Московский ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции,
ордена Трудового Красного Знамени
Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Физический Факультет

Курсовая работа

ТЕОРИЯ МАЙОРАНОВСКОГО ФЕРМИОНА

Работу выполнил:
студент 203группы
Сосновиков Артур Дмитриевич

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. проф. Рубаков В.А.

И.о. зав. каф.
Физики частиц и космологии
д.ф.-м.н. проф. Рубаков В.А.

Москва
2012

Содержание

1 Постановка задачи

Дано фермионное поле ψ с лагранжианом

$$\mathscr{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi_{;\mu} - \frac{m}{2}(\bar{\psi^C}\psi + \bar{\psi}\psi^C), \tag{1}$$

где ψ^c - зарядово сопряженное поле.

- Показать, что лагранжиан лоренц-инвариантен.
- Найти общее решение уравнений поля.
- Получить выражения для вектора энергии-импульса, вектора спина.
- Проквантовать это поле.
- Рассмотреть теорию в пределе высоких энергий.

2 Некоторые обозначения и преобразования

Представим четырехкомпонентый спинор ψ в виде $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$, где ψ_L, ψ_R - двухкомпонентые спиноры.

Выберем киральное представление гамма-матриц:

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\sigma = (1, \vec{\sigma})$, $\bar{\sigma} = (1, -\vec{\sigma})$, $\vec{\sigma}$ - вектор, компонентами которого являются матрицы Паули.

При этом гамма-матрицы, как и требуется, удовлетворяют антикоммутационным соотношениям:

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = g^{\mu\nu}, \tag{2}$$

где $g^{\mu\nu}$ - тензор Минковского:

$$g^{\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu; \quad g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$$

Матрицу зарядового сопряжения C в этом представлении можно представить в виде:

$$C = \gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

При таком выборе матрица C будет удовлетворять основным требованиям, налагаемым на матрицу зарядового сопряжения:

- $C = -\overset{T}{C}.$
- $\overset{T}{C}{}^{-1}\gamma^{\mu}C = \overset{T}{\gamma^{\mu}}.$

Дираковское сопряжение имеет вид:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0.$$

Преобразования зарядового сопряжения выглядят следующим образом:

$$\bar{\psi}^C = \overset{T}{\psi} \overset{T}{C}{}^{-1},$$

$$\psi^C = C\overset{T}{\bar{\psi}}.$$

Преобразуем лагранжиан, используя следующие формулы:

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu \psi_{;\mu} = i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi_{;\mu} = i \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{L;\mu} \\ \psi_{R;\mu} \end{pmatrix} = i(\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_{L;\mu} + \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_{R;\mu}),$$

$$\bar{\psi}^C \psi = \overset{T}{\psi} \gamma^2 \gamma^0 \psi = \begin{pmatrix} \overset{T}{\psi}_L & \overset{T}{\psi}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \overset{T}{\psi}_L \sigma^2 \psi_L - \overset{T}{\psi}_R \sigma^2 \psi_R,$$

$$\bar{\psi}\psi^C = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^2 \overset{T}{\gamma^0} \psi^* = \psi^\dagger \gamma^2 \gamma^0 \psi^* = \psi_L^\dagger \sigma^2 \psi_L^* - \psi_R^\dagger \sigma^2 \psi_R^*.$$

Таким образом, лагранжиан (1) принимает вид:

$$\mathscr{L} = i(\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_{L;\mu} + \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_{R;\mu}) - \frac{m}{2}(\overset{T}{\psi}_L \sigma^2 \psi_L - \overset{T}{\psi}_R \sigma^2 \psi_R + \psi_L^\dagger \sigma^2 \psi_L^* - \psi_R^\dagger \sigma^2 \psi_R^*). \tag{4}$$

3 Инвариантность лагранжиана

Чтобы доказать лоренц-инвариантность лагранжиана, требуется показать, что при преобразованиях из полной группы Пуанкаре лагранжиан преобразуется как скаляр, т.е. $\mathscr{L}(\psi'(x')) = \mathscr{L}(\psi(x))$.

Указанная группа включает пространственные повороты в трех плоскостях x^1x^2, x^2x^3, x^3x^1, лоренцевы повороты в трех плоскостях x^0x^1, x^0x^2, x^0x^3, отражения пространственных осей x^1, x^2, x^3, трансляции по всем четырем координатным осям x^0, x^1, x^2, x^3 и все произведения указанных операций.

3.1 Общие замечания

При преобразованиях из полной группы Пуанкаре координаты преобразуются следующим образом:

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu.$$

При этом функции поля преобразуется так:

$$\psi'(x') = \Lambda\psi(x), \tag{5}$$

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}, \tag{6}$$

Матрицы L и Λ удовлетворяют:

$$\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = L^\mu{}_\nu \gamma^\nu,$$

$$\Lambda\gamma^\mu\Lambda^{-1} = (L^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

При этом оператор ∂_ν преобразуется так:

$$\partial'_\mu = (L^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \tag{7}$$

3.2 Инвариантность при поворотах системы отсчета

При поворотах системы отсчета матричные операторы Λ и Λ^{-1} имеют вид:

$$\Lambda^{lk} = \exp\left(\frac{1}{2}[\gamma^l, \gamma^k]\varphi\right), \tag{8}$$

$$(\Lambda^{-1})^{lk} = \exp\left(-\frac{1}{2}[\gamma^l, \gamma^k]\varphi\right).$$

Покажем отдельно, что каждое слагаемое в лагранжиане (1) преобразуется как скаляр. Рассмотрим первое слагаемое. Требуется показать, что

$$i\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x). \tag{9}$$

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') &= i\bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda\partial'_\mu\psi(x) = \\ &= i\bar{\psi}(x)L^\mu{}_\nu\gamma^\nu(L^{-1})^\eta{}_\mu\partial_\eta\psi(x) = i\bar{\psi}(x)\delta^\eta{}_\nu\gamma^\nu\partial_\eta\psi(x) = \\ &= i\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\partial_\nu\psi(x). \end{aligned}$$

Требование (9) удовлетворяется.

Рассмотрим теперь второе слагаемое. Требуется показать, что:

$$\bar{\psi}^{C\prime}(x')\psi'(x') = \bar{\psi}^C(x)\psi(x) \tag{10}$$

Выполним преобразования:

$$\bar{\psi}^{C\prime}(x')\psi'(x') = \overset{T}{\psi}{}'(x')\gamma^2\gamma^0\psi = (\Lambda\psi(x))^T\gamma^2\gamma^0\Lambda\psi(x) = \overset{T}{\psi}(x)\overset{T}{\Lambda}\gamma^2\gamma^0\Lambda\psi(x).$$

Отсюда следует, что требование (10) эквивалентно требованию:

$$\overset{T}{\Lambda}\gamma^2\gamma^0\Lambda = \gamma^2\gamma^0, \tag{11}$$

что, в свою очередь, эквивалентно:

$$\gamma^2\gamma^0\overset{T}{\Lambda}\gamma^2\gamma^0 = \Lambda^{-1}. \tag{12}$$

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} &\gamma^2\gamma^0\overset{T}{\Lambda}(\gamma^k\gamma^l)\gamma^2\gamma^0 = \\ &= (-C^{-1})\overset{T}{\Lambda}(\gamma^k\gamma^l)(-C) = C^{-1}\overset{T}{\Lambda}(\gamma^k\gamma^l)C = C^{-1}\Lambda(\overset{T}{\gamma}{}^l\overset{T}{\gamma}{}^k)C = \Lambda(C^{-1}\overset{T}{\gamma}{}^l\overset{T}{\gamma}{}^kC) = \\ &= \Lambda(C^{-1}\overset{T}{\gamma}{}^lCC^{-1}\overset{T}{\gamma}{}^kC) = \Lambda(\gamma^l\gamma^k) = \Lambda([\gamma^l\gamma^k]) = \Lambda(-[\gamma^k\gamma^l]) = \\ &= \Lambda^{-1}(\gamma^k\gamma^l). \end{aligned}$$

Требование (12) удовлетворяется, значит, удовлетворяется и требование (10).

Аналогично доказывается, что $\bar{\psi}'(x')\psi^{C\prime}(x') = \bar{\psi}(x)\psi^C(x)$

Таким образом, лоренц-инвариантность лагранжиана при преобразованиях поворотов системы отсчета доказана.

3.3 Инвариантность при отражениях пространственных осей

Так как формулы преобразования функций поля при отражении четного числа различных пространственных осей сводятся к поворотам, задаваемым формулами (5), (6) ограничимся преобразованием отражения всех трех пространственных осей (P-преобразованием) имеющим вид:

$$x'^0 = x^0, \quad \mathbf{x}' = -\mathbf{x}, \tag{13}$$

При этом функция поля преобразуется в таком виде:

$$\psi'(x') = \eta(P)\Lambda_{123}\psi(x), \quad \Lambda_{123} = \gamma^0, \tag{14}$$

а в силу двузначности спинорного представления фазовый множитель $\eta^2(P) = \pm 1$.

Требуется, чтобы каждое слагаемое в лагранжиане (1) преобразовывалось при этом как скаляр. Рассмотрим первое слагаемое. Требуется показать, что:

$$i\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x). \tag{15}$$

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned}
&i\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') = \\
&\quad = i\psi'^\dagger(x')\gamma^0\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') = i(\eta(P)\gamma^0\psi(x))^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial'_\mu\eta(P)\gamma^0\psi(x) = \\
&\quad = i\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0(\gamma^0\partial_0 - \gamma^1\partial_1 - \gamma^2\partial_2 - \gamma^3\partial_3)\gamma^0\psi(x) = \\
&\quad = i\psi^\dagger(x)\gamma^0(\gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1 + \gamma^2\partial_2 + \gamma^3\partial_3)\psi(x) = \\
&\quad = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x).
\end{aligned} \tag{16}$$

Результат (16) показывает, что выполняется требование (15).

Рассмотрим второе слагаемое. Требуется показать, что:

$$\bar{\psi}^{C\prime}(x')\psi'(x') = \bar{\psi}^C(x)\psi(x) \tag{17}$$

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned}
&\bar{\psi}^{C\prime}(x')\psi'(x') = \\
&\quad = \overset{T}{\psi}{}'(x')\gamma^2\gamma^0\psi'(x') = (\eta(P)\Lambda_{123}\psi(x))^T\gamma^2\gamma^0\eta(P)\Lambda_{123}\psi(x) = \\
&\quad = \eta^2(P)\psi^T(x)\overset{T}{\gamma^0}\gamma^2\gamma^0\gamma^0\psi(x) = \eta^2(P)\psi^T(x)\gamma^0\gamma^2\psi(x) = \\
&\quad = \overset{T}{\psi}(x)\gamma^2\gamma^0\psi(x).
\end{aligned} \tag{18}$$

При этом фазовый множитель выбран $\eta^2(P) = -1$.

Результат (18) показывает, что выполняется требование (17).

Рассмотрим третье слагаемое в лагранжиане (1). Требуется показать, что:

$$\bar{\psi}'(x')\psi^{C\prime}(x') = \bar{\psi}(x)\psi^C(x). \tag{19}$$

Выполним преобразования:

$$
\begin{aligned}
&\bar{\psi}'(x')\psi^{C\prime}(x') = \\
&\qquad = \psi'^{\dagger}(x')\gamma^2\gamma^0\psi'^{*}(x') = (\eta(P)\Lambda_{123}\psi)^{\dagger}(x)\gamma^2\gamma^0(\eta(P)\Lambda_{123}\psi(x))^{*} = \\
&\qquad = \eta^2(P)\psi^{\dagger}(x)\overset{\dagger}{\gamma^0}\gamma^2\gamma^0\overset{*}{\gamma^0}\psi(x) = \eta^2(P)\psi^{\dagger}(x)\gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^0\psi(x) = \\
&\qquad = \eta^2(P)\psi^{\dagger}(x)\gamma^0\gamma^2\psi(x) = \psi^{\dagger}(x)\gamma^2\gamma^0\psi(x) = \\
&\qquad = \bar{\psi}(x)\psi^{C}(x). \qquad (20)
\end{aligned}
$$

При этом как и раньше фазовый множитель выбран $\eta^2(P) = -1$.

Результат (20) показывает, что выполняется требование (19).

Таким образом лоренц-инвариантность лагранжиана при преобразованиях отражения пространственных осей доказана.

3.4 Инвариантность при трансляциях вдоль осей

Преобразования координат имеют вид:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}.$$

Дифференциальный оператор остается неизменным:

$$\partial'_{\mu} = \partial_{\mu}.$$

Функция поля преобразуется следующим образом:

$$\psi(x) \to \psi(x + a).$$

При этом, очевидно, действие не изменяется:

$$\int dx \mathscr{L}(\psi(x + a)) = \int dx \mathscr{L}(\psi(x)),$$

а значит и лагранжиан лоренц-инвариантен.

Теперь, после рассмотрения всех возможных преобразовании из полной группы Пуанкаре, лоренц-инвариантность лагранжиана (1) доказана.

4 Уравнение движения

4.1 Нахождение уравнения движения

Лагранжиан (2) расщепился на сумму произведений двухкомпонентных частей функции поля ψ содержащих только ψ_L или ψ_R.

В выбранном представлении гамма-матриц $[\gamma^l, \gamma^k]$ имеет диагональный вид. Преобразования из собственной группы Лоренца имеют вид (8), значит, ψ_L и ψ_R преобразуются независимо. Поэтому можно положить компоненту $\psi_R = 0$. И рассматривать теорию двухкомпонентных спиноров.

Однако, заметим, что матрица преобразования функции поля при отражении пространственных осей имеет вид (14) и не является диагональной, а значит, смешивает ψ_L и ψ_R. Таким образом, теория для ψ_L и ψ_R не является инвариантной относительно P-преобразования. Отметим, что из вида матрицы γ^0 следует, что P-преобразование меняет местами ψ_L и ψ_R:

$$\eta(P)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix} = \eta(P)\begin{pmatrix}\psi_R\\ \psi_L\end{pmatrix}.$$

Итак, с учетом сказанного выше лагранжиан (4) принимает вид:

$$\mathscr{L} = i(\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L) - \frac{m}{2}(\overset{T}{\psi}_L \sigma^2 \psi_L + \psi_L^\dagger \sigma^2 \psi_L^*). \tag{21}$$

Запишем общий вид уравнения Лагранжа-Эйлера:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{i;\nu}} = 0. \tag{22}$$

Заметим, что в силу антикоммутативного характера спиноров, дифференцирование функционала $\psi_1(\psi)\psi_2(\psi)$ имеет вид:

$$\frac{d}{d\psi}(\psi_1(\psi)\psi_2(\psi)) = \frac{d}{d\psi}(\psi_1(\psi))\psi_2(\psi) - \psi_1(\psi)\frac{d}{d\psi}(\psi_2(\psi)). \tag{23}$$

Подставляя лагранжиан (21) в (22), дифференцируя по ψ_L^* и учитывая (23), получаем:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_L^*} = i\bar{\sigma}^\mu \psi_{L;\mu} - \frac{m}{2}(\sigma^2 \psi_L^* - \psi_L^\dagger \sigma^2),$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_{L;\nu}^*} = 0,$$

при этом берется левая вариационная производная. Заметим, что:

$$\psi_L^\dagger \sigma^2 = \psi_{L,\alpha}^* \sigma_{\alpha\beta}^2 = -\sigma_{\beta\alpha}^2 \psi_{L,\alpha}^* = -\sigma^2 \psi_L^*.$$

Таким образом, получаем уравнение движения:

$$i\bar{\sigma}^\mu \psi_{L;\mu} - m\sigma^2 \psi_L^* = 0. \tag{24}$$

Эрмитово сопрягая (24), получаем уравнение:

$$i\psi_{L;\mu}^\dagger \bar{\sigma}^\mu + m\psi_L^T \sigma^2 = 0., \tag{25}$$

которое, очевидно, является уравнением движения, полученным из лагранжиана (21), при дифференцировании по ψ_L (правая вариационная производная).

4.2 Решение уравнения движения

Рассмотрим уравнение (24). Оно содержит как функцию поля ψ, так и комплексно сопряженную ψ^*, поэтому решение будем искать решение в виде суперпозиции плоских волн:

$$\psi_L(x) = a(\vec{p})u(\vec{p})e^{-ipx} + a^*(\vec{p})v(\vec{p})e^{ipx}, \tag{26}$$

где $a(\vec{p})$ - произвольная амплитуда. Отметим, что амплитуда, стоящая перед $v(\vec{p})$, выбрана как $a^*(\vec{p})$. Такой выбор станет понятен после подстановки (26) в уравнение (24).

Заметим, что:

$$\begin{aligned}
&i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu e^{\pm ipx} = \\
&\qquad = i(\sigma^0\partial_0 - \sigma^1\partial_1 - \sigma^2\partial_2 - \sigma^3\partial_3)e^{\pm i(p_0x^0+p_1x^1+p_2x^2+p_3x^3)} = \\
&\qquad = \mp(\sigma^0p_0 - \sigma^1p_1 - \sigma^2p_2 - \sigma^3p_3)e^{\pm ipx} = \\
&\qquad = \mp(\sigma^0p^0 + \sigma^1p^1 + \sigma^2p^2 + \sigma^3p^3)e^{\pm ipx} = \\
&\qquad = \mp(p^0 + \vec{\sigma}\vec{p})e^{\pm ipx}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Подставляя (26) в (24) и учитывая (27), получим :

$$\begin{aligned}
&a(\vec{p})(p^0 + \vec{\sigma}\vec{p})u(\vec{p})e^{-ipx} - a^*(\vec{p})(p^0 + \vec{\sigma}\vec{p})v(\vec{p})e^{ipx} - \\
&\qquad - m\sigma^2a^*(\vec{p})u^*(\vec{p})e^{ipx} - m\sigma^2a(\vec{p})v^*(\vec{p})e^{-ipx} = 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Приравнивая слагаемые перед экспонентами в одинаковых степенях, получаем систему из двух уравнений:

$$a(\vec{p})(p^0 + \vec{\sigma}\vec{p})u(\vec{p}) = a(\vec{p})m\sigma^2v^*(\vec{p}), \tag{29}$$

$$a^*(\vec{p})(p^0 + \vec{\sigma}\vec{p})v(\vec{p}) = -a^*(\vec{p})m\sigma^2u^*(\vec{p}). \tag{30}$$

Теперь понятен выбор амплитуд. Сокращая (29), (30) на $a(\vec{p})$, $a^*(\vec{p})$, получаем систему уравнений на $u(\vec{p})$, $v(\vec{p})$, в которую не входят произвольные амплитуды:

$$(p^0 + \vec{\sigma}\vec{p})u(\vec{p}) = m\sigma^2v^*(\vec{p}), \tag{31}$$

$$(p^0 + \vec{\sigma}\vec{p})v(\vec{p}) = -m\sigma^2u^*(\vec{p}). \tag{32}$$

Далее потребуется соотношение:

$$\left(\frac{p^0 + \vec{\sigma}\vec{p}}{m}\right)^{-1} = \frac{p^0 - \vec{\sigma}\vec{p}}{m}. \tag{33}$$

Докажем справедливость соотношения (33):

$$\begin{aligned}
&\frac{p^0 + \vec{\sigma}\vec{p}}{m} \cdot \frac{p^0 - \vec{\sigma}\vec{p}}{m} = \\
&\qquad = \frac{(p^0)^2 - (\vec{\sigma}\vec{p})^2}{m^2} = \frac{(p^0)^2 - p_\mu\sigma_\mu p_\nu\sigma_\nu}{m^2} = \frac{(p^0)^2 - p_\mu p_\nu(\delta_{\mu\nu} + i\epsilon_{\mu\nu\eta}\sigma_\eta)}{m^2} = \\
&\qquad = \frac{(p^0)^2 - (\vec{p})^2}{m^2} = 1.
\end{aligned}$$

Используя (33), преобразуем уравнения (31), (32):

$$u(\vec{p}) = \frac{E - \vec{\sigma}\vec{p}}{m}\sigma^2 v^*(\vec{p}), \tag{34}$$

$$v(\vec{p}) = -\frac{E - \vec{\sigma}\vec{p}}{m}\sigma^2 u^*(\vec{p}). \tag{35}$$

Далее разложим $u(\vec{p})$, $v(\vec{p})$ по базису двухкомпонентных спиноров, задаваемых уравнениями Вейля:

$$\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{p}\xi_{\pm}(\vec{p}) = \pm\xi_{\pm}(\vec{p}), \tag{36}$$

где ξ_+, ξ_- правовинтовой и левовинтовой спиноры, соответственно.

Прежде преобразуем уравнение (36):

$$\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{p}\xi_{\pm}(\vec{p}) = \pm\xi_{\pm}(\vec{p}) \Longleftrightarrow \frac{\vec{\sigma^*}\vec{p}}{p}\xi^*_{\pm}(\vec{p}) = \pm\xi^*_{\pm}(\vec{p}) \Longleftrightarrow \frac{\sigma^2\vec{\sigma^*}\vec{p}\sigma^2}{p}\sigma^2\xi^*_{\pm}(\vec{p}) = \pm\sigma^2\xi^*_{\pm}(\vec{p})$$

Учитывая

$$\sigma^2\vec{\sigma}^*\sigma^2 = -\vec{\sigma},$$

получаем

$$\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{p}\sigma^2\xi^*_{\pm}(\vec{p}) = \mp\sigma^2\xi^*_{\pm}(\vec{p}),$$

значит, можно положить

$$\xi_+ = \sigma^2\xi^*_- \tag{37}$$

Заметим, что система уравнений (31), (32) имеет два линейно независимых решения: u_1, u_2 и соответственно v_1, v_2.

Положим:

$$u_1(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+p}{2E}}\xi_- \tag{38}$$

$$v_2(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+p}{2E}}\xi_- \tag{39}$$

Подставим (38) в (35) и учтем (36):

$$\begin{aligned} v_1(\vec{p}) = -\frac{E - \vec{\sigma}\vec{p}}{m}\sigma^2\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\xi^*_-(\vec{p}) = \\ = -\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\frac{E - \vec{\sigma}\vec{p}}{m}\xi_+(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+p}{2E}}\frac{E-p}{m}\xi_+(\vec{p}) = \\ = -\sqrt{\frac{E-p}{2E}}\xi_+(\vec{p}) \end{aligned} \tag{40}$$

Аналогично, подставив (39) в (34) , получим:

$$u_2(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E-p}{2E}}\xi_+(\vec{p}) \tag{41}$$

Итак, общее решение уравнения (24) представим в виде:

$$\psi_L(x) = \psi_{L,1}(x) + \psi_{L,2}(x), \tag{42}$$

где

$$\psi_{L,1}(x) = a(\vec{p})\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\xi_-(\vec{p})e^{-ipx} - a^*(\vec{p})\sqrt{\frac{E-p}{2E}}\xi_+(\vec{p})e^{ipx}$$

$$\psi_{L,2}(x) = b(\vec{p})\sqrt{\frac{E-p}{2E}}\xi_+(\vec{p})e^{-ipx} + b^*(\vec{p})\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\xi_-(\vec{p})e^{ipx}$$

Выполняя преобразование Фурье и обозначая фурье-амплитуды соответственно $a(\vec{p}), b(\vec{p})$, получаем:

$$\psi_L(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int[a(\vec{p})\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\xi_-(\vec{p})e^{-ipx} - a^*(\vec{p})\sqrt{\frac{E-p}{2E}}\xi_+(\vec{p})e^{ipx}+$$
$$+ b(\vec{p})\sqrt{\frac{E-p}{2E}}\xi_+(\vec{p})e^{-ipx} + b^*(\vec{p})\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\xi_-(\vec{p})e^{ipx}]d\vec{p} \quad (43)$$

Для дальнейшего исследования решения (43), общее решение удобно разложить на положительно- и отрицательно-частотные части:

$$\psi_L^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int[-a^*(\vec{p})\sqrt{\frac{E-p}{2E}}\xi_+(\vec{p}) + b^*(\vec{p})\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\xi_-(\vec{p})]e^{ipx}d\vec{p} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \psi^+(\vec{p})e^{ipx}d\vec{p} \quad (44)$$

$$\psi_L^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int[a(\vec{p})\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\xi_-(\vec{p}) + b(\vec{p})\sqrt{\frac{E-p}{2E}}\xi_+(\vec{p})]e^{-ipx}d\vec{p} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \psi^-(\vec{p})e^{-ipx}d\vec{p}. \quad (45)$$

Дальше часто будут встречаться интегралы вида:

$$\int d\vec{x}\psi_1(x)\psi_2(x). \quad (46)$$

Если $\psi_1(x) = \psi_L^+(x)$ - положительно-частотная часть, $\psi_2(x) = \psi_L^-(x)$ - отрицательно-частотная, то интеграл (46) преобразуется следующим образом:

$$\int d\vec{x}\psi_1(x)\psi_2(x) = \int d\vec{x}d\vec{p}d\vec{q}[\psi_1(p)e^{ipx}\psi_2(q)e^{-iqx}] = \int d\vec{p}d\vec{q}e^{i(p^0-q^0)x^0}[\psi_1(p)\psi_2(q)]\int d\vec{x}e^{-i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}} =$$
$$= \int d\vec{p}d\vec{q}e^{i(p^0-q^0)x^0}[\psi_1(p)\psi_2(q)](2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q}) =$$
$$= (2\pi)^3\int d\vec{p}\psi_1(\vec{p})\psi_2(\vec{p}). \quad (47)$$

Если $\psi_1(x) = \psi_L^+(x)$ - положительно-частотная часть, $\psi_2(x) = \psi_L^+(x)$ положительно-частотная часть, то интеграл (46) преобразуется следующим образом::

$$\int d\vec{x}\psi_1(x)\psi_2(x) = \int d\vec{x}d\vec{p}d\vec{q}[\psi_1(p)e^{ipx}\psi_2(q)e^{iqx}] = \int d\vec{p}d\vec{q}e^{i(p^0+q^0)x^0}[\psi_1(p)\psi_2(q)]\int d\vec{x}e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} =$$
$$= \int d\vec{p}d\vec{q}e^{i(p^0+q^0)x^0}[\psi_1(p)\psi_2(q)](2\pi)^3\delta(\vec{p}+\vec{q}) =$$
$$= (2\pi)^3\int d\vec{p}\psi_1(\vec{p})\psi_2(-\vec{p})e^{2ip^0x^0}. \quad (48)$$

5 Вектор энергии-импульса

Далее всюду в этом параграфе для удобства записи под ψ будем понимать ψ_L.

Лагранжиан (4) определен с точностью до четырех-дивергенции:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\psi^\dagger(x)\bar{\sigma}^\mu\psi(x)) = \psi^\dagger_{;\mu}(x)\bar{\sigma}^\mu\psi(x) + \psi^\dagger(x)\bar{\sigma}^\mu\psi_{;\mu}(x). \quad (49)$$

Удобно выбрать его так, что если функции поля удовлетворяют уравнениям движения, то лагранжиан обращается в нуль. Так, вычитая из (4) (49), получаем:

$$\mathscr{L} = \frac{i}{2}(\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\psi_{;\mu} - \psi^\dagger_{;\mu}\bar{\sigma}^\mu\psi) - \frac{m}{2}(\psi^T\sigma^2\psi + \psi^\dagger\sigma^2\psi^*). \quad (50)$$

Пользуясь теоремой Нётер, запишем тензор энергии-импульса:

$$T^{kl} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_{;k}}\psi^{;l} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^\dagger{}_{;k}}\psi^{\dagger;l} - g^{lk}\mathscr{L}. \quad (51)$$

Подставляя лагранжиан (50) в выражение (51) получаем:

$$T^{kl} = \frac{i}{2}(\psi^\dagger\bar{\sigma}^k\psi^{;l} - \psi^{\dagger;l}\bar{\sigma}^k\psi).$$

$$T^{0l} = \frac{i}{2}(\psi^\dagger\psi^{;l} - \psi^{\dagger;l}\psi). \quad (52)$$

Вектор энергии-импульса выражается через (52):

$$P^l = \int T^{0l}d\vec{x} \quad (53)$$

Раскладывая ψ на частотные составляющие, получаем:

$$P^l = \int d\vec{x}\frac{i}{2}\sum_{\mu,\nu=\pm}[\psi^\dagger_\mu(x)\psi^{;l}_\nu(x) - \overset{\dagger}{\psi}{}^{;l}_\mu(x)\psi_\nu(x)].$$

Учитывая выражения (44), (45) для частотных частей функции поля ψ, преобразования (48), (47), а также условия ортонормированности вейлевских спиноров:

$$\xi_+^\dagger\xi_+ = \xi_-^\dagger\xi_- = 1, \quad \xi_-^\dagger\xi_+ = 0, \quad (54)$$

получаем:

$$\int d\vec{x}[\frac{i}{2}\psi^{+,\dagger}(x)\psi^{+;l}(x)] =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{x}d\vec{p}d\vec{q}[\frac{i}{2}\psi^{+,\dagger}(\vec{p})e^{-ipx}(iq^l)\psi^{+}(\vec{q})e^{iqx}] = -\frac{1}{2}\int d\vec{p}p^l\psi^{+,\dagger}(\vec{p})\psi^{+}(\vec{p}) =$$
$$= -\frac{1}{2}\int d\vec{p}p^l(-a\sqrt{\frac{E-p}{2E}}\xi_+^\dagger + b\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\xi_-^\dagger)(-a^*\sqrt{\frac{E-p}{2E}}\xi_+ + b^*\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\xi_-) =$$
$$= -\frac{1}{2}\int d\vec{p}p^l[aa^*\frac{E-p}{2E} + bb^*\frac{E+p}{2E}] \quad (55)$$

Аналогично получаем:

$$\int d\vec{x}[\frac{i}{2}\psi^{-,\dagger}(\vec{x})\psi^{-;l}(\vec{x})] = \frac{1}{2}\int d\vec{p}p^l[a^*a\frac{E+p}{2E} + b^*b\frac{E-p}{2E}]$$

$$\int d\vec{x}[-\frac{i}{2}\psi^{-;l}{}^{\dagger}(\vec{x})\psi^{-}(\vec{x})] = \frac{1}{2}\int d\vec{p}p^l[a^*a\frac{E+p}{2E} + b^*b\frac{E-p}{2E}]$$

$$\int d\vec{x}[-\frac{i}{2}\psi^{+;l}{}^{\dagger}(\vec{x})\psi^{+}(\vec{x})] = -\frac{1}{2}\int d\vec{p}p^l[aa^*\frac{E-p}{2E} + bb^*\frac{E+p}{2E}]$$

Слагаемые, содержащие функции поля разной частотности, в сумме дают нель, так как из вида частотных частей функции поля (44) (45) следует, что:

$$\psi^{-;l}(x) = -ip^l\psi^{-}(x),$$

значит, например,

$$\int d\vec{x}[\frac{i}{2}\psi^{+,\dagger;l}(\vec{x})\psi^{-}(\vec{x})] = \int d\vec{x}[\frac{i}{2}\psi^{+,\dagger}(\vec{x})\psi^{-;l}(\vec{x})]$$

Таким образом, окончательно получаем вектор энергии-импульса:

$$P^l = \int d\vec{p}p^l[a^*a\frac{E+p}{2E} + b^*b\frac{E-p}{2E} - aa^*\frac{E-p}{2E} - bb^*\frac{E+p}{2E}] \quad (56)$$

6 Вектор спина

Теорема Нётер дает выражение для тензора спинового момента:

$$S^{k,lm} = -\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{i;k}}u_j(x)A_i^{j,lm} \Rightarrow S^{k,lm} = -\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_{;k}}A^{\psi,lm}\psi(x),$$

где $A^{\psi,lm}$ определяется так: вариация функции поля при бесконечно малых 4-вращениях задается в виде:

$$\psi'(x') = \psi(x) + \delta\psi,$$
$$\delta\psi = \sum_{j,k<l} A^{\psi,lm}\psi(x)\delta\omega_{lm}$$

Функция поля ψ при бесконечно малых вращениях преобразуется с помощью матрицы

$$\Lambda = 1 + \lambda^{lm}\omega_{lm},$$

причем

$$\lambda^{lm} = -\frac{i}{2}\sigma^{lm},$$

$$\sigma^{lm} = i\frac{\gamma^l\gamma^m - \gamma^m\gamma^l}{2},$$

поэтому

$$A^{\psi,lm} = -\frac{i}{2}\sigma^{lm} \tag{57}$$

$$S^{k,lm} = -\frac{1}{2}\bar{\psi}(x)\gamma^k\sigma^{lm}\psi(x) = \frac{1}{2}\bar{\psi}(x)\gamma^k\sigma^{ml}\psi(x)$$

$$S^{0,lm} = \frac{1}{2}\psi(x)^\dagger\gamma^0\sigma^{ml}\psi(x) \tag{58}$$

В случае, когда ψ не зависит от x^1, x^2, выполняется уравнение непрерывности для $S^{21,k}$. Полагая $\frac{\partial}{\partial x^1} = 0$, $\frac{\partial}{\partial x^2} = 0$, получим

$$\frac{\partial S^{21,k}}{\partial x^k} = 0 \tag{59}$$

Отсюда следует, что проекция спина $S_3 = \int d\vec{x} S^{0,21}$ на ось x^3 сохраняется во времени.

$$S^{0,21} = \frac{1}{2}\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0\sigma^{12}\psi(x) = \frac{1}{2}\psi^\dagger(x)\sigma^{12}\psi(x)$$

$$S^{0,21} = \frac{1}{2}\psi^\dagger(x)\sigma^{12}\psi(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\psi_L^\dagger, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma^3 & 0\\ 0 & \sigma^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\psi_L^\dagger(x)\sigma^3\psi_L(x)$$

Выберем систему отсчета такой, что $p^1 = p^2 = 0$. В этой системе спиноры $\xi_+(p^3), \xi_-(p^3)$ (импульс направлен вдоль оси x^3) являются, в соответствии с уравнениями Вейля, собственными состояниями матрицы σ^3, с собственными значениями, соответственно, ± 1.

$$\sigma^3\xi_\pm(p^3) = \pm\xi_\pm(p^3), \tag{60}$$

но при этом $\xi_+(-p^3), \xi_-(-p^3)$ (импульс направлен против оси x^3), в соответствии с уравнениями Вейля,

$$\sigma^3\xi_\pm(-p^3) = \mp\xi_\pm(-p^3). \tag{61}$$

Отсюда следует очевидное равенство:

$$\xi_+(-p^3) = \xi_-(p^3). \tag{62}$$

Раскладывая ψ на частотные составляющие, получаем:

$$S^{0,21} = \frac{1}{2}\psi_L^{\mu,\dagger}(x)\sigma^3\psi_L^\nu(x), \text{ где } (\mu, \nu = \pm)$$

$$S_3 = \int d\vec{x} S^{0,21}$$

Учитывая выражения (44), (45) для частотных частей, а также условия ортонормированности вейлевских спиноров, получаем:

$$\int d\vec{x}[\frac{1}{2}\psi_L^{+,\dagger}(\vec{x})\sigma^3\psi_L^+(\vec{x})] = \frac{1}{2}\int d\vec{p}\psi^{+,\dagger}(\vec{p})\sigma^3\psi^+(\vec{p}) =$$

$$= \frac{1}{2}\int d\vec{p}(-a^*\sqrt{\frac{E-p}{2E}}\xi_+ + b^*\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\xi_-)^\dagger\sigma^3(-a^*\sqrt{\frac{E-p}{2E}}\xi_+ + b^*\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\xi_-) =$$

$$= \frac{1}{2}\int d\vec{p}[aa^*\frac{E-p}{2E}\xi_+^\dagger\sigma^3\xi_+ + bb^*\frac{E+p}{2E}\xi_-^\dagger\sigma^3\xi_- -$$

$$- ab^*\sqrt{\frac{(E-p)(E+p)}{(2E)^2}}\xi_+^\dagger\sigma^3\xi_- - ba^*\sqrt{\frac{(E-p)(E+p)}{(2E)^2}}\xi_-^\dagger\sigma^3\xi_+] =$$

$$= \frac{1}{2}\int d\vec{p}[aa^*\frac{E-p}{2E} - bb^*\frac{E+p}{2E}]. \quad (63)$$

$$\int d\vec{x}[\frac{1}{2}\psi_L^{-,\dagger}(\vec{x})\sigma^3\psi_L^-(\vec{x})] = \frac{1}{2}\int d\vec{p}\psi^{-,\dagger}(\vec{p})\sigma^3\psi^-(\vec{p}) =$$

$$= \frac{1}{2}\int d\vec{p}(a\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\xi_- + b\sqrt{\frac{E-p}{2E}}\xi_+)^\dagger\sigma^3(a\sqrt{\frac{E+p}{2E}}\xi_- + b\sqrt{\frac{E-p}{2E}}\xi_+) =$$

$$= \frac{1}{2}\int d\vec{p}[-a^*a\frac{E+p}{2E} + b^*b\frac{E-p}{2E}]. \quad (64)$$

Выпишем подробно вычисления интеграла:

$\int d\vec{x}[\frac{1}{2}\psi_L^{+,\dagger}(\vec{x})\sigma^3\psi_L^-(\vec{x})] = \frac{1}{2}\int d\vec{p}e^{-2ip^0x^0}\psi^{+,\dagger}(\vec{p})\sigma^3\psi^-(-\vec{p}) =$
$= \frac{1}{2}\int d\vec{p}e^{-2ip^0x^0}[-a(\vec{p})a(-\vec{p})\sqrt{\frac{(E-p)(E+p)}{(2E)^2}}\xi_+^\dagger(\vec{p})\sigma^3\xi_-(-\vec{p}) + b(\vec{p})b(-\vec{p})\sqrt{\frac{(E-p)(E+p)}{(2E)^2}}\xi_-^\dagger(\vec{p})\sigma^3\xi_+(-\vec{p}) -$
$- ab\frac{E-p}{2E}\xi_+^\dagger(\vec{p})\sigma^3\xi_+(-\vec{p}) + b(\vec{p})a(-\vec{p})\frac{E+p}{2E}\xi_-^\dagger(\vec{p})\sigma^3\xi_-(-\vec{p})] =$
$= \frac{1}{2}\int d\vec{p}e^{-2ip^0x^0}[-a(\vec{p})a(-\vec{p})\sqrt{\frac{(E-p)(E+p)}{(2E)^2}}\xi_+^\dagger(\vec{p})\sigma^3\xi_+(\vec{p}) + b(\vec{p})b(-\vec{p})\sqrt{\frac{(E-p)(E+p)}{(2E)^2}}\xi_-^\dagger(\vec{p})\sigma^3\xi_-(\vec{p}) =$
$= \frac{1}{2}\int\limits_{p^3>0} d\vec{p}e^{-2ip^0x^0}[-a(\vec{p})a(-\vec{p})\sqrt{\frac{(E-p)(E+p)}{(2E)^2}}\xi_+^\dagger(\vec{p})\sigma^3\xi_+(\vec{p}) + b(\vec{p})b(-\vec{p})\sqrt{\frac{(E-p)(E+p)}{(2E)^2}}\xi_-^\dagger(\vec{p})\sigma^3\xi_-(\vec{p}) +$
$+ \frac{1}{2}\int\limits_{p^3<0} d\vec{p}e^{-2ip^0x^0}[-a(\vec{p})a(-\vec{p})\sqrt{\frac{(E-p)(E+p)}{(2E)^2}}\xi_+^\dagger(\vec{p})\sigma^3\xi_+(\vec{p}) +$
$+ b(\vec{p})b(-\vec{p})\sqrt{\frac{(E-p)(E+p)}{(2E)^2}}\xi_-^\dagger(\vec{p})\sigma^3\xi_-(\vec{p}) = 0$

Аналогично:

$$\int d\vec{x}[\frac{1}{2}\psi_L^{+,\dagger}(\vec{x})\sigma^3\psi_L^-(\vec{x})] = 0$$

Таким образом:

$$S_3 = \frac{1}{2}\int d\vec{p}[aa^*\frac{E-p}{2E} - bb^*\frac{E+p}{2E} - a^*a\frac{E+p}{2E} + b^*b\frac{E-p}{2E}], \quad (65)$$

7 Квантование

Будем квантовать поле по Ферми-Дираку. Определяя лагранжиан используя нормальные произведения

$$\mathscr{L} = i : (\psi_L^\dagger\bar{\sigma}^\mu\psi_L) : -\frac{m}{2} : (\overset{T}{\psi}_L\sigma^2\psi_L + \psi_L^\dagger\sigma^2\psi_L^*) :, \quad (66)$$

получим выражения для динамических переменных: тензор энергии-импульса

$$T^{kl} = \frac{i}{2} : (\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^k \psi_L^{;l} - \psi_L^{\dagger;l} \bar{\sigma}^k \psi_L) :,$$

тензор плотности спина

$$S^{k,lm} = \frac{1}{2} : \bar{\psi}(x)\gamma^k \sigma^{ml} \psi(x) : .$$

Придадим фурье-амплитудам a, b, a^*, b^* (при этом заменяя a^*, b^* на $a^\dagger, b^\dagger$) операторный смысл и установим перестановочные соотношения:

$\{a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})\} = \delta(\vec{p} - \vec{q})$

$\{b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{q})\} = \delta(\vec{p} - \vec{q})$

Учитывая эти соотношения, отбрасывая бесконечную константу, получаем согласно (56), (65):

вектор энергии-импульса:

$$P^l = \int d\vec{p} p^l [a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p})], \tag{67}$$

проекцию спина на направление движения:

$$S_3 = \frac{1}{2} \int d\vec{p} [-a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p})] \tag{68}$$

Отсюда следует, что $a^\dagger, a$ суть операторы рождения и уничтожения частицы с импульсом p массой $m^2 = p^2$ и проекцией спина на направление движения $-\frac{1}{2}$; $b^\dagger, b$ суть операторы рождения и уничтожения частицы с импульсом p массой $m^2 = p^2$ и проекцией спина на направление движения $\frac{1}{2}$.

8 Ультрарелятивистский предел

При $E \gg m$ после совершения предельного перехода функция поля (14) принимает вид:

$$\psi_L(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int [a \xi_- e^{-ipx} + b^\dagger \xi_- e^{ipx}] d\vec{p}.$$

При этом операторы поля $b^\dagger, b$ переходят в операторы рождения и уничтожения правого антинейтрино, $a^\dagger, a$ левого нейтрино. Таким образом, теория безмассового нейтрино восстанавливается.

9 Заключение

Рассмотрена теория майорановского фермиона. Установлена лоренц-инвариантность теории, получено решение уравнения движения, найдены интегралы движения. Установлено, что в ультрарелятивистском случае восстанавливается теория безмассового (вейлевского) нейтрино.

Список литературы

[1] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.:Наука, 1976.

[2] Пескин М., Шредер Д. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2001.

[3] Зи Э. Квантовая теория поля в двух словах. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2009.

[4] Вайнберг С. Квантовая теория поля. Т. 1. Общая теория. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.