

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
“МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА”

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

ДИПЛОМ

НЕСТАБИЛЬНОСТЬ ВРАЩАЮЩИХСЯ БОЗЕ-ЗВЕЗД

Выполнила студентка

443 группы

Пушная Е.К. _____
(подпись)

Научный руководитель:

кандидат физ.-мат. наук Левков Д.Г. _____
(подпись)

Научный консультант:

кандидат физ.-мат. наук Панин А.Г. _____
(подпись)

Допущен к защите _____
(дата)

Зав. кафедрой,

Рубаков В. А. _____
(подпись)

Москва

2020 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | | |
|---|----------------------------|----|
| 1 | Введение | 3 |
| 2 | Вращающаяся бозе-звезда | 4 |
| 3 | Численное решение | 5 |
| 4 | Распад звезды с $l=1$ | 7 |
| 5 | Моды распада | 10 |
| 6 | Звёзды с высоким моментом | 12 |
| 7 | Заключение | 15 |
| A | Численный метод | 16 |
| B | Точность численных решений | 18 |
| C | Метод перестрелки в 2D | 21 |

1 Введение

Бозе-звёзды - это гравитационно связанные сгустки конденсата Бозе - Эйнштейна [1,2]. Они могут быть релятивистскими Q-шарами [3,4,5], но в данной работе мы остановим внимание на нерелятивистских [6]. Такие объекты могут появляться во Вселенной при конденсации бозонов тёмной материи, например, аксионов [7]. Они интересны тем, что способны составлять часть массы тёмной материи; бозе-звёзды остаются тёмными, если их взаимодействие с частицами Стандартной Модели достаточно слабое. Они могут сформироваться в центре структур тёмной материи [8]. Исследование способов наблюдения бозе-звёзд и их физики является активно развивающимся разделом космологии [7,8,9,10,11].

Сами конфигурации бозе-звёзд тоже составляют предмет исследований: при различных параметрах теории можно предсказать появление звёзд многих размеров, которые могут образовывать гравитационно-связанные иерархические структуры [4]. Есть также вращающиеся бозе-звёзды [7], которые мы будем обсуждать в данной работе.

Мы рассмотрим вращающуюся бозе-звезду в нерелятивистском случае и получим численно её профиль в 3+1 измерениях. Мы покажем также, что все звёзды с ненулевым угловым моментом распадаются.

Мы будем работать в системе $\hbar = c = k = 1$.

2 Вращающаяся бозе-звезда

Мы работаем с системой уравнений Шрёдингера-Пуассона, задающей нерелятивистскую бозе-звезду:

$$i\partial_t\psi = -\frac{\Delta\psi}{2m} + mU\psi, \quad (1a)$$

$$\Delta U = 4\pi mG|\psi|^2, \quad (1b)$$

Где ψ - комплексное поле, описывающее бозе-звезду, U - потенциал, m - масса бозонов тёмной материи, G - гравитационная постоянная. При этом массу звезды и её энергию мы определяем как:

$$M = m \int d^3x |\psi|^2, \quad (2a)$$

$$E = \int d^3x \left[|\nabla\psi|^2/2m + mU|\psi|^2/2 \right]. \quad (2b)$$

Запишем стационарное решение уравнений (1) в виде:

$$\psi(r, \phi, z, t) = \psi_s(r, z) e^{il\phi - i\omega t}. \quad (3)$$

Здесь r, ϕ, z - цилиндрические координаты, t - время, ω и l - константы, имеющие физический смысл частоты и углового момента соответственно. Подставляя данный анзац в систему, мы получаем уравнение на $\psi_s(r, z)$.

$$\omega\psi_s = -\frac{\Delta_{rz}\psi_s}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2}\psi_s + mU\psi_s, \quad (4a)$$

$$\Delta_{rz}U = 4\pi mG|\psi_s|^2, \quad (4b)$$

где Δ_{rz} - лапласиан в координатах r и z . Эти уравнения мы будем решать численно, но сначала их нужно обезразмерить. Для этого мы делаем перешкалировку полей и координат: $r, z' = \frac{r, z}{\lambda}$, $\psi'_s = \frac{1}{m\lambda^2}\psi_s$, $U' = m^2\lambda^2(U - \omega/m)$. Выбрав λ , штрихи мы немедленно опускаем и получаем итоговые уравнения:

$$\Delta_{rz}\psi_s = \frac{l^2}{r^2}\psi_s + 2U\psi_s, \quad (5a)$$

$$\Delta_{rz}U = 4\pi|\psi_s|^2. \quad (5b)$$

3 Численное решение

Мы можем получить искомые стационарные решения при помощи релаксации в евклидовом и обыкновенном времени. Для $l=1$ мы запускаем временную эволюцию. Для этого мы берём полученное методом мультирешёток решение уравнений (5) в цилиндрических координатах и квадратично интерполируем его на квадратную трехмерную решётку. Обычно мы работаем с решёткой $N^3 = 256^3$. Мы также используем следующие параметры: $dt = 0.25$ - шаг по времени, $L = 200$ - размер ящика; так что $dx = L/N = 0.78125$. Процедура сходится с высокой точностью (см. Дополнение В).

Так как мы работаем с квадратной решёткой, у нас есть возможность точно поворачивать решение на углы, кратные $\pi/2$ при помощи преобразований, описанных в Дополнении А. Мы также поддерживаем звезду симметричной относительно $z \rightarrow -z$ и следим, чтобы её масса была равна 1. В ходе эволюции мы делаем шаг $\phi \rightarrow \exp[-i \cdot E \cdot dt] \phi$, сначала кинетический с использованием быстрого преобразования Фурье, а затем потенциальный. Следом эволюционирует потенциальная энергия; для данного ϕ мы решаем для неё уравнение Пуассона (5b), опять же, через преобразование Фурье. Подробнее процедура разобрана в дополнении А.

Полагая в уравнениях (5) $l=0$, получаем звезду, которая не вращается. Релаксацию мы проводим также, как описано выше, только без преобразования проекторов и добавив отражение по оси x и y . Нулевая мода выглядит так:

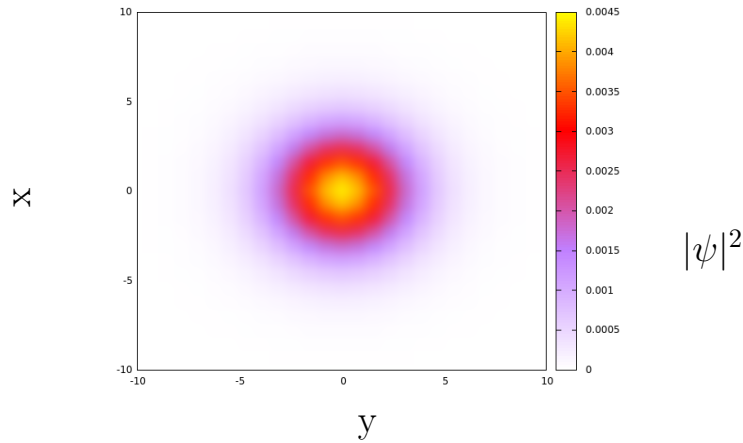


Рис. 1: Сечение звезды с $l=0$: $|\psi|^2$

Полагая в уравнении $l=1$, мы приходим к первой из вращающихся звёзд. Она напоминает по форме тор, как и все вращающиеся звёзды; это обусловлено необходимым требованием непрерывности звезды и её производных при $r=0$. Её асимптотика при приближении к нулю $\psi_s = c_1 \cdot r$.

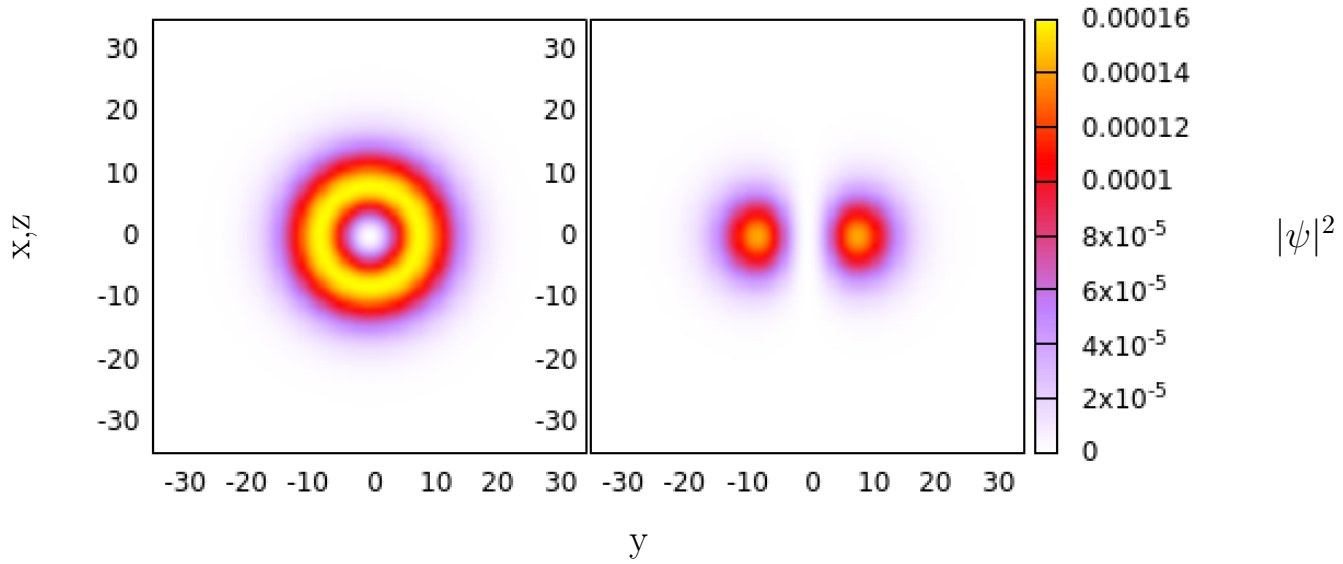


Рис. 2: Сечения звезды с $l=1$: $|\psi|^2$

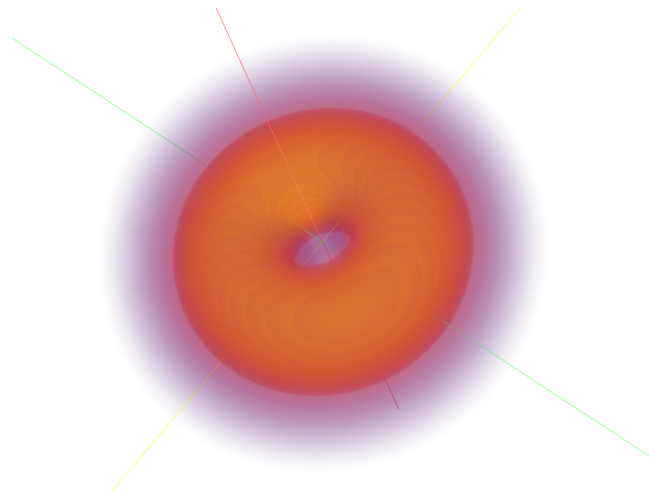


Рис. 3: Вид сбоку: $|\psi|$. $t=0$

4 Распад звезды с $l=1$

Как уже говорилось, звезда с $l=1$ распадается. Если мы возьмём полученное в предыдущей главе решение и запустим описанную выше временную эволюцию, произойдёт следующее.

Сначала звезда будет стационарна - что неудивительно, ведь мы достаточно близко подходим к собственной функции уравнения Шрёдингера. Затем мы увидим, что звезда распалась на два шара, вращающиеся относительно друг друга:

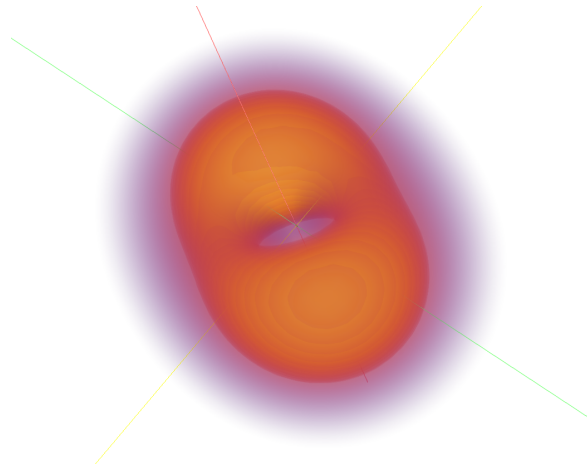


Рис. 4: Вид сбоку: $|\psi|$. $t=3000$

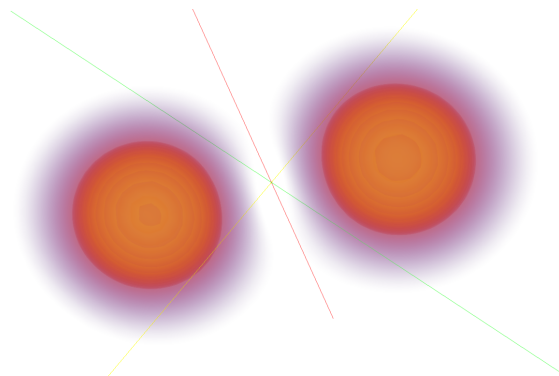


Рис. 5: Вид сбоку: $|\psi|$. $t=4500$

Эти звезды сольются вновь, разойдутся и, наконец, сольются навсегда, сломав изначальную структуру. Мы увидим присутствие 0 и 3 моды в разложении $\psi = \sum e^{im\phi} \psi_m$: плотный центр без вихря, характерный для невращающейся звезды, а вокруг - три минимума, обусловленных интерференцией 3 и 0 моды:

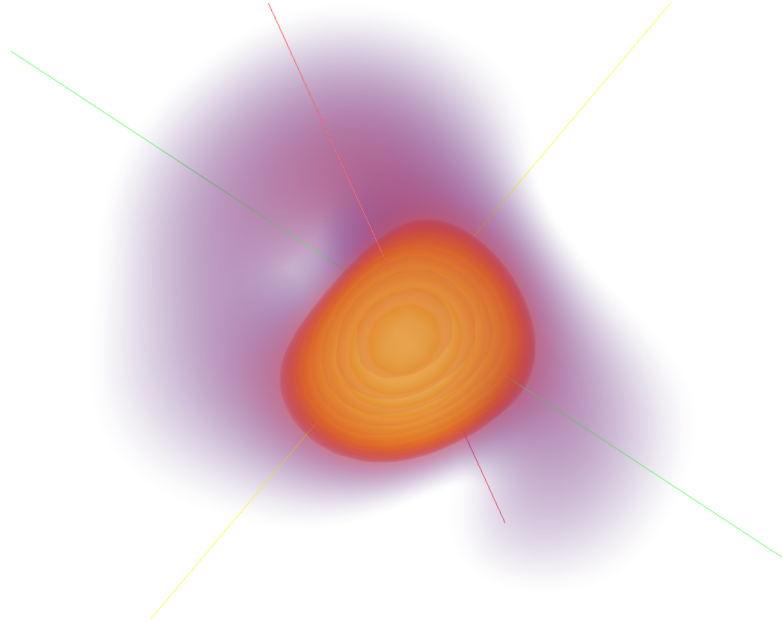


Рис. 6: Вид сбоку: $|\psi|$. $t=9500$

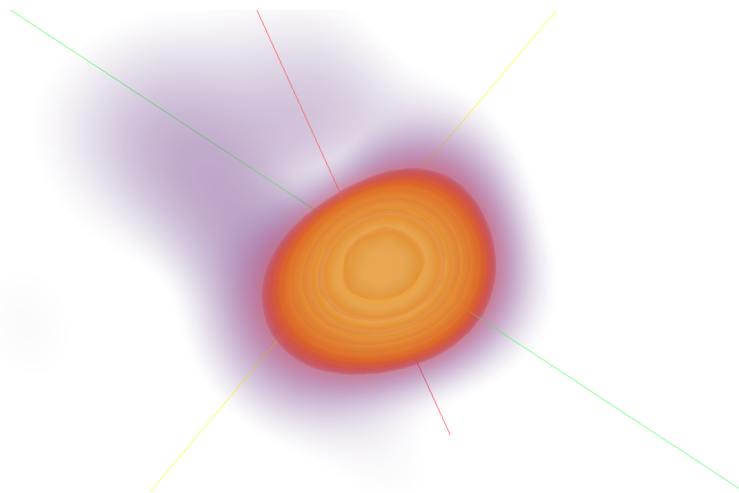


Рис. 7: Вид сбоку: $|\psi|$. $t=10500$

Нужно отметить, что к этому моменту значительная часть массы звезды оказывается рассыпанной по окружающему её пространству. На изображении это видно лишь отчасти, потому что в ходе его обработки были сделаны невидимыми числа меньше 0.002.

Уже когда звезда разделилась надвое, величина возмущений достигает порядка поля.

В конечном итоге мы видим ядро - нулевую моду:

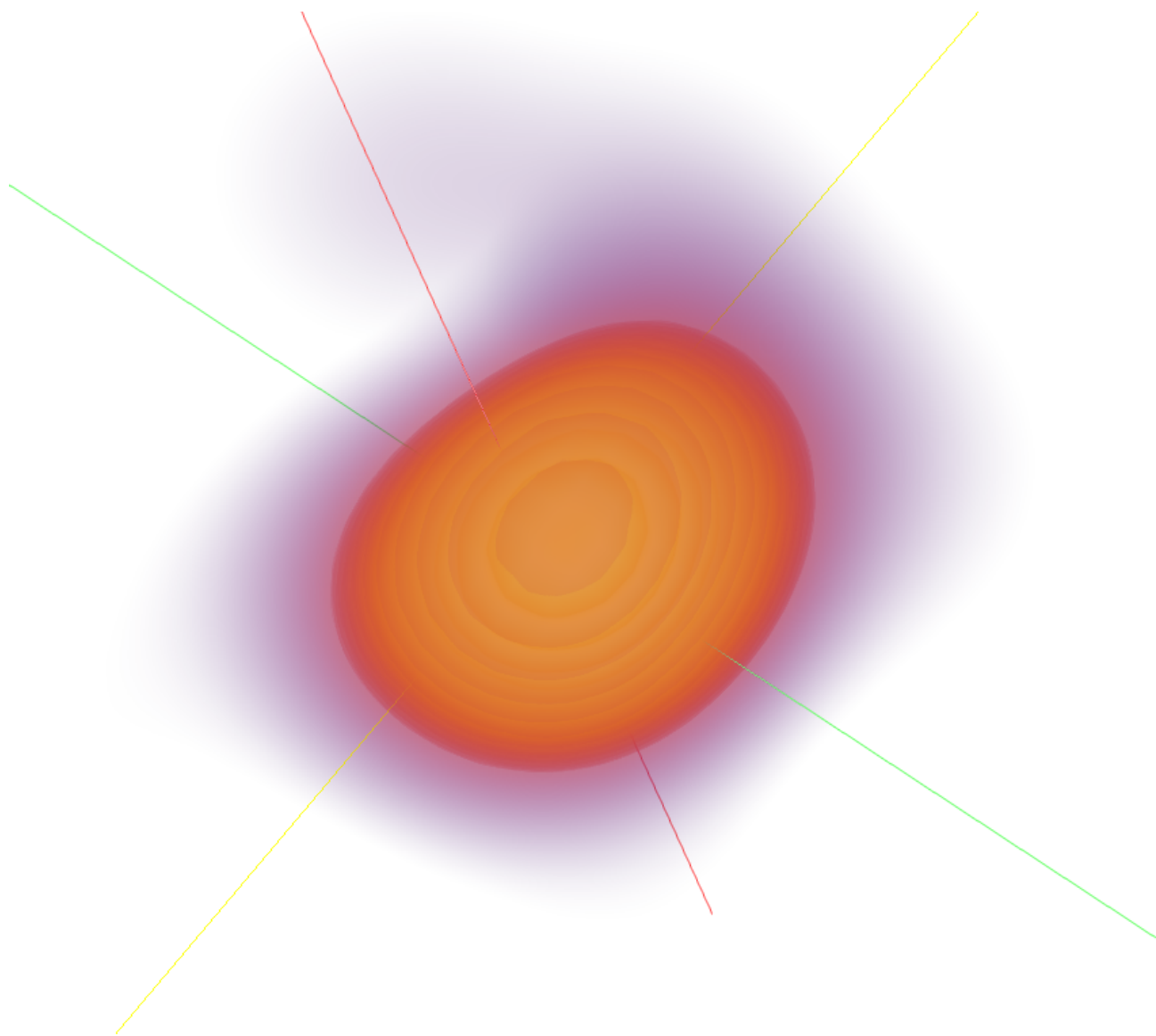


Рис. 8: Вид сбоку: $|\psi|$. $t=18500$

5 Моды распада

Зависимость $|\psi|_{max}$ - максимального по всей решётке модуля функции - от времени даёт хорошее представление о важных этапах распада звезды:

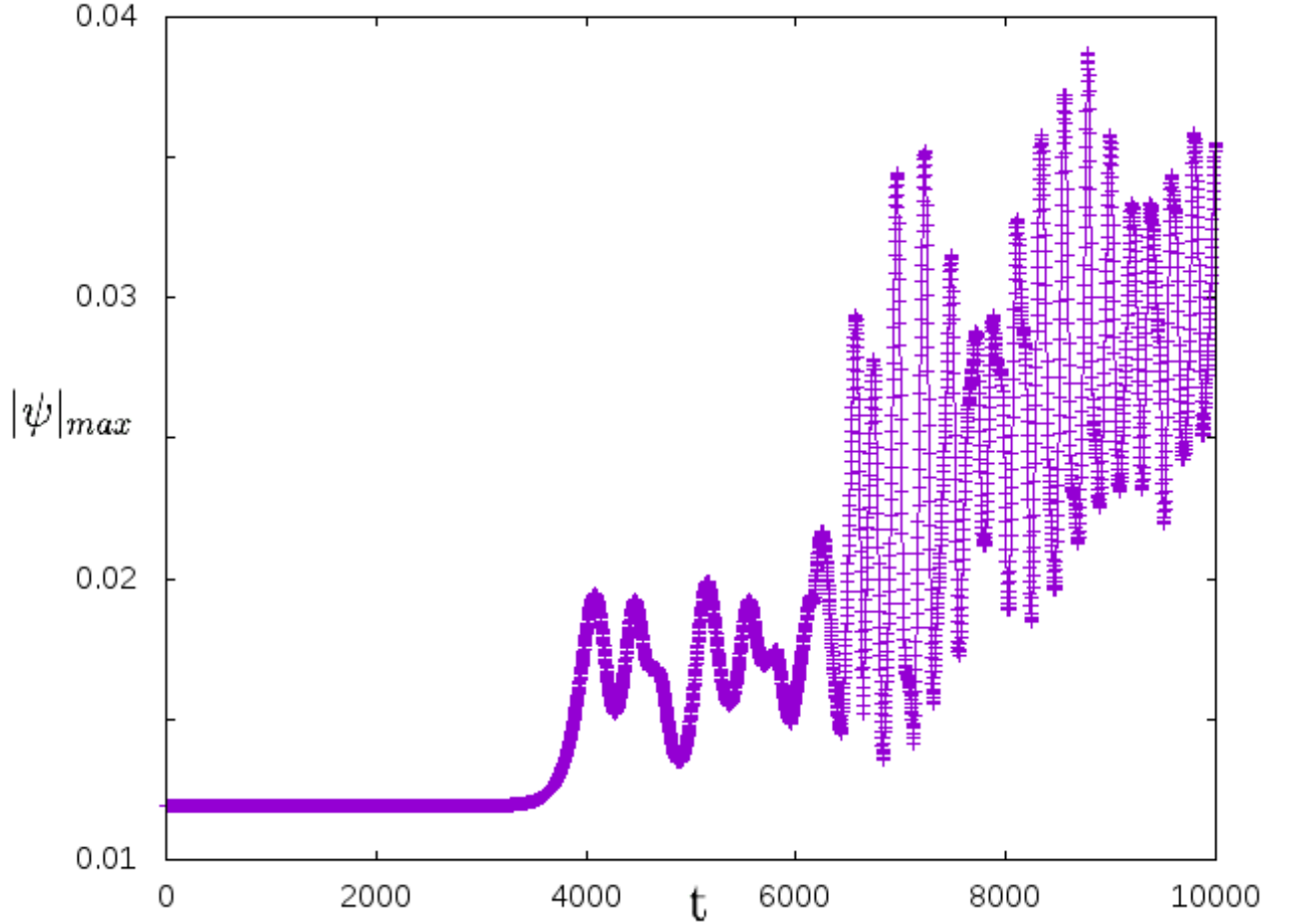


Рис. 9: $|\psi|_{max}$ как функция t .

До момента времени $t=0$ мы проводим релаксацию в евклидовом времени. Затем начинается обыкновенная эволюция. Раз в 20 шагов мы вычисляем $\psi_m = P_m \psi$, см. Приложение А. Затем мы вычисляем массу каждой моды ψ_m и максимальное значение каждого $|\psi_m|$. Мы строим график зависимости логарифма $\max |\psi_m|$ от времени, и получаем следующее.

Как раз когда $|\psi|_{max}$ начинает подскакивать, побочные моды развала становятся сравнимыми со звездой:

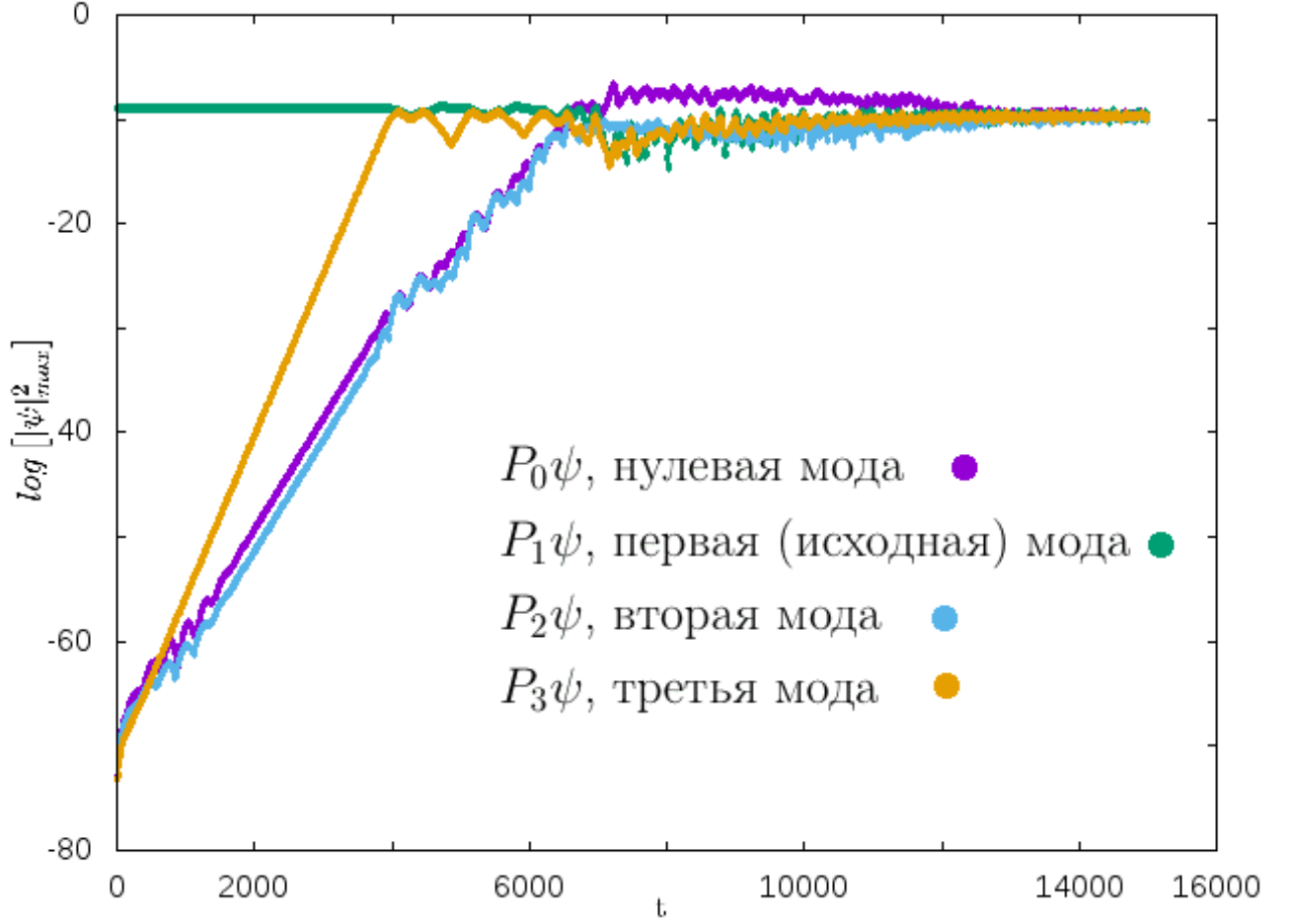


Рис. 10: $\log [|\psi_m|_{max}^2]$ как функции t для $m=0$ (фиолетовая), 1 (зелёная), 2 (голубая) и 3 (жёлтая). Видно, что до распада моды растут экспоненциально, причём разваливает звезду именно третья мода. Именно её интерференция с модой 1 даёт две звезды (Рис.5).

Момент, когда $P_0\psi$ и $P_2\psi$ мода догоняют ψ_1 и $P_3\psi$ - это превращение звезды в её финальную форму, показанную на Рис.7 и 8; это соответствует времени порядка 8000, когда модуль функции колеблется с наибольшей силой. После этого идёт уже распад $P_2\psi$ и $P_3\psi$, постепенно перекачивающий массу в 0 моду или в окружающее пространство. Итог, впрочем, один: первая мода нестабильна. Её модой распада является $P_3\psi$, которая, как мы видим, первая становится сравнимой со звездой.

6 Звёзды с высоким моментом

Чтобы проанализировать звёзды с высоким моментом, мы перешкалируем в уравнениях (1) координаты и поля следующим образом:

$$r = l^2 r_0 + l x_2, \quad (6a)$$

$$z = l y_2, \quad (6b)$$

$$\psi = l^{-2} \psi_2(x_2, y_2), \quad (6c)$$

$$U = l^{-2} \left[U_2(x_2, y_2) - \frac{1}{2m^2 r_0^2} \right] + \frac{\omega}{m}, \quad (6d)$$

где (x_2, y_2) - прямоугольные двумерные координаты. Перешкалированные уравнения в главном порядке по l^{-1} совпадают с уравнениями на двумерную звезду (см. Дополнение С). При больших l бозе-звезда - это тонкий тор с радиусами, пропорциональными l и l^2 , и в (x_2, y_2) координатах её профиль найден численно. Масса такой звезды тоже выражается через двумерные величины:

$$M = \int d^3x |\psi|^2 = 2\pi r_0 M_2. \quad (7)$$

Зная асимптотику U_2 , мы можем из уравнения (6d) найти ω .

$$\omega = \frac{1}{2mr_0^2 l^2} - \frac{GMm}{2\pi r_0 l^2} \ln \left(\frac{32GMm^2 r_0 l^2}{\pi r_{1_q}^2 M_{2_q}} \right), \quad (8)$$

Где индекс q означает, что величины берутся из обезразмеренных уравнений, см. Дополнение В. Как и массу, мы можем вычислить энергию через интеграл:

$$E = \int d^3x \left[|\nabla \psi|^2 / 2m + mU |\psi|^2 / 2 \right] \quad (9a)$$

$$= \frac{2\pi r_0}{l^2} E_2 + \left(\frac{\pi}{2m^2 r_0 l^2} + \frac{\omega \pi r_0}{m} \right) M_2 \quad (9b)$$

$$= \frac{GM^2}{4\pi r_0 l^2} \left[\frac{1}{2} - \ln \left(\frac{32GMm^2 r_0 l^2}{\pi r_{1_q}^2 M_{2_q}} \right) \right] + \frac{M}{2m^2 r_0^2 l^2}. \quad (9c)$$

И размер звезды, то есть r_0 , мы можем получить, минимизируя энергию по этому параметру.

Чтобы разобраться в стабильности бозе-звезды, необходимо ввести возмущения:

$$\psi = e^{il\phi - i\omega t} (\psi_s(r, z) + u + iv), \quad (10a)$$

$$U = U_s(r, z) + A, \quad (10b)$$

Где ϕ_s и U_s - известные для заданного l невозмущённые решения. Мы также будем считать, что возмущения пропорциональны $e^{in\phi + \gamma t}$, и, чтобы наблюдать их на фоне перешкалированных ранее уравнений, мы их подвергнем похожему преобразованию:

$$u_{rsc}, v_{rsc} = l^{-2}u, v, \quad (11a)$$

$$A_{rsc} = l^{-2}A. \quad (11b)$$

Добавив возмущения в уравнения и произведя преобразования, в том числе учтя фазу, мы приходим к следующим уравнениям на u, v и A :

$$-\left(l^2\gamma + \frac{in}{mlr_0^2}\right)v_{rsc} = -\frac{\Delta_2 u_{rsc}}{2m} + \frac{n^2 u_{rsc}}{2mr_0 l^2} + mA_{rsc}\psi_2 + mU_2 u_{rsc}, \quad (12a)$$

$$-\left(l^2\gamma + \frac{in}{mlr_0^2}\right)u_{rsc} = -\frac{\Delta_2 v_{rsc}}{2m} + \frac{n^2 v_{rsc}}{2mr_0 l^2} + mU_2 v_{rsc}, \quad (12b)$$

$$\Delta_2 A_{rsc} = 8\pi Gm\psi_2 u_{rsc}. \quad (12c)$$

Эта система совпадает с уравнениями для возмущений бозе-звёзд в 2D с точностью до переобозначений. Так что мы можем использовать наш анализ бозе-звёзд, произведенный ранее (см. Приложение C), для вычисления экспоненты моды распада:

$$Re\gamma = l^{-2}\mu = G^2 M^2 m^3 \frac{\mu_{max}}{2\pi r_{0rsc} M_{2rsc} l^2}, \quad (13a)$$

$$n = r_0 p_{z,max} l = \frac{r_{0rsc}^{1/2} p_{z,max} l}{(2\pi)^{1/2} M_{2rsc}^{1/2}}. \quad (13b)$$

Эти величины для каждого l можно получить численно. Таким образом, бозе-звезда распадается в n других мод, причём n пропорционально её моменту

вращения.

Приведём также графики для E (9) и γ (13) как функций l , углового момента:

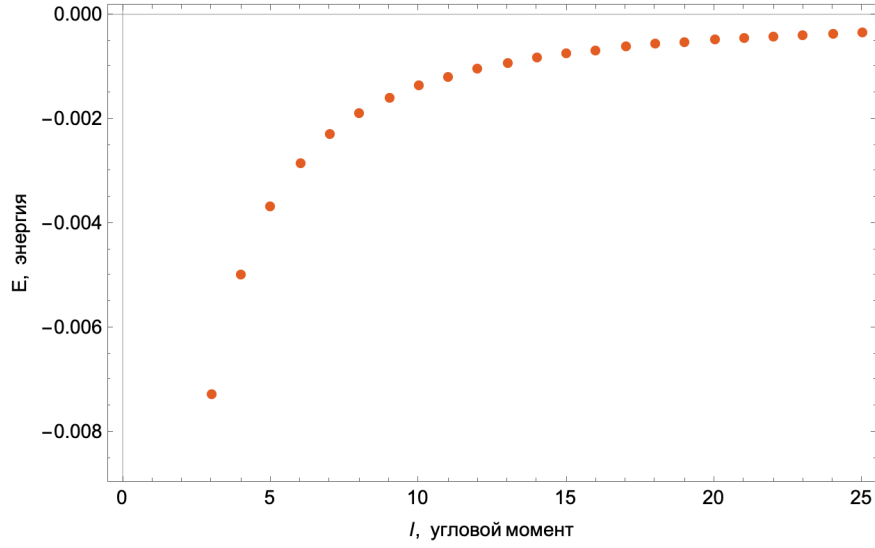


Рис. 11: Энергия бозе-звезды как функция l при $G=M=m=1$

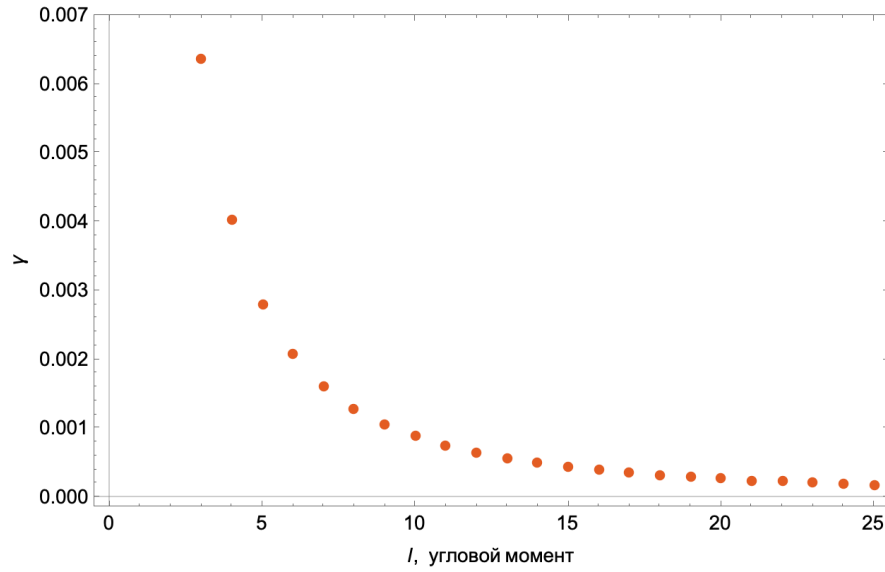


Рис. 12: Экспонента моды распада бозе-звезды как функция l при $G=M=m=1$

$\omega(l) = 3E(l)$ тождественно, $M = G = m = 1$. Полученные численно профили бозе-звёзд очень хорошо ложатся на показанные асимптотики. Уже при $l=10$ разница энергий составляет порядка 10^{-5} и дальше падает экспоненциально.

7 Заключение

В данной работе получены следующие результаты:

1. Численно получена вращающаяся и бозе-звезда с $l=1$ в $3+1$ измерениях.
2. Получена и подробно исследована эволюция звезды с угловым моментом $l=1$; показано, что такая бозе-звезда распадается.
3. Численно исследованы моды распада звезды с $l=1$.
4. Показано, что любая нерелятивистская бозе-звезда с высоким моментом распадается.
5. Исследована точность численных решений.

А Численный метод

Здесь мы подробно опишем численную эволюцию звезды на трёхмерной решётке (i, j, k) .

Для получения решения с $l=1$ на каждом dt мы производим следующие операции:

1. В каждой точке (i, j, k) вычисляется $E_{kin}^{ijk} = \sum \left(\frac{2\pi s}{N \cdot dx} \right)^2$, если $s < N/2$, и $\left(\frac{2\pi(s-N)}{N \cdot dx} \right)^2$ в противном случае; сумма берётся по $s=i, j, k$. Затем поле ψ умножается на $\exp(-0.5 \cdot dt \cdot E_{kin}^{ijk})/N^3$.
2. В каждой точке (i, j, k) ψ умножается на $\exp(-0.5 \cdot dt \cdot U(i, j, k))/N^3$.
3. $U(i, j, k) = [4\pi (|\psi(i, j, k)|^2 - M/L^3)] / E_{kin}^{ijk}$.
4. $\psi' = \frac{1}{4} [\psi(i, j, k) + i\psi(N - j, i, k) - \psi(N - i, N - j, k) - i\psi(j, N - i, k)]$. Это соответствует линейной комбинации полей, полученных из изначального поворотом вокруг оси z на 0, 90, 180 и 270 градусов соответственно.
5. $\psi' = \frac{1}{2} [\psi(i, j, k) + \psi(i, j, N - k)]$.
6. $|\psi|^2 \rightarrow |\psi|^2 / M$.

Первая и вторая операция умножают волновую функцию на $\exp(-0.5 \cdot dt \cdot E)$, что соответствует её шагу в евклидовом времени.

Третья операция обновляет вслед за ψ потенциал.

Четвёртая операция необходима для фиксации момента вращения на 1. Действительно, звезда, чья фаза в пространстве меняется как $e^{i\phi}$, при таком преобразовании не изменится, а вот нулевая и все остальные моды будут им уничтожены.

Пятая операция лишает звезду свободы двигаться вдоль оси z : наши уравнения не исключают того, что звезда уползёт вверх или вниз.

Шестая же операция производится последней. Она нужна для того, чтобы две предыдущие операции не поменяли массу звезды, которую мы положили равной единице. Если убрать 4 и 5 операции, делать её не нужно.

Такой способ очень удобен в использовании, и, хотя он не самый быстрый, он позволяет прямо контролировать параметры звезды и немедленно переходить к исследованию её эволюции.

Мы также определяем четыре проектора для выделения мод распада из эволюционирующей звезды:

1. $P_0\psi = \frac{1}{4} [\psi(i, j, k) + \psi(N - j, i, k) + \psi(N - i, N - j, k) + \psi(j, N - i, k)],$
2. $P_1\psi = \frac{1}{4} [\psi(i, j, k) + i\psi(N - j, i, k) - \psi(N - i, N - j, k) - i\psi(j, N - i, k)],$
3. $P_2\psi = \frac{1}{4} [\psi(i, j, k) - \psi(N - j, i, k) + \psi(N - i, N - j, k) - \psi(j, N - i, k)],$
4. $P_3\psi = \frac{1}{4} [\psi(i, j, k) - i\psi(N - j, i, k) - \psi(N - i, N - j, k) + i\psi(j, N - i, k)].$

Релаксация, однако, подходит только для получения нулевой и первой моды. Если мы попытаемся применить его к моде $l=2$, заменив преобразование 4 на $\psi = 0.25 [\psi(i, j, k) + \psi(N - i, j, k) - \psi(N - j, i, k) - \psi(j, N - i, k)],$ то получим такой результат:

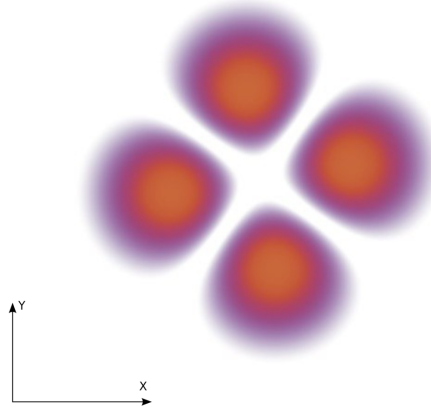


Рис. 13: Вид сверху: $|\psi_2|$.

Это не чистая $l = 2$, а линейная комбинация мод с $l = 2$ и $l = -2$, которая меньше $l = 2$ по энергии, так что именно к ней сходится алгоритм. Это действительно линейная комбинация: она не изменяется при воздействии P_2 , и мы видим четыре интерференционных максимума, что соответствует $\Delta l = 2 - (-2) = 4$.

Аналогично, если мы попытаемся получить решение для моды с $l=3$, применив преобразование

$$\psi' = \frac{1}{4} [\psi(i, j, k) - i\psi(N - j, i, k) - \psi(N - i, N - j, k) + i\psi(j, N - i, k)],$$

уже из самого вида этого выражение мы видим, что оно совпадает с преобразованием для моды $e^{-i\phi}$, т.е. $l = -1$. Именно его мы и видим; размер и вид такой звезды совпадает с уже полученной $l=1$. Опять же, $l = -1$ получается вместо $l = 3$, потому что $l = 3$ обладает более высокой энергией.

В Точность численных решений

Решения с $l=1$ были проверены многократно. Параметры решётки: $N^3 = 256^3$, $dt = 0.25$, $L = 200$, $dx = L/N = 0.78125$.

Прежде всего, мы удостоверились, что эволюция сохраняет массу и энергию бозе-звезды. На протяжении всей эволюции $\Delta t = 25000$ они сохраняются с точностью 10^{-11} .

При изменении dt и N решения меняются столь же незначительно: на 10^{-11} или 10^{-12} в зависимости от конкретных dN , dt . Изменение L может вызывать относительное изменение поля от 10^{-6} до 10^{-5} , что уже значительно, но всё равно не влияет на вид решения.

С изменением L связано много проблем. Мы работаем с периодическими граничными условиями, а потому не выполняются две вириальные теоремы:

$$2E_{kin} + E_{pot} = 0, \quad (14a)$$

$$3(E_{kin} + E_{pot}) - M\omega = 0. \quad (14b)$$

Чтобы это скорректировать, мы можем изменить E_{pot} и ω на постоянные:

$$E'_{pot} = -2E_{kin} = E_{pot} - (2E_{kin} + E_{pot}), \quad (15a)$$

$$M\omega = 3(E_{kin} + E'_{pot}) = M\omega + (3(E_{kin} + E_{pot}) - M\omega). \quad (15b)$$

Посчитанные таким образом величины совпадают с точностью 10^{-5} с решениями, посчитанными иными методами.

Из-за периодических граничных условий потенциал сильно меняется при различных ящиках:

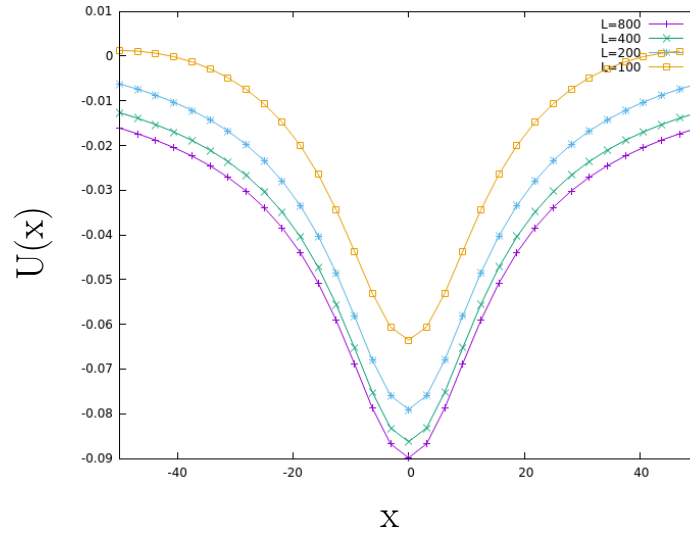


Рис. 14: Зависимость потенциала от размера ящика, $dx = const$ для $L=800$ (фиолетовый), $L=400$ (зелёный), $L=200$ (синий), $L=100$ (жёлтый).

Если, однако, мы добавляем требуемую (16а) константу в потенциал, мы получаем ожидаемое совпадение:

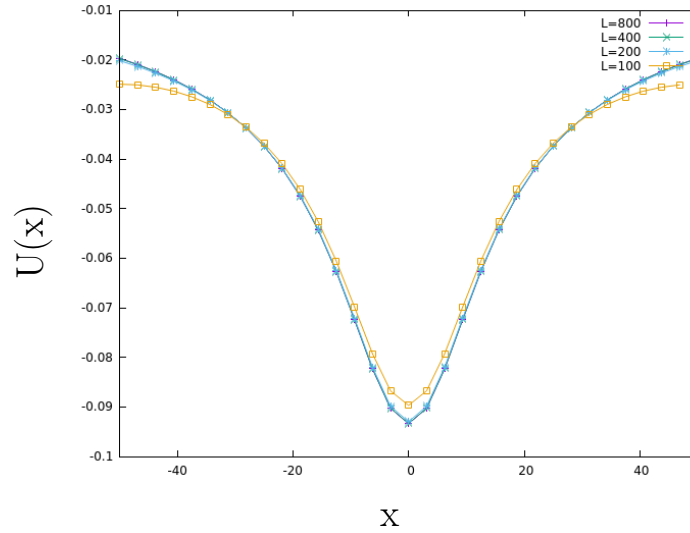


Рис. 15: Зависимость потенциала от размера ящика после добавления константы, $dx = const$ для $L=800$ (фиолетовый), $L=400$ (зелёный), $L=200$ (синий), $L=100$ (жёлтый).

Можно также пронаблюдать, как растёт ошибка ψ в ходе эволюции. Сравним $dt=0.125$ и $dt=0.25$. Для этого получим решения при разных dt и запишем их в некоторые совпадающие моменты времени, затем вычислим $|\psi_{0.125} - \psi_{0.25}|$ в каждой точке решётки, найдём его максимум и поделим на $|\psi_{0.125}|$. Получим следующую зависимость этой величины от времени:

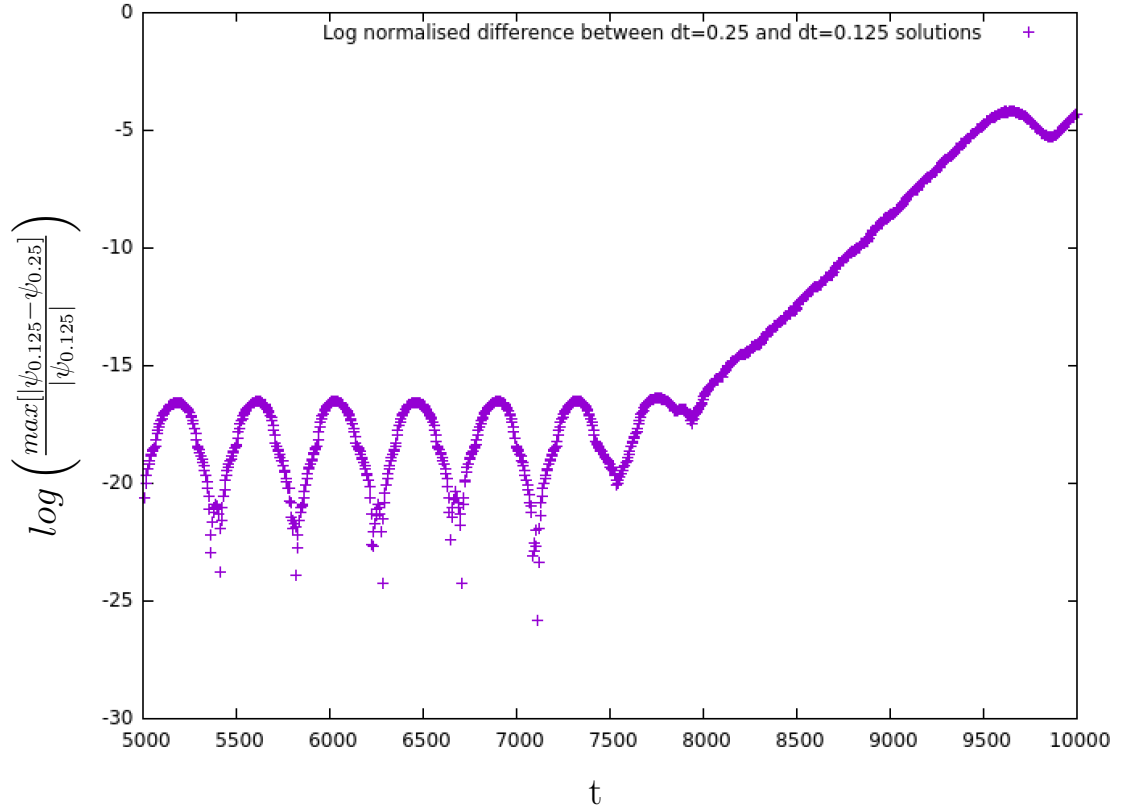


Рис. 16: Зависимость $\log \left(\frac{\max[|\psi_{0.125} - \psi_{0.25}|]}{|\psi_{0.125}|} \right)$ от времени.

Перестав существовать на уровне шума, ошибка растёт экспоненциально на первом этапе распада звезды. Она никогда не достигает единицы, но на поздних этапах эволюции становится очень значительной.

С Метод перестрелки в 2D

Мы работаем с обезразмеренными уравнениями:

$$\Delta_2 \phi - 2U\phi = 0, \quad (16a)$$

$$\Delta_2 U = 4\pi\phi^2. \quad (16b)$$

Ничто не мешает нам в данном случае считать ϕ вещественным. В 2D мы легко сводим задачу к одномерной и решаем её методом перестрелки по параметру $U(0)$. Полученное решение выглядит так:

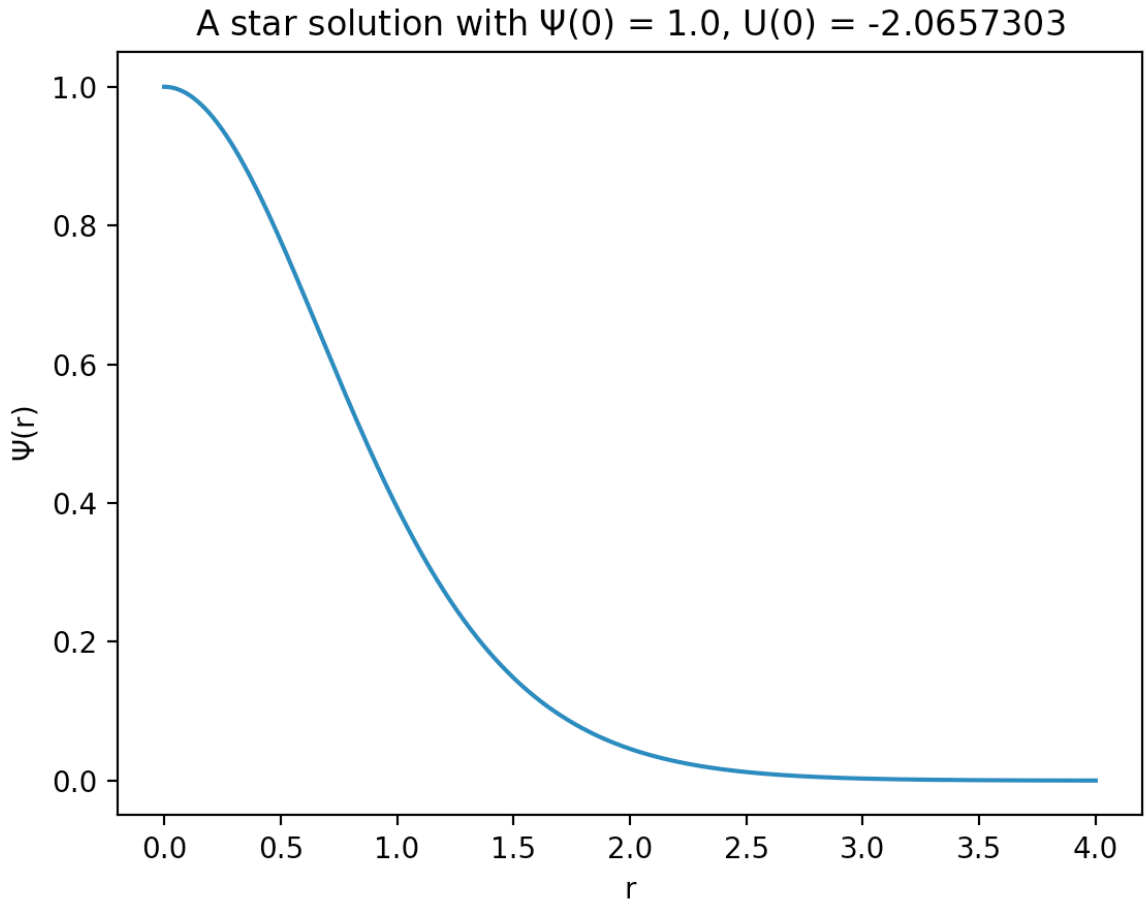


Рис. 17: $|\psi|$ как функция r .

Нам также нужно рассмотреть возмущения над этим решением, $\phi \rightarrow \phi + (u + iv) \cos(p_z z) e^{\mu t}$, $U \rightarrow U + A \cos(p_z z) e^{\mu t}$. Для этого мы обращаемся к уравнениям, полученным при подставлении возмущений в изначальные:

$$2\mu u = (-\Delta_2 + 2U + p_z^2)v, \quad (17a)$$

$$2\mu v = -(-\Delta_2 + 2U + p_z^2)u - 2\psi A, \quad (17b)$$

$$\Delta_2 A = p_z^2 A + 8\pi\psi u. \quad (17c)$$

и решаем их три раза при трёх различных начальных условиях: сначала $u = 1, v = 0, A = 0$, затем $u = 0, v = 1, A = 0$ и, наконец, $u = 0, v = 0, A = 1$. Мы запоминаем значения этих функций на границе ящика. Так как искомое решение - линейная комбинация трёх полученных, и нам необходимо, чтобы на бесконечности возмущения уходили в ноль, мы составляем из девяти граничных значений детерминант. Если он обращается в ноль, значит, параметр решения - μ - подобран правильно для заданного p_z . Действуя подобным образом, мы строим зависимость μ от p_z и получаем следующее:

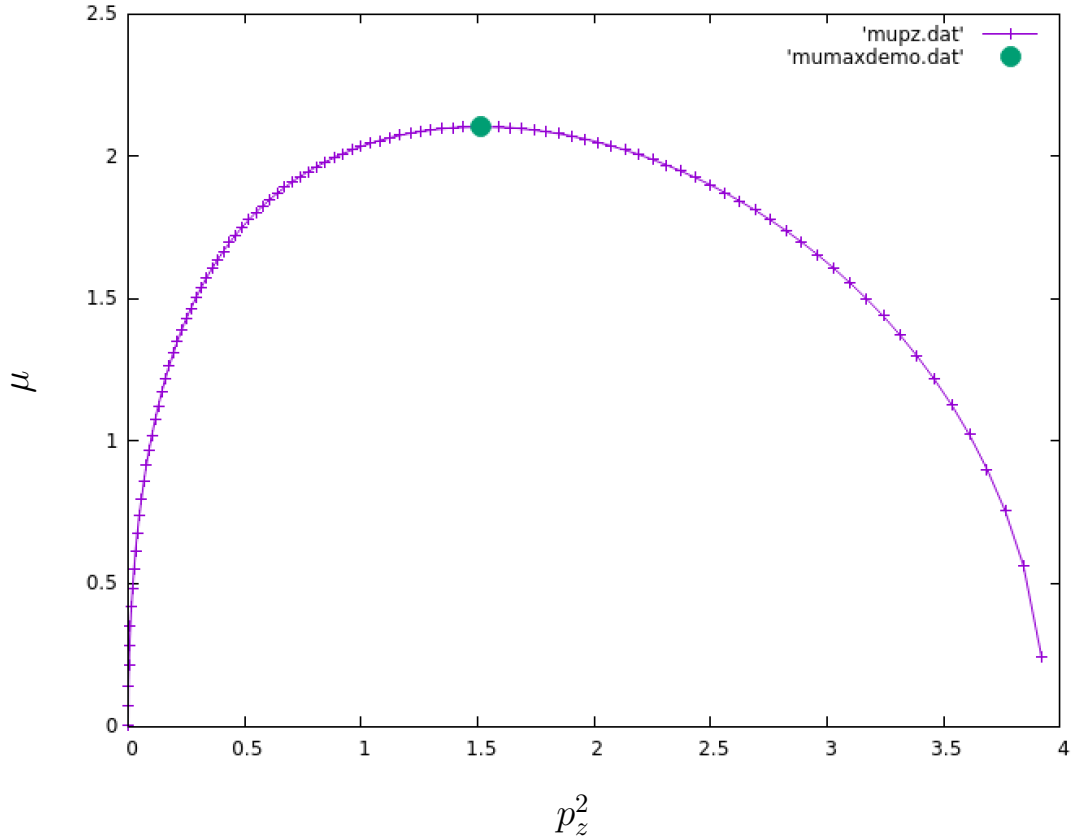


Рис. 18: μ как функция p_z^2 .

При этом $\mu_{max} = 2.1029839$, $p_{z,max}^2 = 1.512627$. Максимальные p_z и μ соответствуют моде распада.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] R. Ruffini, S. Bonazzola, "Systems of Self-Gravitating Particles in General Relativity and the Concept of an Equation of State," *Phys. Rev.* 187, 1767 (1969).
- [2] I. I. Tkachev, "Coherent scalar field oscillations forming compact astrophysical objects," *Sov. Astron. Lett.* 12, 305 (1986).
- [3] Caio F. B. Macedo, Paolo Pani, Vitor Cardoso, and Luís C. B. Crispino, "Astrophysical signatures of boson stars: quasinormal modes and inspiral resonances," *arXiv:1307.4812*.
- [4] Burkhard Kleihaus, Jutta Kunx and Meike List, "Rotating Boson Stars and Q-Balls," *arXiv:qr-qc/0505143*.
- [5] P. Sikivie, "Axion Cosmology," *Lect. Notes Phys.* 741, 19 (2008).
- [6] D.G. Levkov, A.G. Panin, I.I. Tkachev, "Gravitational Bose-Einstein condensation in the kinetic regime," *arXiv: 1804.05857*.
- [7] D. G. Levkov, A. G. Panin, and I. I. Tkachev, "Relativistic Axions from Collapsing Bose Stars," *Phys. Rev. Lett.* 118, 011301 (2017).
- [8] Vitor Cardoso, "Testing the nature of dark compact objects: a status report," *arXiv:1904.05363v3*.
- [9] F. E. Schunck and E. W. Mielke, *Class. Quant. Grav.* 20, R301 (2003).
- [10] J. Eby et al, *JHEP* 1612, 066 (2016). P. S. B. Dev, M. Lindner and S. Ohmer, *Phys. Lett. B* 773, 219 (2017). T. Helfer et al, *JCAP* 1703, 055 (2017). J. Eby et al, *JHEP* 1704, 099 (2017). E. Braaten, A. Mohapatra and H. Zhang, *Phys. Rev. D* 96, 031901 (2017). P.-H. Chavanis, *arXiv:1710.06268*. L. Visinelli et al, *Phys. Lett. B* 777, 64 (2018).
- [11] Davide Guerra, Caio F.B. Macedo, Paolo Pani, "Axion boson stars," *arXiv:1909.05515v2*.