Моделирование излучения гравитационных волн в постинфляционной Вселенной
Курсовая работа

Суздалов Глеб, 215 группа
Научный руководитель: член-корр. РАН, доктор физ.- мат. наук, Горбунов Д.С.

Физический факультет
18 мая 2020

Содержание

- Введение
- Тензор энергии импульса в постинфляционной вселенной
- Построение модели
- Численные методы
- Результаты
- Способ рассчета спектра гравитационных волн
- Заключение

Введение

- Рассмотрим Вселенную после стадии быстрого расширения: частицы на этой стадии формировали неоднородные структуры, что изменяло метрику и, следовательно, приводило к излучению гравитационных волн. Эти волны не могут быть измерены существующими способами, для их регистрации нужны намного большие длины плеч интерферометров, чем есть сейчас, но уже существует несколько проектов для измерения таких волн. Целью данной курсовой работы является численное моделирование движения частиц в постинфляционной вселенной и расчет спектра гравитационных волн, которые излучались из-за изменения метрики.

Тензор энергии импульса в постинфляционной вселенной

- Интервал в таком случае будет иметь вид:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\vec{x}^2, \tag{1}$$

- Из уравнений Эйнштейна можно получить выражения для тензора энергии-импульса в таком пространстве:

$$3 \quad (\frac{1}{a^2(t)}(\frac{\partial a(t)}{\partial t})^2) = \frac{8\pi k}{c^4} T_{00}, \tag{2}$$

$$4 \quad (\frac{1}{a^2(t)}(\frac{\partial a(t)}{\partial t})^2 + \frac{1}{a(t)}\frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2})\delta_{ij} = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ij} \tag{3}$$

Построение модели

- После инфляции основная доля энергии содержалась в однородном скалярном поле. Действие для скалярного поля имеет вид:

$$S = \int \sqrt{-g}(\frac{1}{2}\partial\varphi_i\partial\varphi_j g^{ij} - V(\varphi))d^4x \tag{4}$$

- Будем считать, что потенциал и функция V имеют следующий вид:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2, \tag{5}$$

$$\varphi = \frac{e^{imt} \cdot f(\vec{x}, t)}{a^{\frac{3}{2}}(t)} \tag{6}$$

- Тогда варьируя действие по элементу φ и применяя условия$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \ll m$, $Hf \ll \partial_i f \ll mf$ приходим к уравнению, которое описывает изменение плотности массы во времени:

$$i\dot{f} = -\frac{\Delta f}{2ma^2(t)} \tag{7}$$

Построение модели

- Мы получили уравнения без учета возмущений метрики, для того чтобы их учесть необходимо добавить ь $m\Phi f$, причем $\Delta\Phi = 4\pi G m^2 \frac{|f|^2 - |f_0|^2}{a(t)}$, где f_0 - среднее значение. Таким образом мы приходим с самосогласующейся системе уравнений:

$$i\dot{f} = -\frac{\Delta f}{2ma^2(t)} + m\Phi f, \tag{8}$$

$$\Delta = 4\pi G m^2 \frac{|f|^2 - |f_0|^2}{a(t)} = 4\pi G \varrho(\vec{x}, t) \tag{9}$$

Численные методы

- Перейдем к программным значениям величин:

$$f_{pr} = \frac{f}{f_0} \tag{10}$$

$$x_{pr} = x \cdot m \tag{11}$$

$$G_{pr} = G \cdot f_0^2 \tag{12}$$

- Для решения первого уравнения будем использовать псевдоспектральный метод:

$$\mathbf{Tf} = F^{-1}\mathbf{D}_T F\mathbf{f} \tag{13}$$

$$\mathbf{f}(t) = e^{-it\mathbf{H}} f_0 \tag{14}$$

$$e^{\tau\mathbf{H}} = e^{\tau\mathbf{V}/2} \cdot e^{\tau\mathbf{T}} \cdot e^{\tau\mathbf{V}/2} + o(\tau^3), \tag{15}$$

- Для решения второго уравнения будем использовать метод разложения в ряд Фурье:

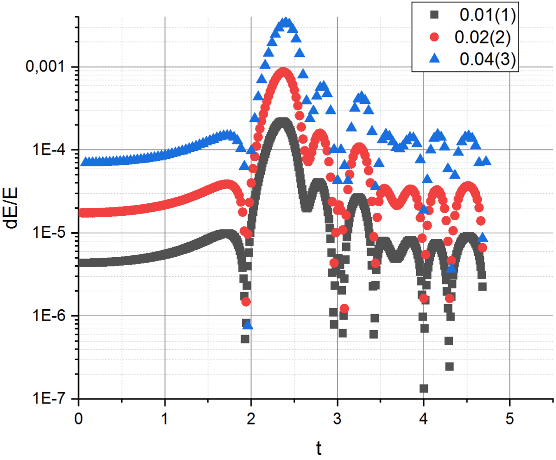
$$\tilde{\Phi}(\vec{k}) = -4\pi G \frac{\tilde{\varrho}(\vec{k})}{k^2} \tag{16}$$

- Для отладки программы будем решать уравнения без масштабного фактора и смотреть за сохранением нормы и полной энергии:

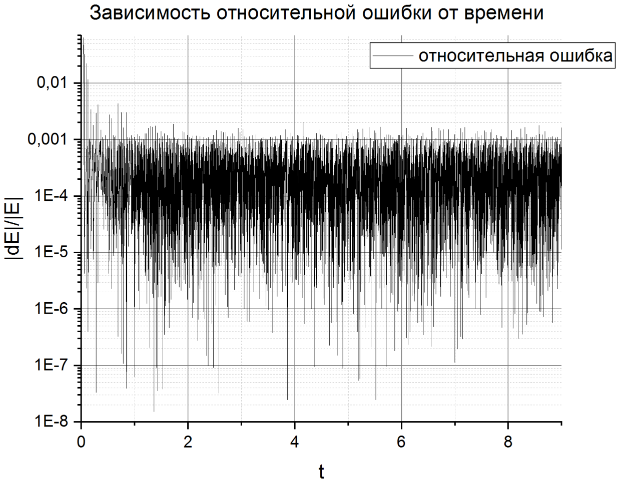
$$E = L^{-2} \cdot \sum_p \frac{p^2}{2m} |f_p|^2 + \Delta x^2 \sum_x \frac{m}{2} U(x) |f(x)|^2 \tag{17}$$

- Норма сохраняется с точностью $>10^{-15}$, относительная ошибка в энергии на шаге по времени dt порядка dt^2, график ошибки на всем интервале имеет следующий вид:

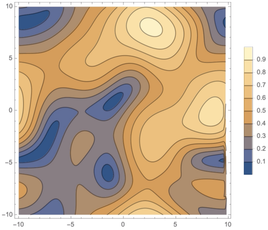
Зависимость ошибки от времени



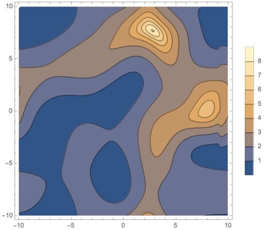
Зависимость ошибки от времени: адаптивный шаг



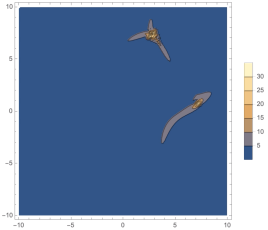
Эволюция поля без масштабного фактора



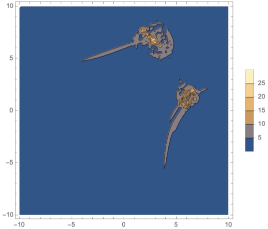
t = 0



t = 0.2



t = 0.3



t = 0.4

Рис.: Эволюция решения уравнения без масштабного фактора

Ускорение

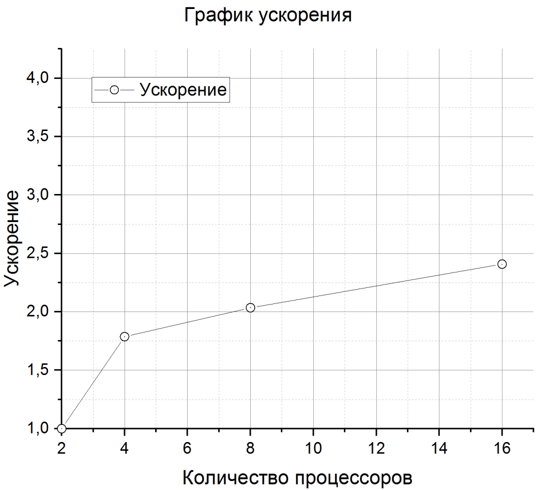
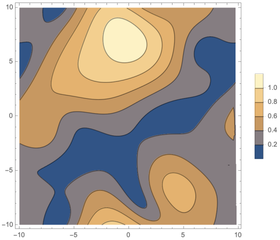
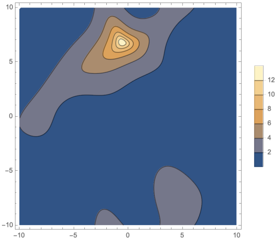


График ускорения
Ускорение
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
2
4
6
8
10
12
14
16
Количество процессоров

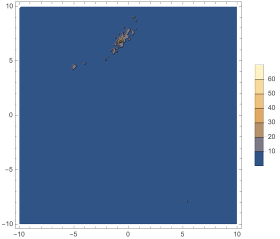
Эволюция поля с масштабным фактором



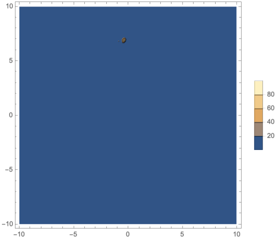
t = 0



t = 0.1



t = 0.3



t = 1.0

Рис.: Эволюция решения уравнения

Спектр гравитационных волн

- Тензор энергии-импульса для можно найти варьируя действие по элементам g_{ij}:

$$T_{ij} = \delta_{ij} a^3(t)(\partial_i \varphi)^2 \tag{18}$$

- Амплитуда колебаний метрики h_{ij} (1.23) удовлетворяет следующему уравнению (в Фурье пространстве):

$$h_{ij}(t,\vec{k}) = A_{ij}(\vec{k}) sin[k(t-t_f)] + B_{ij}(\vec{k}) cos[k(t-t_f)], \tag{19}$$

$$A_{ij} = \frac{2}{\vec{k} M_{Pl}^2} \int_{t_0}^{t_f} dt \cdot cos[k(t_f - t)] a(t) T_{ij}^{TT}(t,\vec{k}) \tag{20}$$

$$B_{ij} = \frac{2}{\vec{k} M_{Pl}^2} \int_{t_0}^{t_f} dt \cdot sin[k(t_f - t)] a(t) T_{ij}^{TT}(t,\vec{k}), \tag{21}$$

- где T_{ij}^{TT} - бесследовая часть пространственной энергии

Заключение

- Таким образом, используя полученные численные значения скалярного поля, в дальнейшем можно провести численный расчет спектра гравитационных волн, которые излучались в постинфляционной вселенной.

- Хочу выразить благодарность Александру Григорьевичу Панину за помощь при написании и отладки программы.

Список литературы

- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. : Теоретическая физика, т. 2
- Sergio Blanes, Fernando Casas, Ander Murua: Symplectic splitting operator methods for the time-dependent Schrodinger equation
- D.G. Levkov, A.G. Panin, and I.I. Tkachev: Gravitational Bose-Einstein condensation in the kinetic regime
- L. Arturo Urena-Lope: Non-relativistic approach for cosmological Scalar Field Dark Matter
- Karsten Jedamzik Martin Lemoine and Jerome Martin: Generation of gravitational waves during early structure formation between cosmic inflation and reheating

Спасибо за внимание!