

Сигнал зарождения горячей Вселенной в реликтовых гравитационных волнах

Маркин Иван

Физический Факультет,

Московский Государственный Университет

iv.markin@physics.msu.ru

Научный руководитель

Дмитрий Горбунов

Институт Ядерных Исследований,

Российская Академия Наук

gorby@ms2.inr.ac.ru

16 мая 2013 г.

Аннотация

По современным представлениям, структуры во Вселенной, такие как карликовые и большие галактики, их группы и скопления, образовались в результате быстрого роста пространственных неоднородностей материи в эпоху доминирования во Вселенной нерелятивистских частиц (“пыли”). При этом давление в среде отсутствует и неоднородности начинают быстро расти из-за гравитационной неустойчивости.

Весьма вероятно, что подобная эпоха “без давления” реализовалась во Вселенной до ее разогрева, сразу после окончания инфляционной стадии развития. Тогда аналогичные современным структурами могли формироваться, но не из неоднородности материи, а из

неоднородностей инфлатона, доминирующего в ту эпоху. Во время разогрева инфлатонное поле исчезает, рождая релятивистские частицы плазмы, и данные структуры пропадают.

Однако, процесс образования и эволюции данных структур сопровождается испусканием гравитационных волн, доживающих до наших дней. Гравитационные волны рождаются при коллапсе неоднородностей в гало, при слиянии двух густоков, а также при распаде гало инфлатона на релятивистские частицы. Параметры данных волн можно оценить исходя из геометрии гало и характерных времен процессов.

1 Введение

Как известно, классическая космологическая теория (теория горячего Большого взрыва) испытывает некоторые трудности¹ при описании процессов, происходивших в ранней Вселенной. Одной из гипотез, решающих данные вопросы, является инфляционная модель Вселенной, в которой закон изменения масштабного фактора со временем на ранних стадиях вводится как

$$a(t) \simeq a_0 e^{Ht}, \quad (1)$$

т.е. параметр Хаббла не меняется со временем.

Основной идеей инфляционной теории является введение некого скалярного поля ϕ и его потенциала $V(\phi)$.

Сразу после окончания инфляционной стадии, до разогрева, во Вселенной присутствует поле инфлатона. Это поле, как и все остальные, испытывает квантовые флуктуации, образующие неоднородности плотности инфлатона в ранней Вселенной. После входа волн под горизонт эти возмущения нарастают, а затем происходит коллапс неоднородностей инфлатона, при котором испускаются гравитационные волны. В данной работе произведена оценка для гравитационного сигнала от этого коллапса.

¹Проблемы горизонта, первичных возмущений, плоскостности, энтропии довольно подробно рассмотрены в [3].

2 Излучение гравитационных волн

Гравитационные волны существуют, если скорость распространения взаимодействия (возмущения поля) конечна². Механизм генерации гравитационных волн вытекает автоматически из общей теории относительности (ОТО). Но можно также сделать грубые оценки, введя искусственно некоторую задержку при распространении возмущения гравитационного потенциала в ньютоновской теории тяготения.

2.1 Излучение ГВ в ньютоновской теории тяготения

Как было показано в [2], искусственно вводя задержку в распространение гравитационного потенциала, мы получаем, что

$$h \simeq \frac{G}{2c^4} \ddot{I}_{ij} \frac{n_i n_j}{r} \quad (2)$$

2.2 Квадрупольное приближение для излучения в ОТО

Согласно [4], амплитуда гравитационных волн дается следующей формулой

$$h \simeq \frac{2G}{c^4} \left(\ddot{I}_{ij} - \frac{1}{3} \ddot{I}_{kk} \delta_{ij} \right) \frac{n_i n_j}{x} \quad (3)$$

Формула (3) принципиально отличается от формулы (2) тем, что излучение зависит от поперечных компонент бесследового квадрупольного тензора

$$\breve{I}_{ij} = I_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} I_{kk}.$$

Таким образом, гравитационные волны в ньютоновском приближении продольные, а в ОТО - поперечные.

²Вообще говоря, в общем случае эта скорость не является постоянной. Однако в данной работе мы полагаем, что она не меняется за весь рассмотренный период и равна таковой сегодня.

3 Гравитационные волны коллапсирующего тела

Пренебрегая вращением³, можно считать, что при коллапсе будет излучаться волна как один всплеск и частота f

$$f \simeq t_{coll}^{-1} \quad (4)$$

4 Оценка второй производной квадрупольного момента

Как было сказано ранее, амплитуда в квадрупольном приближении имеет вид (3). Так как точного аналитического решения уравнений Эйнштейна для эллипсоидального коллапса на данный момент нет, будем считать, что время сближения материи примерно похоже (асимптотически) на аналогичное время в сферически симметричном коллапсе для пылевидной материи (решение Толмана [1]). Т.е. радиальная координата в сопутствующих координатах

$$r \propto (\tau_0 - \tau)^{\frac{2}{3}} \quad (5)$$

Т.к. точного решения нет, то необходимо оценить величину \ddot{I}_{ij} . Это можно сделать с помощью трех значений квадрупольного момента в определенный момент времени (в дальнейшем будем опускать индексы компоненты):

$$\ddot{I}_{ij} \approx \frac{I(t_{coll}) - 2I(t_{coll}/2) + I(0)}{t_{coll}^2} \quad (6)$$

Считая, что $I(t_{coll}) = 0$, $I(0) = I_0$

$$I(t_{coll}/2) \approx \frac{I(0)}{2^{\frac{4}{3}}} \approx 0.4I_0 \quad (7)$$

Тогда

$$\ddot{I}_{ij} \approx \frac{0.2I_0}{t_{coll}^2} \quad (8)$$

³Вращением, как вызванным коллапсом несферического тела, так и вращением, приобретаемым при наличии двух близких неоднородностей (двойная система)

Изначально неоднородность представляет из себя эллипсоид, распределение плотности - гауссово независимо по каждым трем осям с различными отклонениями $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$:

$$\rho = \rho_0 \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}^2}{\sigma_a^2} + \frac{\dot{y}^2}{\sigma_b^2} + \frac{\dot{z}^2}{\sigma_c^2} \right) \right), \quad (9)$$

где ρ_0 - плотность в центре эллипсоида.

Из условия нормировки

$$M = \int \rho dV = \frac{\rho_{bg} V_H}{10^{15}}$$

получаем, что

$$A = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma_a \sigma_b \sigma_c = 10^{-15} \frac{\pi}{6} l_H^3.$$

Для эллипсоида квадрупольный момент вычисляется как

$$I_0 = \int \rho (2\dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2) d\dot{x} d\dot{y} d\dot{z}, \quad (10)$$

где интегрирование идет по всему пространству. Эта оценка сделана для упрощения результата, причем “хвосты” распределений не дают существенного вклада в интеграл. Переходя к новым переменным

$$x = \frac{\dot{x}}{\sigma_a}, y = \frac{\dot{y}}{\sigma_b}, z = \frac{\dot{z}}{\sigma_c},$$

получим:

$$I_0 = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma_a \sigma_b \sigma_c \rho_0 (2\sigma_a^2 - \sigma_b^2 - \sigma_c^2) \quad (11)$$

И окончательно:

$$I_0 = 10^{-15} \frac{\pi}{6} l_H^3 \rho_0 (2\sigma_a^2 - \sigma_b^2 - \sigma_c^2) \quad (12)$$

5 Усреднение по Вселенной

При образовании, гало расположены на случайном расстоянии друг от друга. Пусть это расстояние имеет среднее значение, которое мы обозначим как d . Тогда можно вычислить вклад от различных источников в

первом приближении, просуммировав вклад каждого источника, находящегося в узле некой решетки с характерным расстоянием (периодом решетки) d . Тогда “эффективное” расстояние

$$\bar{r}^{-1} = \frac{8}{d} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i^2 + j^2 + k^2}} \equiv \chi d^{-1} \quad (13)$$

Данный ряд сходится достаточно медленно. Воспользуемся следующим методом. Найдем первые частичные суммы (чем больше, тем точнее результат), и попытаемся найти вид функции и соответствующую асимптоту.

С помощью простой программы

```
#!/usr/bin/env python
import math

summ = 0
for i in xrange(0,60):
    for j in xrange(0,60):
        for k in xrange(0,60):
            summ = summ + 1.0/math.sqrt(i*i+j*j+k*k)
print str(i)+', '+str(j)+', '+str(k)+', '+str(summ)
```

получим значения частичных сумм как функцию итерации. График этой зависимости представлен на Рис. 1.

Нетрудно заметить, что график напоминает характерный вид для распада, т.е. функцию вида

$$y = y_0 - A \exp\left(-\frac{x}{\tau}\right)$$

Проведя фиттирование для полученных данных, найдем, что

$$y_0 = 7709.7 \pm 0.4,$$

причем коэффициент детерминации $R^2 = 0.999998$, что говорит о том, что наше предположение о виде функции оказалось верным. И, в результате

$$\chi \approx 6.17 \times 10^4 \quad (14)$$

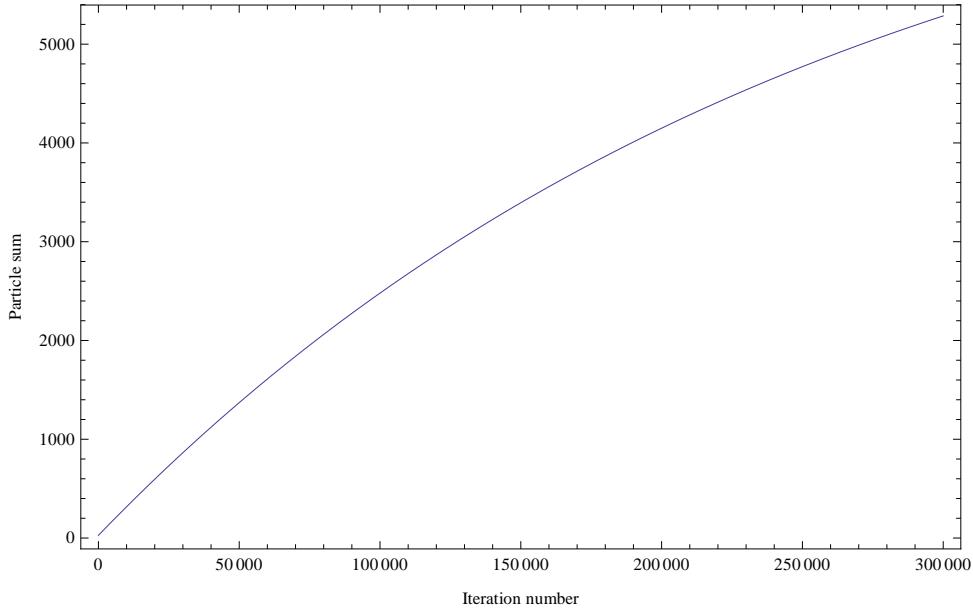


Рис. 1: Вид сходящегося ряда

6 Среднее значение квадрупольного момента во Вселенной

Как было найдено Дорошкевичем [5], распределение вероятности собственных значений λ_i тензора деформаций Зельдовича [6] в статистике гауссового случайного поля дается следующей нетривиальной формулой:

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{15^3}{8\pi\sqrt{5}\sigma^6} \exp\left(-\frac{3\delta^2}{\sigma^2} + \frac{15T}{2\sigma^2}\right) \times (\lambda_1 - \lambda_2) \times (\lambda_2 - \lambda_3) \times (\lambda_1 - \lambda_3), \quad (15)$$

где

$$\delta \equiv \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$T \equiv \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$$

Величина σ обозначает вариацию спектра мощности материи. В нашем случае σ - это “объем” возмущенного состояния “под горизонтом”, т.е. $\sigma = \delta_i^{-3}$.

Введем размерную нормировочную константу⁴ $k = 1 \text{ м}$ следующим образом:

$$\vec{\sigma} = k\vec{\lambda},$$

где $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c)$, а $\vec{\lambda} \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Тогда среднее значение начального квадрупольного момента в направлении x

$$\bar{I}_0 = 10^{-15} \frac{\pi}{6} l_H^3 \rho_0 k^2 \int_0^\infty d^3 \lambda p(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \times (2\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) \quad (16)$$

Вычисление данного интеграла довольно трудоемкое, поэтому оценим его значение.

6.1 Оценка по наивероятнейшему значению

Найдем максимум распределения вероятности $p(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, отвечающий действительным⁵ корням. Один из максимумов, значение в которых одинаково, достигается при

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{5}{7}}\sigma, \lambda_2 = \frac{-(1 + \sqrt{15})\sigma}{\sqrt{21} - 3\sqrt{35}}, \lambda_3 = \frac{\sigma}{\sqrt{21}}$$

И тогда наивероятнейшее значение I_0

$$\bar{I}_0 \approx 1.24 \times 10^{-15} \frac{\pi}{6} l_H^3 \rho_0 k^2 \sigma^2 \quad (17)$$

и примерно соответствует среднему значению.

7 Характерное расстояние между источниками

Сразу после завершения инфляционной стадии относительная вариация плотности

$$\frac{\delta \rho}{\rho} \simeq \delta_i \equiv 10^{-5} \quad (18)$$

⁴Данная константа играет роль поправки для краевых эффектов (например, увлечение граничных слоев хаббловским потоком). Эта поправка зависит от выбранной модели, однако имеет порядок единицы, так что в дальнейшем будем полагать ее равной единице.

⁵Рассмотрение комплексных корней может также иметь определенный физический смысл, но в нашем рассмотрении ограничимся только действительными корнями.

Возмущения начинают расти только после их входа “под горизонт”, т.е. при достижении выполнения условия $\lambda = 2\pi l_H$ [3, стр. 49]. При этом

$$l_H = \frac{M_{Pl}}{T^2} \propto a^2(t)$$

При входе возмущения “под горизонт” реализуется линейный режим, т.е. вариация плотности растет как

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho} \propto a(t)$$

В тот момент, когда возмущения доросли до уровня, когда $\delta \sim 1 \equiv \delta_{nl}$, начинается нелинейный режим, т.е. происходит образование гравитационно связанный системы⁶, и неоднородность коллапсирует в результате гравитационной неустойчивости. Именно на этом этапе излучается большая часть гравитационных волн, поскольку здесь наблюдается максимум количества волн, успевших войти “под горизонт” до разогрева (до распада инфлатона). Температура в момент коллапса $T = 10^9 \text{ GeV}$ ⁷.

За время, пока неоднородности дорастают до $\delta \sim 1$, масштабный фактор a_f вырос по сравнению с начальным a_i как

$$a_f = 10^5 \times a_i \quad (19)$$

Поскольку длина волны возмущения растет как

$$\lambda \propto a(t),$$

то за это время “под горизонтом” окажется 10^{15} неоднородностей, коллапсирующих в момент, предшествующий разогреву. Зная объем горизонта и количество неоднородностей, получим среднее расстояние между источниками

$$d = 10^{-5} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{M_{Pl}}{T^2} \quad (20)$$

Численное значения для нашего рассмотрения

$$d = 1.6 \times 10^{-21} \text{ м}$$

⁶Влияние расширения Вселенной в нелинейном режиме мало по сравнению со вкладом гравитационных сил.

⁷Зависит от выбранной модели.

8 Плотность материи в постинфляционную эпоху

Фоновая плотность ρ_{bg} инфлатона в рассматриваемую эпоху - плотность фотонного газа с температурой $T = 10^9 \text{ GeV}$:

$$\rho_{bg} = \frac{W}{c^2} = \frac{1}{c^2} \frac{4\sigma_B}{c} T^4$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначением

$$2\rho_{bg} \approx 3 \times 10^{56} \frac{kg}{m^3} \quad (21)$$

9 Ожидаемый спектр реликтового излучения

Так как к началу коллапса $\delta \sim 1$, то плотность в центре неоднородности вдвое больше фоновой плотности, т.е. $\rho_0 = 2\rho_{bg}$.

Поскольку для безмассовых полей и амплитуда, и частота падают как $a^{-1}(t)$, то, учитывая все, найденное ранее, получим ожидаемую АЧХ⁸ гравитационных волн, испущенных в процессе коллапса неоднородностей (считая, что $aT = const$):

$$h_{sbo} = 0.33 \times 10^{-15} \frac{\pi}{6} l_H^3 \frac{G}{c^4} \frac{\chi}{d} \rho_0 k^2 \sigma^2 \left(\frac{T_0}{T} \right)^3 \times f^2 \quad (22)$$

$$h_{sbo} = \frac{1}{3} \times 10^{-10} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{2}{3}} \chi l_H^2 \frac{G}{c^4} \rho_0 k^2 \sigma^2 \left(\frac{T_0}{T} \right)^3 \times f^2 \quad (23)$$

А численное значение для нашей модели

$$h_{sbo} f^{-2} \approx 1.7 \times 10^{-30} \text{ c}^2 \quad (24)$$

Полученный спектр сравнивается со спектром чувствительности лазерного гравитационного интерферометра Advanced LIGO на Рис. 2.

⁸АЧХ - амплитудно-частотная характеристика.

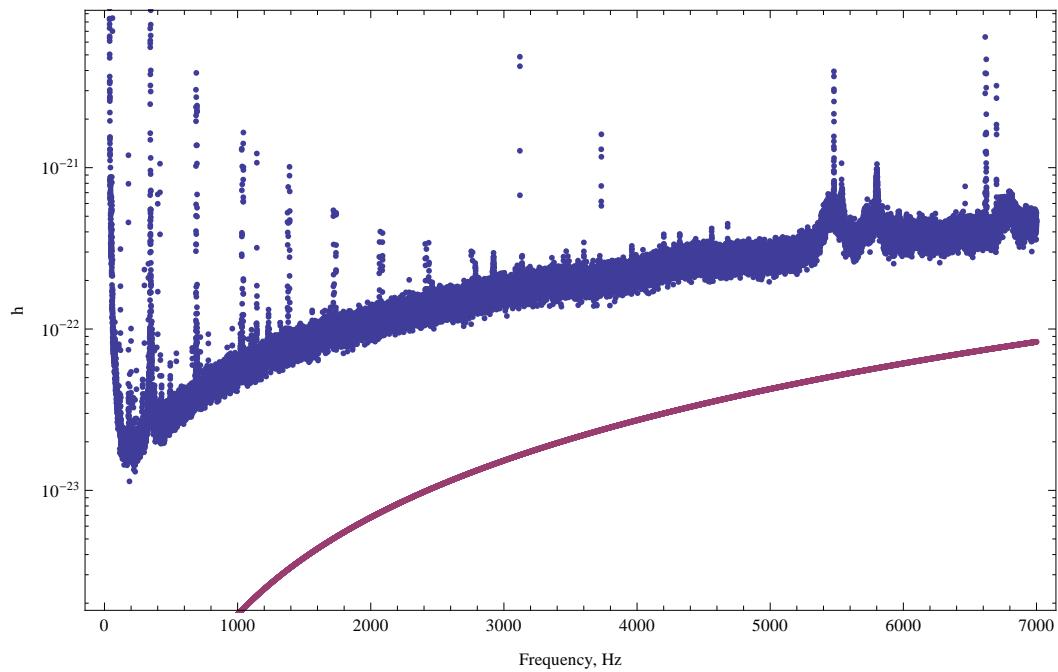


Рис. 2: Ожидаемый спектр

10 Выводы

В результате работы был оценен спектр гравитационных волн, рожденных при коллапсе гало из инфлатона в эпоху разогрева. Данный спектр был сравнен с чувствительностью современных детекторов гравитационных волн.

10.1 Нерешенные проблемы

1. Ультрафиолетовая катастрофа
2. Точное аналитическое решение для коллапса неферического тела с заданной геометрией
3. Учет полного спектра мощности материи

11 Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля
2. B.F. Schultz, American Journal of Physics (1984)
3. Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной
4. V. Ferrari, The quadrupole formalism applied to binary systems
5. Дорошкевич А. Г., Астрофизика (1970)
6. Ya. B. Zeldovich, Astronomy & Astrophysics (1969)