Лекция 13

Вычисление сечений процессов во внешнем поле (КЭД)

[1]

Нужны Фейнман. правила.

- внешние электроны / позитроны и $u_s(p), v_s(p) \longmapsto u_{n,s,p_y p_z}(x)$

$$v_{n,s,p_y,p_z}(x)$$

- пропагатор электрона / позитрона

$$S(x,x') = T\left(\psi(x)\bar{\psi}(x')\right) =$$

$$= \int \sum_{n,s} \psi_{n,s,p_y,p_z}(x)\,\bar{\psi}_{n,s,p_y,p_z}(x')\,\frac{dp_y\,dp_z}{(2\pi)^2}$$

$$S(x,x') = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x,x')$$

$$S_n(x,x') = \int \frac{dp_y\,dp_z}{(2\pi)^2}\, e^{i(-E_n(t-t') + p_y(y-y') + p_z(z-z'))} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\sum_{s=\pm 1/2} u_{n,s}(\xi)\,\bar{u}_{n,s}(\xi')}_{\text{спиновые суммы для фикс. } n} \qquad \xi = \sqrt{\beta}\left(x - \frac{p_y}{\sqrt{\beta}}\right)$$

Точные выражения для $S_n \to$ Mikheev, Kuznetsov.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}$$

Внешнее классическое ЭМ поле: $A_{\mu} \mapsto A_{\mu} + A_{\mu}^{cl}$

$$F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^{cl}$$

$$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \mapsto F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + 2F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}^{cl} + F_{\mu\nu}^{cl}F_{\mu\nu}^{cl}.$$

$$(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu})F_{\mu\nu}^{cl}.$$

По частям, $\partial_{\mu}F_{\mu\nu}^{cl}$ — ур-я Максвелла.

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{a}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}}_{} + i\bar\psi\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA^a_\mu - ieA_\mu)\psi - m\bar\psi\psi$$

квадратичное действие для фотонов на фоне внешнего пол.

квадратичное действие для фермионов

решение ур. Дирака точно в уровни Ландау

взаимодействие.

- свободные фотоны не изменились, т.к. нет в лагр. вз-я с эл.м. полем. (в древесном приближении, не учитывая петлевых поправок)

Однако даже в древесных процессах поляризации фотонов важна.

Без магнитного поля $\vec{k} \parallel x$

2 поляризации, вдоль y и вдоль z

Если есть $\vec{B} \parallel z$ то поляризации не эквивалентны.

ordinary perp. $\varepsilon^{(0)}_\mu \parallel y$, $\varepsilon^{(e)}_\mu \parallel z \parallel \vec{B}$ extraordinary parallel

Если $\vec{k} \not\perp \vec{B}$, вводим $\varphi_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}/B$, $\tilde\varphi_{\mu\nu} = \tilde F_{\mu\nu}/B$

$$\varepsilon^{(0)}_\mu = \frac{(q\varphi)_\mu}{\sqrt{q_\perp^2}}, \quad \varepsilon^{(e)}_\mu = \frac{(q\tilde\varphi)_\mu}{\sqrt{q_\parallel^2}}$$

$$q_\perp^2 = (q\varphi\varphi q)$$
$$q_\parallel^2 = (q\tilde\varphi\tilde\varphi q) = q_0^2 - q_z^2$$

Распад $\gamma \to e^+e^-$ (вклад 0-го уровня Ландау)

~~Схема~~ ~~З.С.И.~~ ~~в плоскости~~

- Не идет в отсутствие внешнего поля. Запрещено законом сохранения. (Э и И). Э: $\omega > 2m$ то разрешено.
И

Магнитное поле: нет З.С.И в плоск. $\perp B$ ⇒ мож.

$$\mathcal{L}_{int} = e(\bar\psi(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x))$$

$$\psi(x) = \int dp_y\, dp_z \left(a_{0,+1/2}\, \psi^+_{0,p'}(x) + b^+_{0,-1/2}\, \psi^-_{0,p}(x)\right)$$

$\boxed{3}$

позитрон $$\psi^+ = \frac{(eB/\pi)^{1/4}}{\sqrt{2E'(E'+m)}}\, u_{p'}\, e^{-\xi'^2/2}\, e^{-iE't + ip_y'y + ip_z'z} \quad \| \; \xi' = \sqrt{\beta}\left(x + \frac{p_y'}{\beta}\right)$$

электрон $$\psi^- = \frac{(eB/\pi)^{1/4}}{\sqrt{2E(E-m)}}\, u_{-p}\, e^{-\xi^2/2}\, e^{iEt - ip_y y - ip_z z} \quad \| \; \xi = \sqrt{\beta}\left(x - \frac{p_y}{\beta}\right)$$

$$u_{p'} = \begin{pmatrix} 0 \\ E'+m \\ 0 \\ -p_z \end{pmatrix} \qquad u_{-p} = \begin{pmatrix} 0 \\ E-m \\ 0 \\ -p_z \end{pmatrix} \qquad E^2 = p_z^2 + m^2$$

$n=0$

$$A_\mu = \sum_{\lambda=1,2,0,3} \int d^4q\, \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(c_\lambda\, \varepsilon_\mu^{(\lambda)} e^{-iqx} + c_\lambda^+\, \varepsilon_\mu^{(\lambda)*} e^{iqx}\right)$$

$$q = (\omega, q_x, \underset{0}{q_y}, q_z)$$ вдоль B.

$q_y = 0$ без ограничений общности

$$\omega^2 = q_x^2 + q_z^2$$

Матричный элемент

$$M_\lambda = e\, \frac{(eB/\pi)^{1/2}}{2\sqrt{EE'}\sqrt{2\omega}\sqrt{(E-m)(E'+m)}} \int d^4x \left(\overline{u}_{p'}\, (\varepsilon^{(\lambda)}\gamma)\, u_p\right) \cdot e^{i(E+E'-\omega)t} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-i(p_y+p_y')y - i(p_z+p_z'-q_z)z} \cdot e^{iq_x x - \xi^2/2 - \xi'^2/2}$$

интегрир. $\int dt\, dy\, dx \to (2\pi)^3\, \delta(E+E'-\omega)\, \delta(p_y+p_y')\, \delta(p_z+p_z'-q_z)$

$$p_y' = -p_y \to \xi = \xi' = \sqrt{\beta}\,(x - p_y/\beta)$$

$$\int dx\, e^{iq_x x - \beta(x - p_y/\beta)^2} = \int dx\, e^{-\beta(x - p_y/\beta - iq_x/2\beta)^2 + ip_y q_x/\beta - \underbrace{\frac{q_x^2}{4\beta}}_{\ll 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta}}\, e^{ip_y q_x/\beta}$$

$$|M_\lambda|^2 \sim |\overline{u}_{p'}\, (\varepsilon^\lambda\gamma)\, u_{-p}|^2 = \mathrm{Tr}\left[\rho(p')\, \varepsilon^{(\lambda)}\gamma\, \rho(-p)\, \gamma\varepsilon^{(\lambda)}\right]$$

$$\rho(p') = ((p'\gamma)_\parallel + m)\,\Pi_- \qquad \Pi_- = \frac{1}{2}(1 - i\gamma_1\gamma_2)$$

$$\rho(-p) = ((p\gamma)_\parallel - m)\,\Pi_-$$

$$p_\parallel = (E, 0, 0, p_z)$$

$$\mathrm{Tr}\left[\rho(p')\,\varepsilon^{(0)}\gamma\,\rho(-p)\,\varepsilon^{(0)}\gamma\right]=0$$

$\varepsilon^{(0)}_\mu \perp \vec{q}$, $\perp \vec{B}$ $\quad \varepsilon^{(0)}_\mu = (0,0,1,0)$

0-поляризация не распадается

$$\mathrm{Tr}\left[\rho(p')\,\varepsilon^{(e)}\gamma\,\rho(-p)\,\varepsilon^{(e)}\gamma\right]=4m_e^2$$

$\varepsilon^{(e)}_\mu \parallel \vec{B}$ $\quad \varepsilon^{(e)}_\mu = (0,0,0,1)$

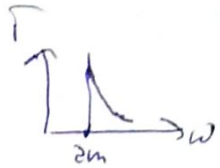
e-поляризация распадается.

интегрирование по фаз. объёму $\int dp_y\,dp_z\,dp'_y\,dp'_z$

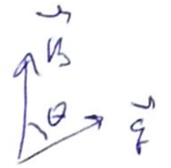
$$\Gamma^{(e\text{-mode})} = \frac{4\alpha eBm^2}{\omega^2\sqrt{\omega^2-4m^2}}$$

если $\vec{q}\perp\vec{B}$, $q_z=0$.

резонанс у порога рождения.

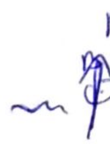


$$= \frac{4\alpha eBm^2}{\omega^2\sin\theta\sqrt{\omega^2\sin^2\theta-4m^2}}$$



резонанс при определенном угле.

На древесном уровне нет взаимодействия фотонов в магн. полем, однако →
(обычные дисперсионные соотн. как для фотона в вакууме)



$e^\pm$ вдоль B поперечн.

→ через фермионы ЭМ поле взаимодействует на фотоны.
(распад на e^+e^-).

Вот может быть, есть петлевые поправки к дисп. соотношению.

$$G^{\gamma,(1\text{-loop})}_{\mu\nu} = G^{\gamma,0}_{\mu\nu} + (G\cdot\Pi\cdot G)_{\mu\nu} + \dots$$

$$\sim = \sim + \sim\!O\!\sim + \sim\!O\!\sim\!O\!\sim + \dots$$

полюс пропагатора → дисп. соотношение
В этом подходе вычисляем от-сложным.

рез-тат → поправки как к д.с. для 0, так и для e-моды.

2 поляризации остаются
в отличие от темп. случае нет продольн