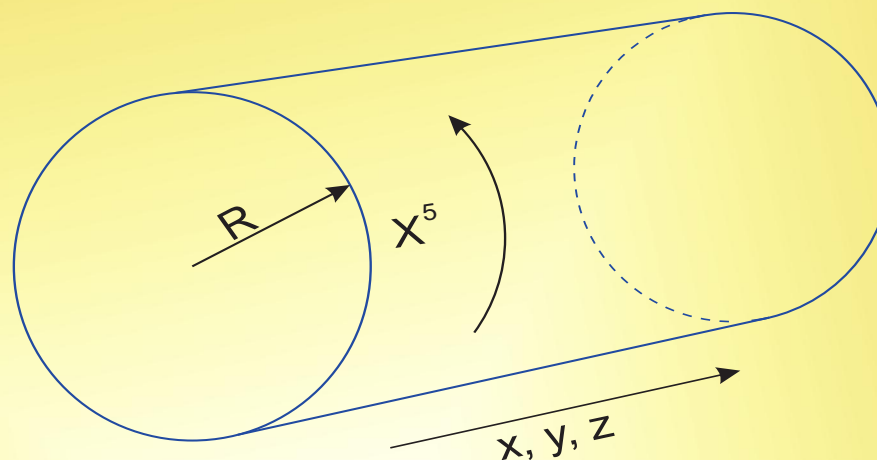
- Они компактны и малы (Клейн 1926 г.)



Почему дополнительные измерения невидимы?

- Они компактны и малы (Клейн 1926 г.)





Квантовая теория: для движения элементарной частицы по окружности размера R необходима энергия

$$E \gtrsim \frac{\hbar c}{R}$$

...и каков характерный размер?

Должен определяться гравитационным взаимодействием. В естественной системе единиц

$$\hbar = c = 1 \Rightarrow 1 \text{ ГэВ} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-14} \text{ см}}$$

константа гравитационного взаимодействия

$$G_N = 6.67 \times 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2} = 6.7 \times 10^{-39} \frac{1}{\text{ГэВ}^2}$$

является единственным размерным параметром и определяет масштабы энергий (масс) и длин (времен):

$$M_{\text{PL}} = \frac{1}{\sqrt{G_N}} = 1.2 \times 10^{19} \text{ ГэВ} = 2.1 \times 10^{-5} \text{ г}$$

$$L_{\text{PL}} = \frac{1}{M_{\text{PL}}} = 1.7 \times 10^{-33} \text{ см} = 5.5 \times 10^{-44} \text{ с}$$

Размер дополнительных измерений очень мал: $L_{PL} \simeq 10^{-33}$ см!

Для человечка размером L_{PL} атом имел бы такие размеры, как для нас для нас -- вся видимая Вселенная.

Соответствующий масштаб энергий

$$M_{PL} = \frac{1}{\sqrt{G_N}} = 1.2 \times 10^{19} \text{ ГэВ} \simeq 10^{19} m_p$$

- Большая $M_{PL} \iff$ слабость гравитационных сил
- Гравитационные взаимодействия становятся сильными при энергиях порядка M_{PL} .

На сегодняшний день мы достигли масштабов порядка



$$\text{ТэВ}^{-1} \simeq 10^{-17} \text{ см} \simeq 10^{16} L_{PL}$$



Чтобы достичь планковских энергий требуется линейный ускоритель размером с нашу Галактику!

Можно ли обойти полученное ограничение на размер дополнительных измерений?

ADD-модель. (Arkani-Hamed, Dimopoulos, Dvali, 1998)

Гравитационная постоянная определяется из закона Ньютона

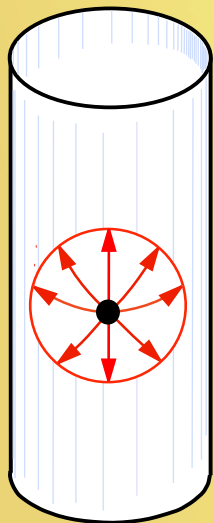
$$\vec{F}(r) = -\frac{1}{M_{\text{PL}}^2} \frac{\vec{r} m_1 m_2}{r^2} = -m_2 \vec{\nabla} U(r)$$

$$\Delta U = \frac{4\pi}{M_{\text{PL}}^2} m_1 \delta(\vec{r})$$

$$m_2 \int d^3r \Delta U = - \oint d\vec{s} \vec{F} = \frac{4\pi}{M_{\text{PL}}^2} m_1 m_2$$

Закон Ньютона зависит от числа измерений.

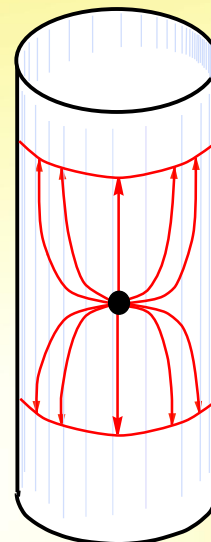
Рассмотрим случай двух пространственных измерений: одно пространственное измерение компактно, второе --- нет.



При $r \ll L$

$$\oint d\vec{s} \vec{F} = 2\pi r F(r) = -\frac{2\pi}{M_{PL}^{(3)}} m_1 m_2$$

$$F(r) = -\frac{1}{M_{PL}^{(3)}} \frac{m_1 m_2}{r}$$



При $r \gg L$

$$\oint d\vec{s} \vec{F} = 4\pi L F(r) = -\frac{2\pi}{M_{PL}^{(3)}} m_1 m_2$$

$$F(r) = -\frac{1}{M_{PL}^{(3)}} \frac{m_1 m_2}{2L} \simeq -\frac{1}{M_{PL}^{(3)} V_{\text{Доп. изм.}}}$$

В общем случае $D = d + 1$ измерений (включая одно временное) получаем:

$$F(r) = -\frac{1}{(M_{PL}^{(D)})^{D-2}} \frac{m_1 m_2}{r^{D-2}} \quad \text{при } r \ll L$$

$$F(r) = -\frac{1}{\left[(M_{PL}^{(D)})^{D-2} V_{D-4} \right]} \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{при } r \gg L$$

Эффективная масса Планка

- Эффективная четырёхмерная масса Планка равна

$$M_{\text{PL}}^2 \simeq (M_{\text{PL}}^{(\text{D})})^{D-2} V_{D-4} \simeq (M_{\text{PL}}^{(\text{D})})^2 \left(M_{\text{PL}}^{(\text{D})} L \right)^{D-4}$$

Рассмотрим частные случаи. Пусть $M_{\text{PL}}^{(\text{D})} \simeq 1 \text{ ТэВ}$ --- позволяет переформулировать проблему калибровочной иерархии,

D	L
5	$10^{15} \text{ см} \sim 100 \text{ а.е.}$
6	$\sim 0.1 \div 1 \text{ мм}$
7	10^{-6} см
10	10^{-12} см

На сегодняшний день закон Ньютона экспериментально проверен вплоть до 0.056 мм (Karner et al, 2007). Таким образом, даже случай D= 6 экспериментально ещё не закрыт!

Проблема калибровочной иерархии

● Существует четыре типа калибровочных взаимодействий:

● Электромагнитное (группа $U(1)$)

● Слабое (группа $SU(2)$)

● Сильное (группа $SU(3)$)

} Составляющие Стандартной
модели $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

✓ Энергетический масштаб СМ (масштаб нарушения электрослабой симметрии) $M_{ЭС} \sim 1 \text{ ТэВ} = 10^3 \text{ ГэВ}$

✓ Эти взаимодействия объединяются (ТВО) $M_{ТВО} \sim 10^{16} \text{ ГэВ}$

● Гравитация $M_{PL} \sim 10^{19} \text{ ГэВ}$

Проблема калибровочной иерархии

● Существует четыре типа калибровочных взаимодействий:

● Электромагнитное (группа $U(1)$)

● Слабое (группа $SU(2)$)

● Сильное (группа $SU(3)$)

} Составляющие Стандартной модели $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

✓ Энергетический масштаб СМ (масштаб нарушения электрослабой симметрии) $M_{ЭС} \sim 1 \text{ ТэВ} = 10^3 \text{ ГэВ}$

✓ Эти взаимодействия объединяются (ТВО) $M_{ТВО} \sim 10^{16} \text{ ГэВ}$

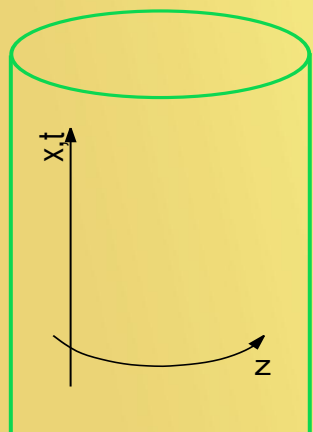
● Гравитация $M_{PL} \sim 10^{19} \text{ ГэВ}$

Почему в природе существуют столь отличающиеся масштабы?

$$\frac{M_{ТВО}}{M_{ЭС}} \sim 10^{13} \text{ или } \frac{M_{PL}}{M_{ЭС}} \sim 10^{16}$$

Почему дополнительные измерения никак не проявляют себя в других взаимодействиях?

Редукция Калуцы-Клейна.



КК спектр

Решением уравнения Клейна-Гордона для безмассового скалярного поля с периодическими граничными условиями

$$\partial^2 \Phi(x, z) \equiv \left(\partial_\mu^2 - \partial_z^2 \right) \Phi = 0, \quad \Phi(x, z) = \Phi(x, z + 2\pi L)$$

является

$$\Phi(x, z) = \sum_n \varphi_n^c(x) \cos\left(\frac{nz}{L}\right) + \varphi_n^s(x) \sin\left(\frac{nz}{L}\right)$$

$$\partial_\mu^2 \varphi_n^{s,c} + \frac{n^2}{L^2} \varphi_n^{s,c} = 0$$

Дополнительные измерения $\Leftrightarrow$ бесконечный набор полей --- Калуца-Клейновская башня --- с массами $M_n = \frac{n}{L}$.

При достаточно малых L в низкоэнергетическом спектре присутствует только нулевая мода $\varphi_0^c(x) \dots$

🕒 . . . а что будет в случае больших дополнительных измерений?

При $L = 1\text{мм}$

$$M_1 = \frac{1}{L} = 2 \times 10^{-4} \text{эВ} ,$$

и мы обнаружили бы вплоть до энергии 100 ГэВ

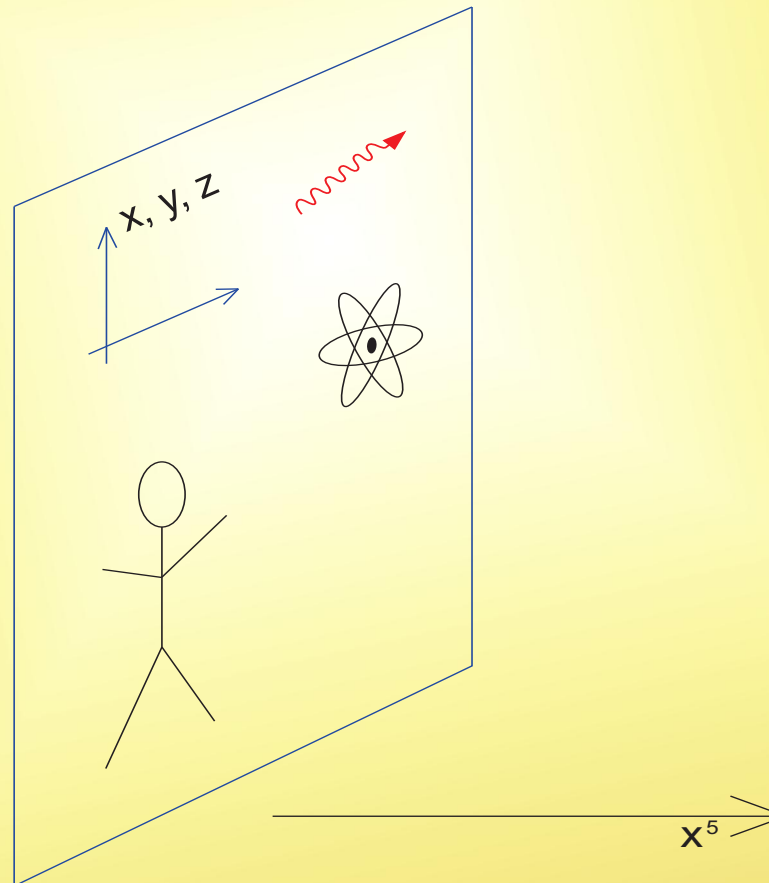
$$\frac{100 \text{ ГэВ}}{M_1} \simeq 10^{13} \text{ новых состояний!}$$

!!! НУЖЕН ДРУГОЙ МЕХАНИЗМ !!!

Мир на бране

Рубаков, Шапошников 1983; Акама, 1983

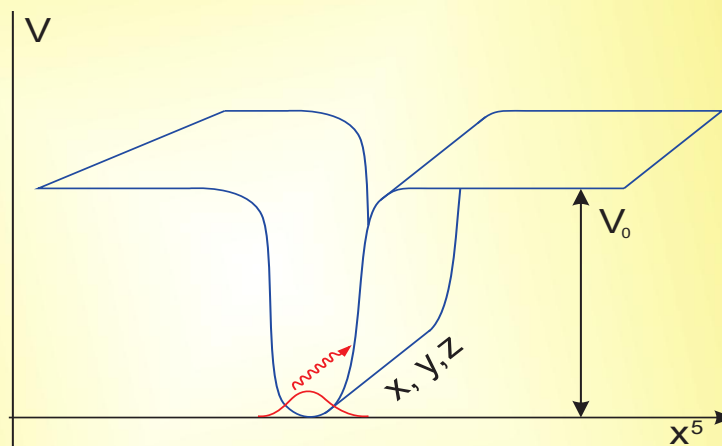
- Брана (от мембраны) -- 3-мерная "поверхность" в многомерном пространстве.



● Может ли такое быть?

Да, может.

Потенциальная яма вдоль дополнительных измерений
(многочисленные примеры в физике твердого тела).

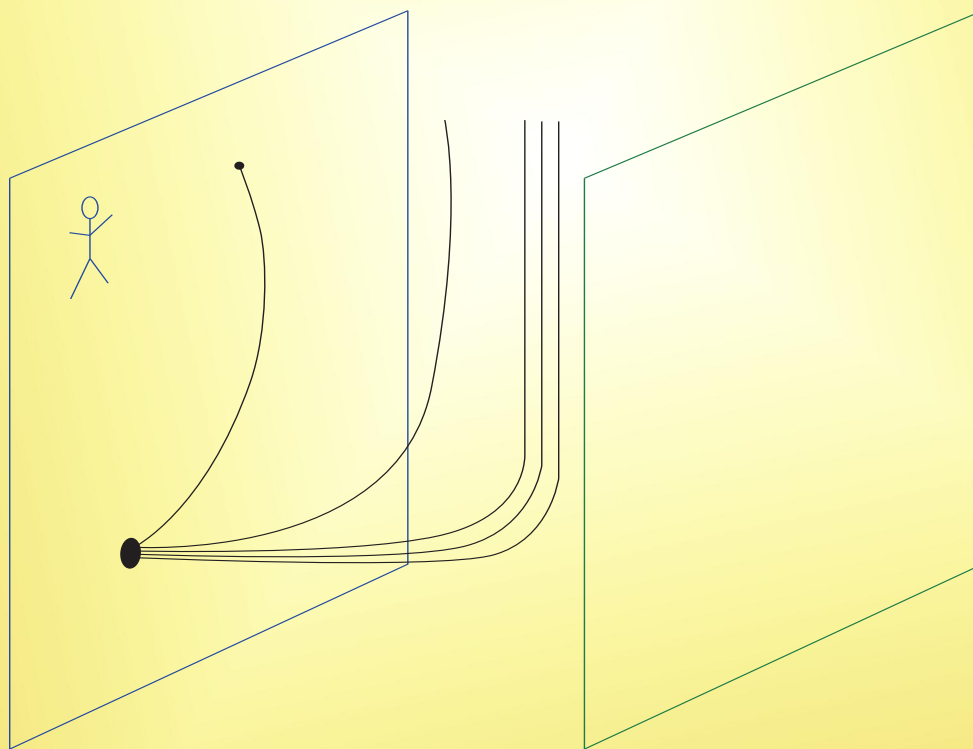


Если яма узкая, движение в поперечном направлении возможно только при большой энергии:

$$E \gtrsim \frac{\hbar c}{L_w} \simeq 1 \text{ ТэВ} , \quad L_w - \text{ ширина ямы.}$$

Другая возможная причина малой G_N ,
и, стало быть, большой M_{PL}
(Рэндалл, Сандрум 1999)

Геометрия дополнительных измерений $\Rightarrow$
отталкивание гравитационных силовых линий от нашей браны

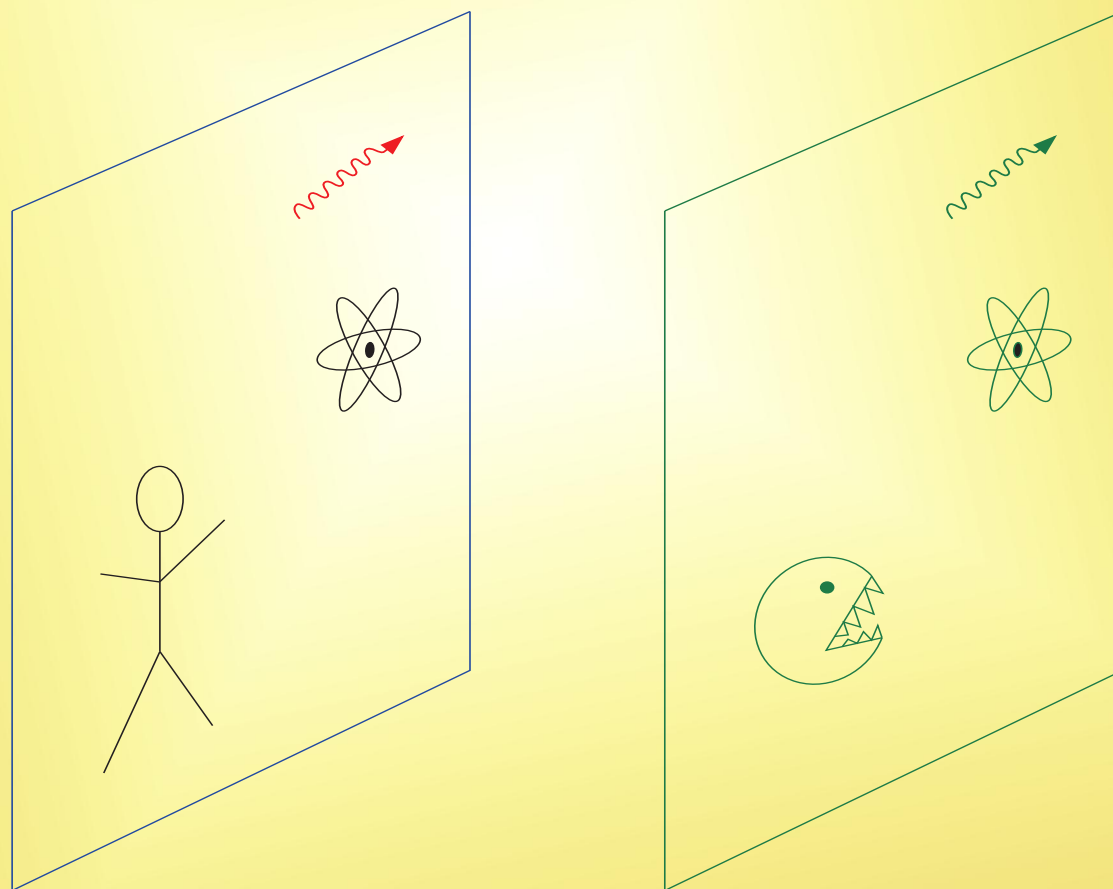


Если верно, что настоящий гравитационный масштаб -- 1 ТэВ, то дополнительные измерения имеют сравнительно большой размер и начнут "открываться" в ускорительных экспериментах
Идет их поиск на Большом адронном коллайдере

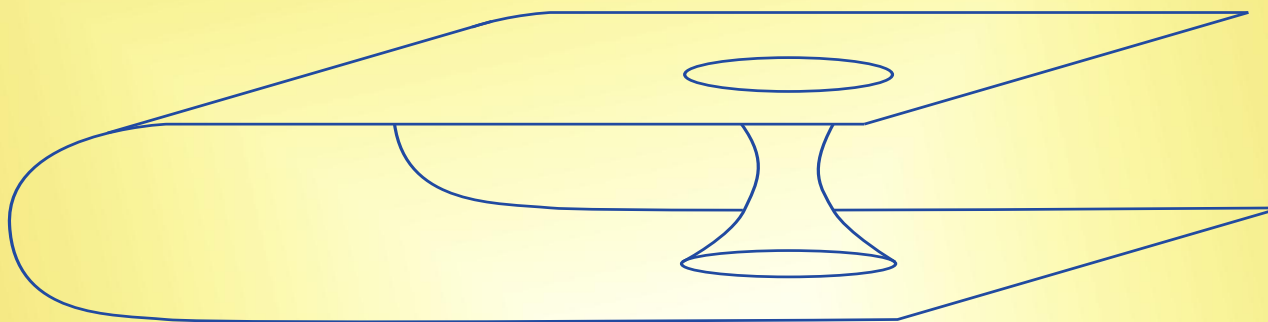


Что следует из картины мира на бране?

- Возможность существования других бран с другими формами материи



- Возможны браны сложной геометрии
(Дубовский, Сибиряков, 2004)



- Возможно исчезновение частиц с нашей браны $\Rightarrow$
кажущееся несохранение энергии и/или электрического заряда

Поиски этих и подобных явлений заложены в программы экспериментов на Большом адронном коллайдере и на других установках.

Чёрные дыры на Земле Апокалипсис сегодня?

● “Обычные чёрные дыры”

$$R_H = 2 \frac{M_H}{M_{PL}^2}$$

для протона

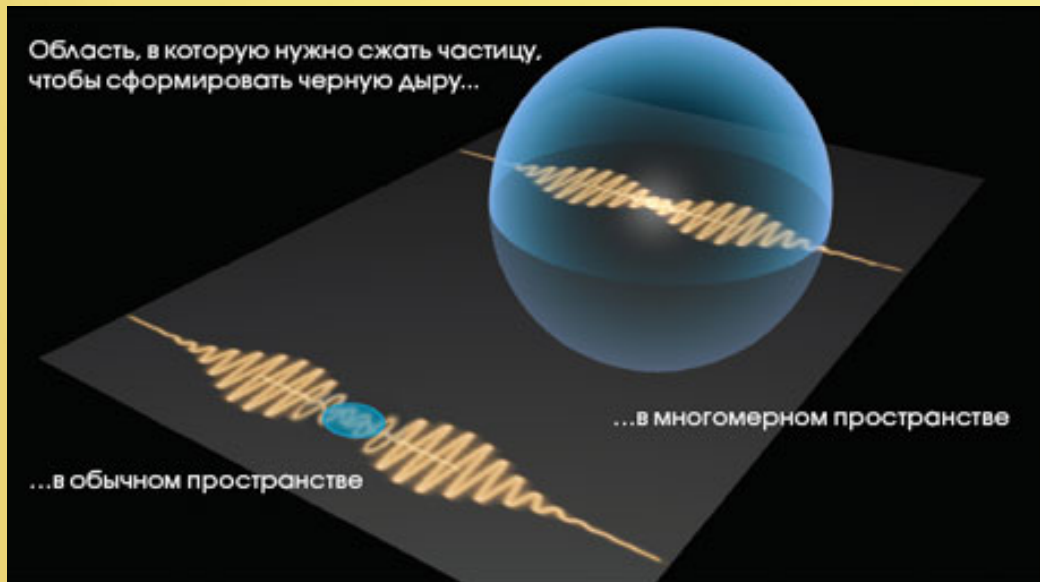
$$R_H \sim \frac{m_p}{M_{PL}^2} \simeq 10^{-19} L_{PL}$$

для тела с массой $M_{PL} = 10^{-5} \text{ г}$.

$$R_H \simeq L_{PL} \simeq 10^{-33} \text{ см}$$

$$\rho \simeq \frac{M_{PL}}{L_{PL}^3} \simeq 10^{95} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

Нужны планковские энергии!!!



В моделях с БДИ

$$M_{PL}^{(D)} \sim 1 \text{ ТэВ}, R_H \sim \left[\frac{M_H}{(M_{PL}^{(D)})^{D-2}} \right]^{\frac{1}{D-3}}$$

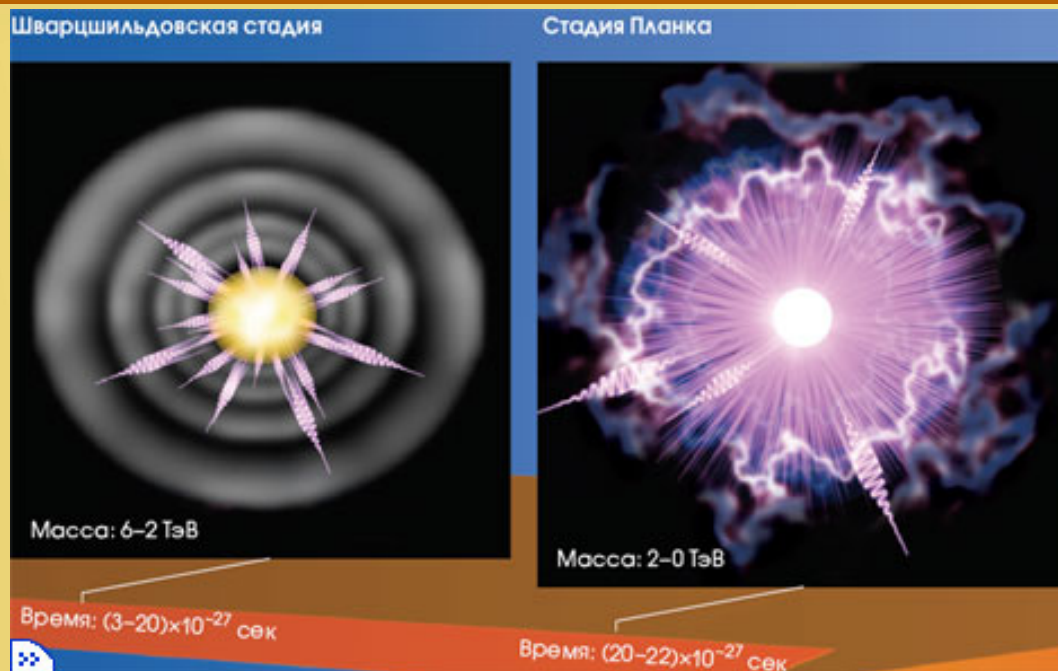
чёрные дыры могут рождаться на БАК

Сечение либо геометрическое

$$\sigma \sim \pi R_H^2$$

что соответствует рождению одной дыры в секунду, либо туннельное

$$\sigma \sim \exp \left(-2\pi \frac{M_H^2}{(M_{PL}^{(D)})^2} \right)$$



Излучение чёрных дыр (Хокинг 1975 г.)

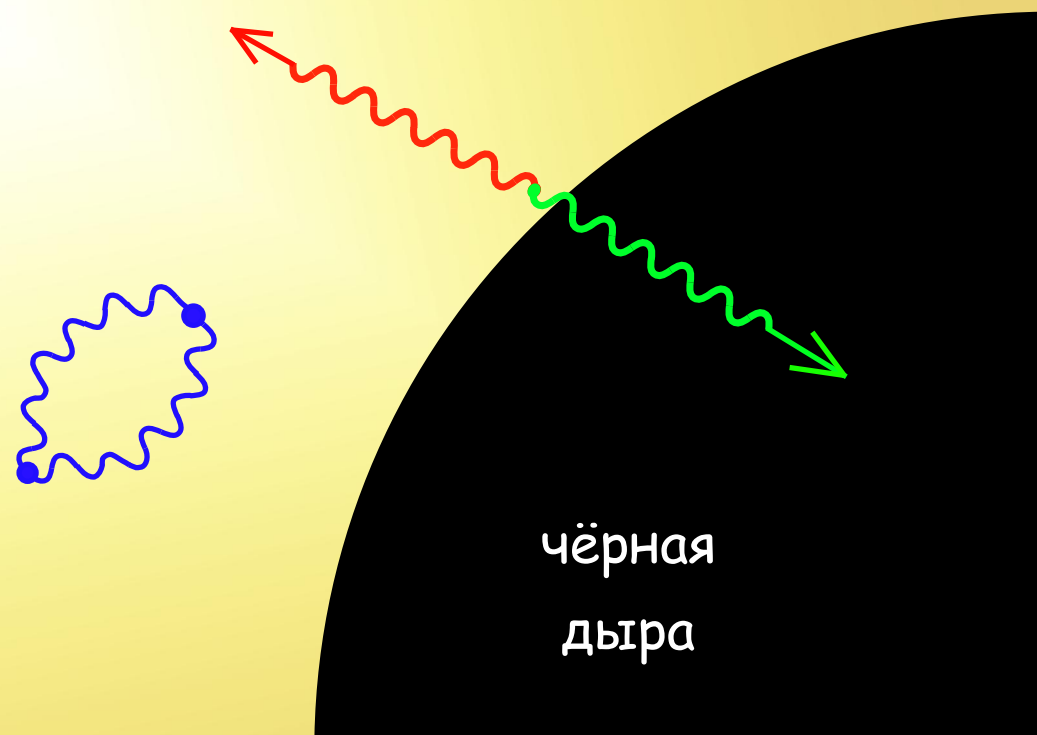
$$T_H \sim \frac{1}{R_H} \sim \left[\frac{(M_{PL}^{(D)})^{D-2}}{M_H} \right]^{\frac{1}{D-3}}$$

✓ мощность излучения

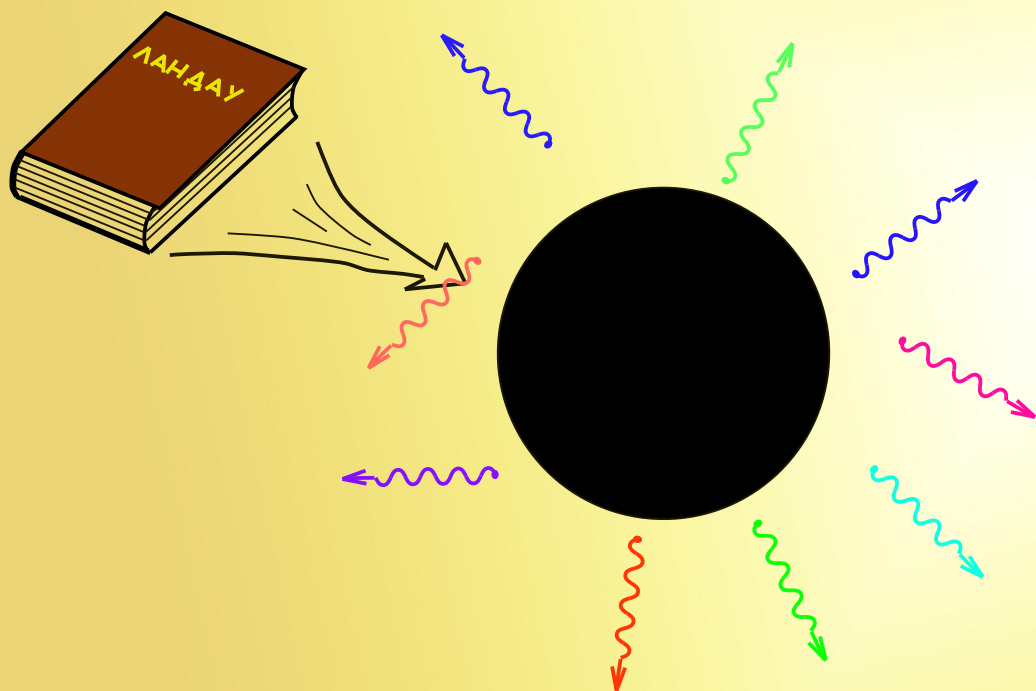
$$\Lambda \sim T_H^D R_H^{D-2} \sim T_H^4 R_H^2 \sim \frac{1}{R_H^2}$$

✓ время жизни

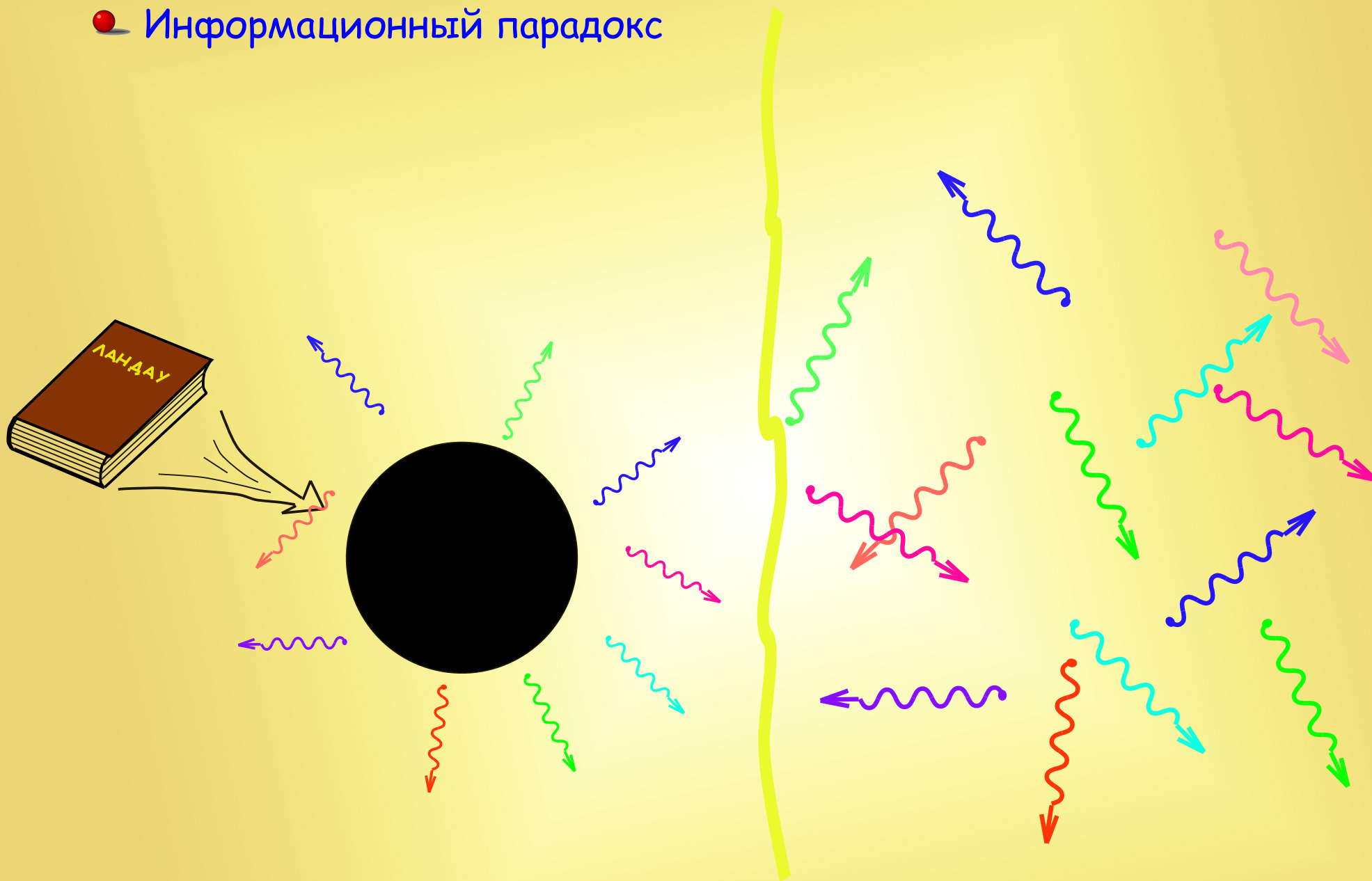
$$t_H \sim \frac{M_H}{\Lambda} \sim \frac{1}{M_{PL}^{(D)}} \left[\frac{M_H}{M_{PL}^{(D)}} \right]^{\frac{D-1}{D-3}} \sim 10^{-27} \text{ с}$$



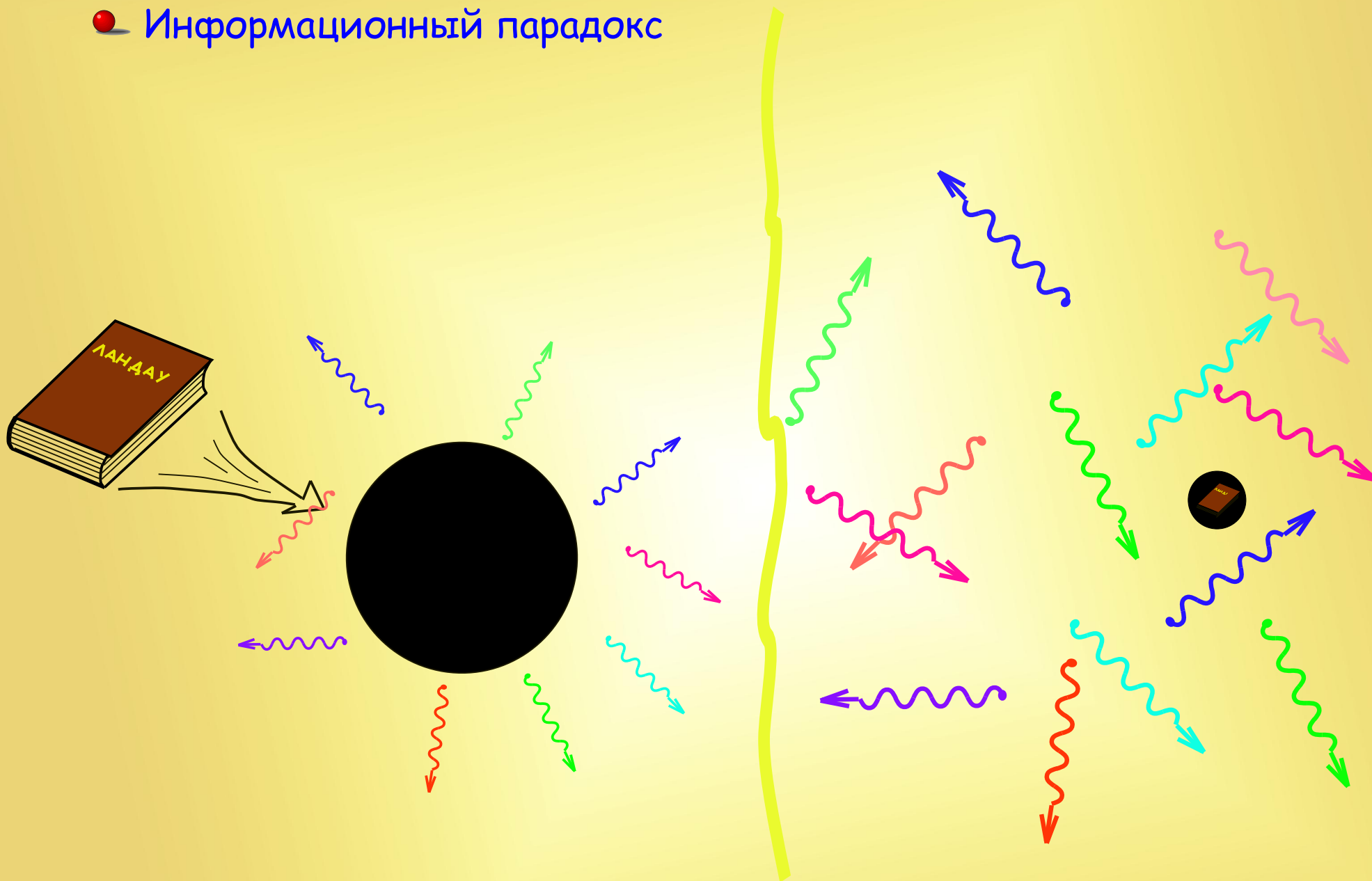
Информационный парадокс



Информационный парадокс



Информационный парадокс

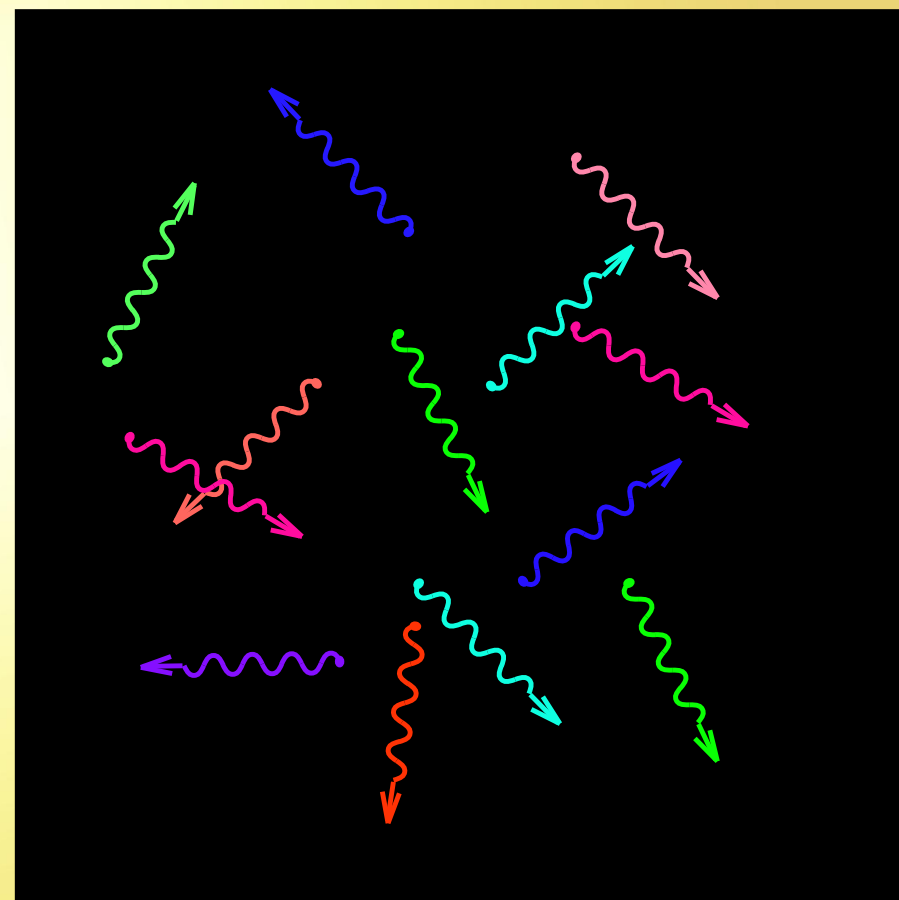


Апокалипсис

Если остатки чёрных дыр, рождённых на БАК, не исчезают, то они могут скапливаться в центре Земли, и тогда ...

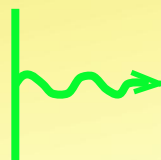


$10^6 \div 10^7$
лет



Ещё чёрные дыры

Первичные флуктуации
плотности → первичные
чёрные дыры



Космические лучи сверхвысоких
энергий

$$10^{19} \text{ эВ} = 10^7 \text{ ТэВ}$$

производят до 100 чёрных дыр в год.
Такие дыры не скапливаются в Зем-
ле.

Почему же все-таки три?

Проект ответа: потому, что при $d \neq 3$ жизнь невозможна.

Антропный принцип:

фундаментальные свойства природы,
включая размерность пространства,
таковы, что наше существование возможно.

На первый взгляд, лженаука. Но только на первый взгляд.

Теоретические идеи

(инфляционная теория ранней Вселенной; дочерние вселенные;
"ландшафт" теории суперструн):

- Вселенная гораздо больше, чем та ее часть, которую мы наблюдаем
- Свойства природы, в том числе размерность пространства, значения "фундаментальных" констант и т.д., различны в разных частях Вселенной
- Мы там, где подходящие законы и константы

НАШЕ СУЩЕСТВОВАНИЕ -- ПРОСТО ОДИН ИЗ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ФАКТОВ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ
ОКРУЖАЮЩУЮ НАС ОБЛАСТЬ ВСЕЛЕННОЙ

Нас же не удивляет, что на Земле температура от 220 до 320 градусов Кельвина, хотя в подавляющем большинстве мест во Вселенной

$$T = 2.7 \text{ K}$$

"Our location in the Universe
is necessarily privileged
to the extent of being compatible
with our existence as observers"

«Наше положение во Вселенной
с необходимостью выделено тем,
что оно совместимо
с нашим существованием как наблюдателей»

Брандон Картер, 1974



Заключение

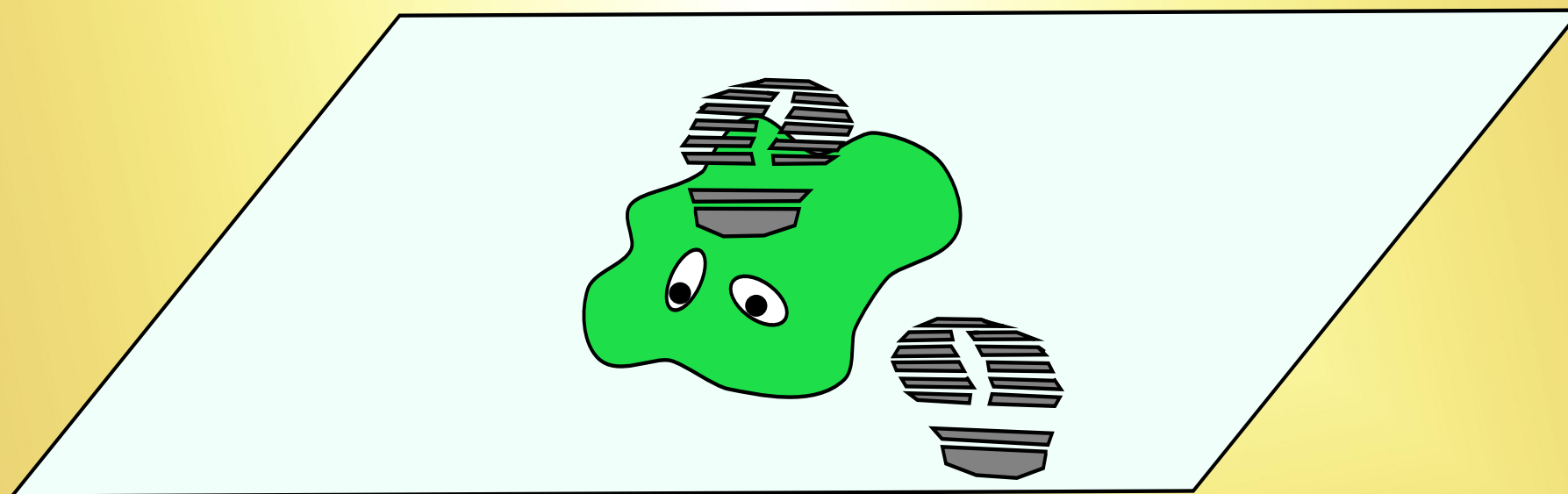
- Дополнительные измерения скорее всего существуют
 - Их размер может быть порядка $L_{pL} \simeq 10^{-33}$ см $\Rightarrow$ экспериментально необнаружимы
 - Но размер может быть и гораздо бóльшим $\Rightarrow$ обнаружимы в экспериментах при высоких энергиях. Возможно, на Большом адронном коллайдере.

- Большие дополнительные измерения могут объяснить многие актуальные вопросы современной физики, такие как
 - ✓ проблему калибровочной иерархии;
 - ✓ проблему происхождения фермионных поколений;
 - ✓ проблему иерархии фермионной массовой матрицы;
 - ✓ проблему массы нейтрино;
 - ✓ проблему космологической постоянной и темной материи;
 - ✓ ...и многие другие.

- Теории с большими дополнительными измерениями предсказывают множество новых явлений и эффектов, таких как
 - ✓ исчезновение частиц «в никуда»;
 - ✓ модификацию гравитации на сверхгалактических масштабах;
 - ✓ редкие процессы;
 - ✓ рождение квантовых чёрных дыр на ускорителях;
 - ✓ ...и многие другие.

- Теории с большими дополнительными измерениями предсказывают множество новых явлений и эффектов, таких как
 - ✓ исчезновение частиц «в никуда»;
 - ✓ модификацию гравитации на сверхгалактических масштабах;
 - ✓ редкие процессы;
 - ✓ рождение квантовых чёрных дыр на ускорителях;
 - ✓ ...и многие другие.
- Модели с большими дополнительными измерениями еще далеки от завершения:
 - 👉 до сих пор не построен приемлемый механизм локализации калибровочных полей;
 - 👉 не решена проблема сильной связи или возникновения духов в моделях с модифицированной гравитацией;
 - 👉 ...и многие другие.

Неудивительно, что эти модели интересны и увлекательны.



Неудивительно, что эти модели интересны и
увлекательны.

Осталось только открыть дополнительные измерения. . .

