Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

Гамильтонова механика систем со связями

Курсовая работа
студента 2 курса
Кудрявцева Д. Н.

Научный руководитель
д. ф.-м. н., Либанов М. В.

Москва, 2011г.

Введение. Как известно, процедура канонического квантования схематически выглядит следующим образом:

а) Строится гамильтонова формулировка классической механики рассматриваемой системы.

б) Состояния квантовой системы определяются векторами некоторого гильбертова пространства.

в) Каждой физической величине сопостовляется оператор, действующий в том же гильбертовом пространстве.

г) Эволюция состояния со временем описывается уравнением Шредингера.

При построении гамильтонова формализма обычно подразумевается, что скорости могут быть выражены через обобщенные координаты и импульсы. Однако, существуют системы, для которых этого сделать не удаётся. Такие системы называются системами со связями, или особенными системами.

В работе разобраны два примера, демонстрирующие гамильтонову динамику систем со связями в классическом и псевдоклассическом случаях.

1. Прототип электромагнитного поля. Рассмотрим систему с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\chi} - \phi)^2 - V(\chi, \phi). \tag{1}$$

Находим обобщенные импульсы. Одна из скоростей не входит в лагранжиан и соответствующий ей импульс равен нулю

$$p_\chi = \dot{\chi} - \phi, \tag{2}$$

$$p_\phi = 0. \tag{3}$$

Так мы получаем одну, так называемую первичную, связь

$$\varphi_1 = p_\phi. \tag{4}$$

Далее везде будем называть равенства, выполняющиеся только после использования связей *слабыми* равенствами и *сильными* равенствами в противном случае и обозночать символом $\approx$. Так, если величнины a и b равны в слабом смысле, то

$$a = b + v_i \varphi_i,$$

где φ_i – связи, а v_i – некоторые произвольные функции.

Применяя преобразование Лежандра переходим к гамильтониану

$$H = p_\chi \dot{\chi} + p_\phi \dot{\phi} - L = \frac{1}{2}p_\chi^2 + p_\chi \phi + p_\phi \dot{\phi} + V(\chi, \phi) \approx \frac{1}{2}p_\chi^2 + p_\chi \phi + V(\chi, \phi). \tag{5}$$

Гамильтониан, заданный таким образом, определен неоднозначно, так как мы можем добавить к нему произведение связи φ_1 на любую функцию (не обязательно только координат и импульсов), обращающееся в ноль при $\varphi_1 = 0$. Таким образом мы перешли к полному гамильтониану

$$H^* = \frac{1}{2}p_\chi^2 + p_\chi\phi + V(\chi,\phi) + c_1\varphi_1, \tag{6}$$

$$H^* \approx H. \tag{7}$$

Варьируя обе части равенства (7) находим

$$\delta H^* \approx \delta(p_\chi\dot{\chi} + p_\phi\dot{\phi} - L),$$

$$\delta H^* = \frac{\partial V}{\partial\chi}\delta\chi + (p_\chi + \frac{\partial V}{\partial\phi})\delta\phi + (p_\chi + \phi)\delta p_\chi + c_1\delta p_\phi + \varphi_1\delta c_1, \tag{8}$$

$$\delta(p_\chi\dot{\chi} + p_\phi\dot{\phi} - L) = \delta p_\chi\dot{\chi} + \delta p_\phi\dot{\phi} + p_\chi\delta\dot{\chi} + p_\phi\delta\dot{\phi} - \frac{\partial L}{\partial\dot{\chi}}\delta\dot{\chi} - \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\delta\dot{\phi} - \frac{\partial L}{\partial\chi}\delta\chi - \frac{\partial L}{\partial\phi}\phi =$$

$$= \delta p_\chi\dot{\chi} + \delta p_\phi\dot{\phi} + p_\chi\delta\dot{\chi} + p_\phi\delta\dot{\phi} - p_\chi\delta\dot{\chi} - p_\phi\delta\dot{\phi} - \frac{\partial L}{\partial\chi}\delta\chi - \frac{\partial L}{\partial\phi}\phi =$$

$$= \delta p_\chi\dot{\chi} + \delta p_\phi\dot{\phi} - \dot{p}_\chi\delta\chi - \dot{p}_\phi\delta\phi, \tag{9}$$

откуда, сравнивая члены при соответствующих вариациях в выражениях (8) и (9), получаем гамильтоновы уравнения движения

$$\dot{\chi} \approx p_\chi + \phi, \tag{10}$$

$$\dot{\phi} \approx c_1, \tag{11}$$

$$\dot{p}_\chi \approx -\frac{\partial V}{\partial\chi}, \tag{12}$$

$$\dot{p}_\phi \approx -p_\chi - \frac{\partial V}{\partial\phi}. \tag{13}$$

Производная по времени любой функции координат и импульсов, явно от времени не зависящей, имеет вид

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial\chi}\dot{\chi} + \frac{\partial g}{\partial\phi}\dot{\phi} + \frac{\partial g}{\partial p_\chi}\dot{p}_\chi + \frac{\partial g}{\partial p_\phi}\dot{p}_\phi \tag{14}$$

Подставляя сюда полученные выражения (10), (11), (12), (13) можно убедиться что она равна

$$\dot{g} \approx \{g, H\} + c_1\{g, \varphi_1\}, \tag{15}$$

где $\{a, b\}$ – скобка Пуассона, определенная как

$$\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial\chi}\frac{\partial b}{\partial p_\chi} + \frac{\partial a}{\partial\phi}\frac{\partial b}{\partial p_\phi} - \frac{\partial a}{\partial p_\chi}\frac{\partial b}{\partial\chi} - \frac{\partial a}{\partial p_\phi}\frac{\partial b}{\partial\phi}. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь следствия этих уравнений. Мы имеем связь (4), которая должна быть равна нулю в каждый момент времени. Можно применить уравнения движения, взяв в качестве g функцию (4). Так как $\dot{\varphi}_1$ должна быть равна нулю, получаем условие непротиворечивости

$$\{\varphi_1, H\} \approx 0,$$

ведущее к

$$p_\chi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \tag{17}$$

Таким образом мы получаем новую связь на координаты и импульсы, не сводящуюся к первичным связям. Такие связи называются вторичными. Если в нашей теории появилась вторичная связь, то мы получаем еще одно условие непротиворечивости, так как мы можем подставить вторичную связь (17) в уравнения движения и потребовать чтобы ее производная была равна нулю. Обозначая вторичную связь φ_2, получаем

$$\{\varphi_2, H\} + c_1\{\varphi_2, \varphi_1\} \approx 0.$$

Откуда, раскрывая скобки Пуассона, находим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \chi \partial \phi}(p_\chi + \phi) - \frac{\partial V}{\partial \chi} + c_1 \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0. \tag{18}$$

Здесь, в зависимости от вида потенциала $V(\chi, \phi)$ можно рассмотреть три случая.

1)
$$V(\chi, \phi) = 0.$$

В этом случае последнее условие непротиворечивости сводится к тождеству $0 = 0$ и никаких новых связей мы не получаем. Уравнения движения (10), (11), (12), (13) имеют вид

$$\dot{\chi} \approx p_\chi + \phi,$$
$$\dot{\phi} \approx c_1,$$
$$\dot{p}_\chi \approx 0,$$
$$\dot{p}_\phi \approx -p_\chi.$$

Учитывая связь (4) получаем уравнения

$$\dot{\chi} = \phi,$$
$$\dot{\phi} = c_1,$$
$$p_\chi = 0,$$
$$p_\phi = 0,$$

решением которых при начальных условиях $\phi(0) = \phi_0$, $\chi(0) = \chi_0$ являются

$$\chi = \chi_0 + \phi_0 t + \int_0^t \alpha(t')dt',$$
$$\phi = \phi_0 + \alpha(t),$$
$$p_\chi = 0,$$
$$p_\phi = 0,$$

где $\alpha(t)$ – функция времени, удовлетворяющая условию $\alpha(0) = 0$, а в остальном совершенно произвольная. Таким образом, мы имеем функциональный произвол в решениях. Существование такого произвола можно видеть и без решения уравнений движения, так как лагранжиан (1) при $V(\chi,\phi)=0$ инвариантен относительно преобразований

$$\chi \to \chi + \gamma,$$
$$\phi \to \phi + \dot{\gamma},$$

с произвольной функцией времени $\gamma(t)$. Такая инвариантность называется калибровочной.

Схожая ситуация наблюдается и при $\dfrac{\partial^2 V}{\partial\chi\partial\phi} = \dfrac{\partial V}{\partial \chi} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = 0$. Уравнения (18) сводится к $0=0$, а потенциал в этом случае имеет вид $V(\chi,\phi)=\alpha_1\phi+\alpha_2$, где α_1 и α_2 – некоторые числа. Лагранжиан с таким потенциалом инвариантен относительно преобразований

$$\chi \to \chi + \gamma,$$
$$\phi \to \phi + \dot{\gamma},$$

где $\dot{\gamma}$ – константа.

2)
$$\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0, \frac{\partial^2 V}{\partial\chi\partial\phi} \neq 0. \tag{19}$$

Уравнения (18) сводится к связи на координаты и импульсы

$$\varphi_3 = \frac{\partial^2 V}{\partial\chi\partial\phi}(p_\chi+\phi) - \frac{\partial V}{\partial\chi} = 0, \tag{20}$$

условие непротиворечивости для которой

$$\{\varphi_3, H\} + c_1\{\varphi_3,\varphi_1\} = 0,$$

приводит к связи

$$\varphi_4 = \left(V_{\chi\chi\phi}(p_\chi+\phi) - V_{\chi\chi}\right)(p_\chi+\phi) - V_{\chi\phi}V_\chi = 0. \tag{21}$$

Для связи (21) условие непротиворечивости

$$\{\varphi_4, H\} + c_1\{\varphi_4,\varphi_1\} = 0$$

приводит к

$$V_{\chi\chi\chi\phi}(p_\chi+\phi)^3 - V_{\chi\chi\chi}(p_\chi+\phi)^2 - (3V_{\chi\chi\phi}V_\chi - V_{\chi\phi}V_{\chi\chi})(p_\chi+\phi) + V_{\chi\chi}V_\chi +$$
$$+c_1(V_{\phi\chi\chi}(p_\chi+\phi) - V_{\chi\chi} - V_{\chi\phi}^2) = 0. \tag{22}$$

Далее, в зависимости от значения множителя при c_1 в (22), можно либо выразить c_1 и избавиться от функционального произвола в (10), (11),(12),(13), либо продолжить процесс.

3)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \neq 0$$

Теперь у нас есть связь, накладываемая на коэффициент c_1. Уравнение (18), очевидно, разрешимо относительно c_1

$$c_1 = \frac{V_\chi}{V_{\phi\phi}} - \frac{V_{\chi\phi}}{V_{\phi\phi}}(p_\chi + \phi),$$

значит, при потенциале, нелинейном по координате ϕ можно избавиться от функционального произвола и записать гамильтониан и уравнения движения как

$$H^* = \frac{1}{2}p_\chi^2 + p_\chi \phi + V(\chi, \phi) + \left(\frac{V_\chi}{V_{\phi\phi}} - \frac{V_{\chi\phi}}{V_{\phi\phi}}(p_\chi + \phi)\right) p_\phi,$$

$$\dot{\chi} = p_\chi + \phi,$$

$$\dot{\phi} = \frac{V_\chi}{V_{\phi\phi}} - \frac{V_{\chi\phi}}{V_{\phi\phi}}(p_\chi + \phi),$$

$$\dot{p}_\chi = -\frac{\partial V}{\partial \chi},$$

$$\dot{p}_\phi = -p_\chi - \frac{\partial V}{\partial \phi}.$$

Посмотрим теперь, что происходит при переходе к квантовой теории. В квантовой теории координаты и импульсы заменяются соответствующими линейными операторами в гильбертовом пространстве, а скобки Пуассона (16) на коммутаторы

$$\{a, b\} \to i\hbar[a, b],$$

$$[a, b] = ab - ba.$$

Коммутаторы координат и импульсов должны удовлетворять каноническим коммутационным соотношениям

$$[\chi, p_\chi] = i\hbar,$$

$$[\phi, p_\phi] = i\hbar.$$

Однако, мы имеем связь $p_\phi = 0$, что влечет противоречие

$$[\phi, p_\phi] = \phi p_\phi - p_\phi \phi = i\hbar = 0.$$

Кроме того, коммутаторы связей должны обращаться в ноль, а это не всегда происходит, так как соответствующая им скобка Пуассона может оказаться ненулевой.

Вернемся теперь к классической теории и введем нужную терминологию. Будем называть функцию R величиной первого рода если ее скобки Пуассона со всеми связями φ_i обращаются в ноль

$$\forall i : \{R, \varphi_i\} = 0,$$

и величиной второго рода в противном случае. Тогда φ_1 и φ_2 являются связями второго рода, так как

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} = -\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \neq 0.$$

Ясно, что именно связи второго рода вызывают противоречия, так как их скобки Пуассона отличны от нуля. Следуя Дираку, от этих противоречий можно избавиться, если модифицировать скобки Пуассона. Рассмотрим матрицу

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{\varphi_1, \varphi_1\} & \{\varphi_1, \varphi_2\} \\ \{\varphi_2, \varphi_1\} & \{\varphi_2, \varphi_2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -V_{\phi\phi} \\ V_{\phi\phi} & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Ее определитель $\det(\Delta) = V_{\phi\phi}^2$ не равен нулю, значит, существует обратная матрица

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & V_{\phi\phi}^{-1} \\ -V_{\phi\phi}^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Искомая модификация скобок Пуассона (т.н. скобки Дирака) имеет вид

$$\{a, b\}^* = \{a, b\} - \{a, \varphi_s\} c_{ss'} \{\varphi_{s'}, b\},$$

где $c_{ss'}$ – элементы матрицы (24). Несложно проверить, что такая скобка, аналогично скобке Пуассона, линейна, удовлетворяет тождествам Лейбница и Якоби, а также с ее помощью можно записать в похожей форме уравнения движения

$$\{g, H^*\}^* = \{g, H^*\} - \{g, \varphi_s\} c_{ss'} \{\varphi_{s'}, H^*\} \approx \{g, H^*\} \approx \dot{g},$$

т.к. все члены вида $\{\varphi_{s'}, H^*\}$ обращаются в ноль. Кроме того, если взять произвольную функцию f и составить скобку Дирака с одной из связей второго рода получим

$$\{f, \varphi_i\}^* = \{f, \varphi_i\} - \{f, \varphi_s\} c_{ss'} \{\varphi_{s'}, \varphi_i\} = 0.$$

Следовательно, связи φ_1 и φ_2 можно положить равными нулю до раскрытия скобок.

2. Прототип спинорного поля. Рассмотрим систему с функцией Лагранжа

$$L = \alpha\chi\dot{\phi} - (1-\alpha)\dot{\chi}\phi - V(\chi, \phi), \tag{1}$$

где α – константа, χ, ϕ, $\dot{\chi}$, $\dot{\phi}$ – нечетные элементы грассмановой алгебры (то есть, по определению, антикоммутирующие друг с другом), а $V(\chi, \phi)$ – четный (то есть, коммутирующий со всеми четными и нечетными элементами). Определим обобщенные импульсы как правые производные лагранжиана по скоростям

$$p_\chi = \frac{\partial_R L}{\partial \dot{\chi}} = (1-\alpha)\phi,$$

$$p_\phi = \frac{\partial_R L}{\partial \dot{\phi}} = \alpha\chi.$$

Оба импульса здесь не являются функциями скоростей, и мы имеем две первичных связи

$$\varphi_1 = p_\chi - (1-\alpha)\phi = 0,$$

$$\varphi_2 = p_\phi - \alpha\chi = 0.$$

Используя преобразование Лежандра в виде $p_\chi\dot{\chi} + p_\phi\dot{\phi} - L$ и выражения для импульсов получаем гамильтониан системы

$$H = V(\chi, \phi) + \varphi_1\dot{\chi} + \varphi_2\dot{\phi}.$$

и полный гамильтониан,

$$H^* = V(\chi, \phi) + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, \tag{2}$$
$$H^* \approx H.$$

где c_1 и c_2 - произвольные функции. Варьируя выражение (2)

$$\delta H^* \approx \left(\frac{\partial_R H}{\partial\chi} + c_i\frac{\partial_R\varphi_i}{\partial\chi}\right)\delta\chi + \left(\frac{\partial_R H}{\partial\phi} + c_i\frac{\partial_R\varphi_i}{\partial\phi}\right)\delta\phi + \left(\frac{\partial_R H}{\partial p_\chi} + c_i\frac{\partial_R\varphi_i}{\partial p_\chi}\right)\delta p_\chi + \left(\frac{\partial_R H}{\partial p_\phi} + c_i\frac{\partial_R\varphi_i}{\partial p_\phi}\right)\delta p_\phi,$$

и сравнивая члены при соответствующих вариациях с

$$\delta(p_\chi\dot{\chi} + p_\phi\dot{\phi} - L) = \delta p_\chi\dot{\chi} + \delta p_\phi\dot{\phi} + p_\chi\delta\dot{\chi} + p_\phi\delta\dot{\phi} - \frac{\partial_R L}{\partial\dot{\chi}}\delta\dot{\chi} - \frac{\partial_R L}{\partial\dot{\phi}}\delta\dot{\phi} - \frac{\partial_R L}{\partial\chi}\delta\chi - \frac{\partial_R L}{\partial\phi}\phi =$$

$$= \delta p_\chi\dot{\chi} + \delta p_\phi\dot{\phi} - \dot{p}_\chi\delta\chi - \dot{p}_\phi\delta\phi,$$

получаем гамильтоновы уравнения движения

$$\dot{\chi} \approx -\frac{\partial_R H^*}{\partial p_\chi} \approx -\frac{\partial_R H}{\partial p_\chi} - c_1\frac{\partial_R\varphi_1}{\partial p_\chi} - c_2\frac{\partial_R\varphi_2}{\partial p_\chi} = -c_1, \tag{3}$$

$$\dot{\phi} \approx -\frac{\partial_R H^*}{\partial p_\phi} \approx -\frac{\partial_R H}{\partial p_\phi} - c_1\frac{\partial_R\varphi_1}{\partial p_\phi} - c_2\frac{\partial_R\varphi_2}{\partial p_\phi} = -c_2, \tag{4}$$

$$\dot{p}_\chi \approx -\frac{\partial_R H^*}{\partial\chi} \approx -\frac{\partial_R H}{\partial\chi} - c_1\frac{\partial_R\varphi_1}{\partial\chi} - c_2\frac{\partial_R\varphi_2}{\partial\chi} = -\frac{\partial V}{\partial\chi} + \alpha c_2, \tag{5}$$

$$\dot{p}_\phi \approx -\frac{\partial_R H^*}{\partial\phi} \approx -\frac{\partial_R H}{\partial\phi} - c_1\frac{\partial_R\varphi_1}{\partial\phi} - c_2\frac{\partial_R\varphi_2}{\partial\phi} = -\frac{\partial V}{\partial\phi} + (1-\alpha)c_1. \tag{6}$$

Производная по времени любой функции координат и импульсов, явно от времени не зависящей, может быть выражена как

$$\dot{g} = \frac{\partial_R g}{\partial\chi}\dot{\chi} + \frac{\partial_R g}{\partial\phi}\dot{\phi} + \frac{\partial_R g}{\partial p_\chi}\dot{p}_\chi + \frac{\partial_R g}{\partial p_\phi}\dot{p}_\phi. \tag{7}$$

Подставляя в (7) выражения (3), (4), (5), (6) получаем

$$\dot{g} = -\frac{\partial_R g}{\partial\chi}\frac{\partial_R H^*}{\partial p_\chi} - \frac{\partial_R g}{\partial\phi}\frac{\partial_R H^*}{\partial p_\phi} - \frac{\partial_R g}{\partial p_\chi}\frac{\partial_R H^*}{\partial\chi} - \frac{\partial_R g}{\partial p_\phi}\frac{\partial_R H^*}{\partial\phi}. \tag{8}$$

Учитывая, что четности частных производных $\dfrac{\partial_R a}{\partial p}$ и $\dfrac{\partial_R b}{\partial q}$ для нечетных элементов p и q равны $P_a - 1$ и $P_b - 1$ соответственно, где P_a и P_b – четности элементов a и b, получаем небоходимую модификацию скобки Пауссона в виде

$$\{a, b\}_{q,p} = -\frac{\partial_R a}{\partial q_n}\frac{\partial_R b}{\partial p_n} - (-1)^{(P_a-1)(P_b-1)}\frac{\partial_R b}{\partial q_n}\frac{\partial_R a}{\partial p_n}. \tag{9}$$

Тогда уравнения движения имеют вид

$$\dot{g} \approx \{g, H\} + c_1\{g, \varphi_1\} + c_2\{g, \varphi_2\}, \tag{10}$$

где g - любая функция координат и импульсов.

Условия непротиворечивости для связей φ_1 и φ_2

$$\{\varphi_1, H\} + c_1\{\varphi_1, \varphi_1\} + c_2\{\varphi_1, \varphi_2\} \approx 0,$$
$$\{\varphi_2, H\} + c_1\{\varphi_2, \varphi_1\} + c_2\{\varphi_2, \varphi_2\} \approx 0,$$

приводят к

$$c_1 = \frac{\partial_R V}{\partial \chi},$$
$$c_2 = \frac{\partial_R V}{\partial \phi}.$$

Здесь мы имеем только связи на коэффициенты c_1 и c_2, устраняющие функциональный произвол. С их учетом уравнения (3), (4), (5), (6) имеют вид

$$\dot{\chi} = \frac{\partial_R V}{\partial \chi},$$
$$\dot{\phi} = \frac{\partial_R V}{\partial \phi},$$
$$\dot{p}_\chi = -\frac{\partial_R V}{\partial \chi} + \alpha \frac{\partial V}{\partial \phi},$$
$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial_R V}{\partial \phi} + (1-\alpha) \frac{\partial V}{\partial \chi}.$$

Однако, первичные связи φ_1 и φ_2 являются величинами второго рода

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} = \{\varphi_2, \varphi_1\} = 1,$$

Действуя аналогично первой задаче находим

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{\varphi_1, \varphi_1\} & \{\varphi_1, \varphi_2\} \\ \{\varphi_2, \varphi_1\} & \{\varphi_2, \varphi_2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

записываем скобки Дирака

$$\{a, b\}^* = \{a, b\} - \{a, \varphi_s\} c_{ss'} \{\varphi_{s'}, b\}, \tag{11}$$

и тем самым приводим первичные связи к первому роду.

Уравнения движения (10), записанные с использованием скобки (11), совпадают с исходными

$$\dot{g} = \{g, H^*\}^* \approx \{g, H^*\}.$$

Кроме того, новая скобка для χ, ϕ равна

$$\{\chi, \phi\}^* = -2,$$

что приводит к существованию соотношения неопределенностей для координат

$$\Delta_\chi \Delta_\phi \geq \frac{1}{2} |[\chi, \phi]| = \hbar.$$

Литература

1. П. А. М. Дирак. Лекции по квантовой механике., Ижевск 1998.
2. П. А. М. Дирак. Принципы квантовой механики., Москва «Наука» 1979.
3. П. А. М. Дирак. Лекции по квантовой теории поля., Москва «Мир» 1971.
4. Д. М. Гитман, И. В. Тютин. Каноническое квантование полей со связями., Москва «Наука» 1986.