МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА
Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

На правах рукописи

Белокуров Валерий Михайлович

Море Дирака

Курсовая работа

Научный руководитель:
Кандидат физ.-мат. наук,
Д.Г. Левков

Москва, 2011

Оглавление

Введение

При вторичном квантовании фермионного поля Дирака энергетический спектр оказывается неограниченным снизу. Данную трудность возможно обойти, используя принцип Паули. Вводится т.н. море Дирака. А именно, в качестве вакуумного состояния выбиратеся море Дирака - состояние с бесконечным количеством заполненных уровней. В этом случае принцип Паули предотвращает возбуждение состояний с отрицательной энергией.Таким образом, море Дирака и его возбуждения содержат бесконечное число частиц.

В связи с бесконечным количеством заполненных уровней возможны парадоксы. К примеру, частица, несущая квантовые числа, может "спрятаться" среди бесконечного количества энергетических уровней моря. Из-за этого может казаться, что заряд, который несет частица, исчез. В данной работе рассматривается один из таких парадоксов - нашем случае частица растворяется в море Дирака в результате адиабатического включения электрического поля.

Фермионы в ящике

Рассмотрим (1+1)—мерные свободные фермионы в ящике с периодическими граничными условиями. Эволюция во времени данной ститемы описывается нестационарным уравнением Дирака:

$$\hat{H}_D\Psi(x,t) = i\partial_t\Psi(x,t) \tag{1}$$

$$\hat{H}_D = \alpha\hat{p} + \beta m$$

с периодическими граничными условиями

$$\psi(0) = \psi(L) \tag{2}$$

где

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{p} = -i\partial_x$$

Стационарные состояния гамильтониана (1) имеют вид

$$\Psi_n(x) = Ae^{i(p_nx - E_nt)}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{E_n+p_n}{im} \end{pmatrix} + Be^{-i(p_nx+E_nt)}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{E_n-p_n}{im} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Откуда, используя граничные условия (2), получим значения энергии:

$$w_n =^{+}_{-} \sqrt{p_n^2 + m^2}, \qquad p_n = \frac{2\pi n}{L} \tag{4}$$

Для безмассовых свободных фермионов гамильтониан Дирака принимает вид

$$\hat{H}_D = \alpha\hat{p} \tag{5}$$

В этом случае стационарное состояния упрощаются:

$$\Psi_n(x) = \begin{pmatrix} Ae^{iE_n x} \\ Be^{-iE_n x} \end{pmatrix} e^{-iE_n t}, \tag{6}$$

где

$$E_n = \frac{2\pi n}{L}. \tag{7}$$

Выберем условие нормировки волновых функций :

$$\int \psi_n(x)^+ \psi_k(x)\ dx = \delta_{nk} \tag{8}$$

Величина $\psi(x)^+\psi(x)$ суть плотность вероятности обнаружить частицу в элементе объема dx.

Заметим, что в обоих рассмотренных случаях значение энергии не ограничено снизу. В случае с фермионами массой m между уровнями с положительной и отрицательной энергиями есть запрещенная область — щель размером $2m$. Для безмассового случая спектр также дискретен,но щель между положительными и отрицательными энергетическими уровнями пропадает.

Зададимся теперь вопросом о наинизшем состоянии системы(вакууме), не накладывая никаких ограничений на возможное количество частиц в системе. Ясно, что выгодно иметь как можно больше частиц на отрицательных уровнях. В то же, время частицы являются фермионами. По принципу Паули, в одном состоянии может находиться не более одной частицы. Следовательно, состоянием с наименьшей энергией будет такое, в котором все отрицательные уровни энергии заполнены(т.е. на каждом уровне с $E < 0$ находится по одному фермиону), а все положительные уровни — свободны. Систему заполненных отрицательных уровней называют морем Дирака, или вакуумом Дирака.

При отсчете импульса, энергии, электрического заряда и прочих параметров принимаем состояние дираковского вакуума за нулевое, т.е. за начало отсчета.

Добавим взаимодействие с электромагнитным полем.Будем считать,что заряд фермиона равен $e = +1$. Рассматрим электромагнитный потенциал вида

$$A_0 = -Zf(x) \qquad A_1 = 0, \tag{9}$$

где $f(x)$ - узкая функция, интеграл от которой равен 1 (гладкий аналог δ-функции).Для учета наличия электромагнитного поля, заменим производные в уравнении (1) на ковариантные:

$$\partial_t \to D_t = \partial_t - iA_0$$

$$\partial_x \to D_x = \partial_x - iA_1$$

Получим:

$$i\alpha D_x \Psi(x,t) = iD_t \Psi(x,t), \tag{10}$$

Выполнив элементарные преобразования, можно записать (10) в виде

$$(\hat{H}_D + \hat{H}_{int})\Psi(x,t) = i\partial_t \Psi(x,t), \tag{11}$$

где слагаемое $\hat{H}_{int} = -A_1\alpha - A_0$ - гамильтониан взаимодействия с электромагнитным полем. Найдем собственные значения и собственные функции гамильтониана $\hat{H} = \hat{H}_D + \hat{H}_{int}$. Для этого представим волновую функцию в виде

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^L(x) \\ \psi^R(x) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $\psi^L(x)$ и $\psi^R(x)$ - волновые функции левых и правых фермионов. Легко видеть,что уравнение Дирака в данном случае расщепляется на два независимых уравнения. Собственные функции гамильтониана (11) имеют вид:

$$\psi_n^L(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i(Z\int f(x)dx + E_n x)}, \psi_n^R(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i(Z\int f(x)dx + E_n x)} \tag{13}$$

А энергия соответствующих уровней равна :

$$E_n^L = E_n^R = \frac{2\pi n - Z}{L} \tag{14}$$

Исчезновение заряда

Пусть некоторый параметр гамильтониана Дирака изменяется адиабатически медленно во времени. Тогда, согласно адиабатической теореме, проиллюстрированной в *Приложении*, это изменение не приведет к пересоку частиц на другие уровни мгновенного гамильтониана.

Выше мы получили собственные функции (13) и спектр (14) гамильтониана Дирака. Заметим, что при адиабатическом изменении Z на $2\pi n, n \ =^{+}_{-} 1,^{+}_{-} 2,^{+}_{-} 3, ...,$ волновые функции (13) не меняются.
Рассмотрим адиабатически медленное изменение параметра Z от нулевого значения до значения $Z = 2\pi k$. При этом уровни энергии адиабатически движутся вниз;в конце процесса ровно k правых и k левых уровней освободятся. Кажется, что заряд системы при этом уменьшился на $2k$.

Закон сохранения электрического заряда, вообще говоря, является одним из фундаментальных законов природы. Несохранение электрического заряда, если оно действительно имеет место, ставит под сомнение самосогласованность модели Дирака. К счастью,этот парадокс легко решается при помощи вторичного квантования.

Разрешение парадокса

Введем операторы рождения и уничтожения $\widehat{a}_n^+, \widehat{a}_n$ левых фермионов с волновыми функциями $\psi_n^L(x)$, и опрераторы рождения и уничтожения $\widehat{b}_n^+, \widehat{b}_n$ правых фермионов с волновыми функциями $\psi_n^R(x)$,вторичноквантованные фермионные операторы имеют вид:

$$\widehat{\psi}_L(x) = \sum_n \psi_n^L(x)\widehat{a}_n \tag{15}$$

и

$$\widehat{\psi}_R(x) = \sum_n \psi_n^R(x)\widehat{b}_n \tag{16}$$

Отметим коммутационные свойства операторов рождения - уничтожения :

$$\{\widehat{a}_n^+, \widehat{a}_k^+\} = \{\widehat{b}_n^+, \widehat{b}_k^+\} = 0 \qquad \{\widehat{a}_n, \widehat{a}_k^+\} = \{\widehat{b}_n, \widehat{b}_k^+\} = \delta_{nk} \tag{17}$$

Под фигурными скобками здесь понимаются антикоммутаторы. Отметим, что

операторы $\widehat{a}_n^+, \widehat{b}_n^+$, действующие на заполненный уровень дираковского вакуума, аннигелируют его. Также аннигелируют вакуум операторы $\widehat{a}_n, \widehat{b}_n$, действующие на свободный уровень. Условие аннигиляции вакуума Дирака, согласно (14), можно записать в следующем виде:

$$n > \frac{Z}{2\pi} \tag{18}$$

Для дальнейших вычислений нам понадобятся коммутационные соотношения:

$$\{\widehat{\psi}_L^+(x), \widehat{a}_n^+\} = (\psi_n^L(x))^+, \qquad \{\widehat{\psi}_R^+(x), \widehat{b}_n^+\} = (\psi_n^R(x))^+,$$

$$\{\widehat{\psi}_L(x), \widehat{a}_n\} = (\psi_n^L(x)), \qquad \{\widehat{\psi}_R(x), \widehat{b}_n\} = (\psi_n^R(x)),$$

следующие из (14),(15) и (16). Вычислим плотность заряда вакуума, определяемую с помощью вторичноквантованных фермионных операторов как:

$$\rho = \langle \widehat{\psi}_L^+(x) + \widehat{\psi}_R^+(x), \widehat{\psi}_L(x) + \widehat{\psi}_R(x) \rangle \tag{19}$$

Усреднение в (19) проводится по дираковскому вакууму. Вообще говоря, величина ρ равна бесконечности вследстиве пристутсвия в море Дирака бесконечного числа уровней.Поэтому, для того,чтобы получить конечное значение изменения плотности заряда вакуума, воспользуемся регуляризацией, в качестве которой используем раздвижку точек операторов:

$$\rho_{L,R}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big[\langle \widehat{\psi}^+_{L,R}(x-\varepsilon)\, \widehat{\psi}_{L,R}(x+\varepsilon) \rangle_{Z=2\pi m} - \\ - \langle \widehat{\psi}^+_{L,R}(x-\varepsilon)\, \widehat{\psi}_{L,R}(x+\varepsilon) \rangle_{Z=0} \Big] \tag{20}$$

В результате вычислений, используя выражения (12) и (13) для полученных собственных функций и спектра дираковского гамильтониана, и подставляя их в (18), получаем значение плотности заряда вакуума для систем со значением параметра $Z = 2\pi k$:

$$\rho(x) = \sum_{n > \frac{Z}{2\pi}} \psi_n^+(x-\varepsilon)\psi_n(x+\varepsilon) = 2\frac{Zf(x)}{2\pi} \tag{21}$$

Для получения полного заряда следует проинтегрировать полученную величину по полному пространству. Отсюда получаем заряд вакуума δQ:

$$\delta Q = \int 2\frac{Zf(x)}{2\pi} dx = 2k \tag{22}$$

Таким образом, мы получили, что адиабатическое включение электромагнитного поля с потенциалами (8), приводит к изменению плотности заряда вакуума.При изменении параметра Z от нуля до $2\pi k$, плотность заряда вакуума увеличивается на величину $2\frac{Zf(x)}{2\pi}$, что соответствует тому, что $2k$ фермионов "растворилось"в бесконечном числе уровней моря Дирака. Заметим, что выполнено соотношение $Q_{Z=0} = Q_{Z=2\pi k} - 2k$, где Q_Z — общий заряд вакуума при значении параметра Z. Это соотношение свидетельствует о выполнении закона сохранения электрического заряда.

Заключение

В заключение опишем результат, полученный в курсовой работе:

— Показано, что при адиабатическом переходе $Z = 0 \to Z = 2\pi n$ ровно 2k частиц "растаяло"в море Дирака. В результате этого процесса у моря Дирака появился заряд с плотностью $\rho(x) = 2\frac{Zf(x)}{2\pi}$.

— Показано, что закон сохранения заряда выполняется. Адиабатическое включение электрического поля приводит к увеличению плотности заряда вакуума, но не приводит к изменению общего заряда.

Приложение

Рассмотрим море Дирака. Пусть параметры гамильтониана медленно зависят от времени.

Нестационарное уравнение Дирака для данного случая имеет вид:

$$H_D\Psi = i\partial_t\Psi \tag{23}$$

Пусть $\Psi = \Psi(\frac{t}{\tau})$

Предположим, что параметр τ - большой. Введем собственный вектор мгновенного гамильтониана Дирака ψ.Разложим вектор состояния ψ по базису волновых функций ϕ_n:

$$\psi = \sum_n a_n\phi_n \tag{24}$$

Получим:

$$i\sum_n(\partial_t a_n\phi_n + a_n\partial_t\phi_n) = \sum n(E_n a_n\phi_n) \tag{25}$$

Для нахождения коэффециентов разложения a_n умножим (23) на ϕ_k^+. Тогда получим выражение:

$$i(\partial_t a_k + a_k(\phi_k^+, \partial_t\phi_{k)}) = a_k E_k \tag{26}$$

Так как $\phi_n = \phi_n(\frac{t}{\tau})$, и учитывая, что τ - большое, можем принебречь слагаемым $a_k(\phi_k^+, \partial_t\phi_k) \propto \frac{a_k}{\tau}$. Тогда решение уравнения (24) в главном порядке по τ имеет вид:

$$a_k = C_k e^{-iE_k t} \tag{27}$$

Пусть в начальный момент времени частица находилась в состоянии

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, из (22) и (25) получаем решение нестационарного уравнения Дирака (21):

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e^{-iE_k t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Мы видим, что если изменение некоторого параметра гамильтониана происходит адиабатически медленно, то это изменение не приводит к перескоку частиц на другие уровни мгновенного гамильтониана Дирака. Данное утверждение носит название адиабатической теоремы.

Литература

[1] В.А. Рубаков. Классические калибровочные поля, УРСС, 1999.

[2] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика, Физматлит, 2008