Фермионы в поле кинка.

Фермионы в (1+1) измерениях: описываются двухкомпонентным столбцом $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$, удовлетворяющим уравнению Дирака с γ-матрицами размера (2×2),

$$\gamma^0 = \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Юкавское взаимодействие фермионов со скалярным полем: уравнение

$$\left(i\gamma_\mu\partial_\mu - h\phi(x)\right)\psi(x) = 0.$$

Здесь h – константа юкавского взаимодействия, $\phi(x)$ – скалярное поле (в нашем случае – внешнее поле кинка $\phi(x) = \phi_k(x_1)$). Так как внешнее поле не зависит от времени, то переменные разделяются: подстановка

$$\psi(x_0, x_1) = \mathrm{e}^{-i\omega x_0}\psi_\omega(x_1)$$

приводит к задаче на собственные значения энергии ω. В поле кинка есть решение с $\omega = 0$ – нулевая мода, то есть состояние фермиона с нулевой энергией. Волновая функция этого состояния локализована в той же точке, что и кинк, и экспоненциально быстро спадает вдали от кинка. Подобная нулевая мода есть и в поле антикинка.

Дробление заряда. Будем рассматривать состояния с наименьшей (нулевой) энергией, когда все уровни с отрицательной энергией заполнены, а все уровни с положительной энергией свободны. Таких состояний два – с заполненным (f) и свободным (e) нулевым уровнем; они имеют одинаковую энергию $E = 0$, но разные фермионные числа, N_f и N_e, причем $N_f = N_e + 1$ – в состоянии (f) на один фермион больше или на одну "дырку" меньше. Из-за симметрии относительно пространственных отражений N_f и N_e одинаковы в поле кинка и антикинка.

Чтобы найти N_f и N_e, поставим мысленный эксперимент: будем адиабатически, медленно изменять внешнее скалярное поле ϕ так, что в начальный момент $\phi = v$ всюду в пространстве, а в конечный момент имеем кинк и антикинк, разнесенные на очень большое расстояние. Тогда фермионные уровни энергии – собственные значения ω – меняются со временем, в начальный момент ($\phi = v$) они соответствовали свободным фермионам с массой hv, в каждый момент времени из-за C-инвариантности наряду с с.з. ω имеется и с.з. $(-\omega)$. В конечном состоянии, в частности, имеются два уровня с нулевой энергией – один соответствует кинку, другой – антикинку. При медленном изменении поля не происходят переходы фермионов с одного уровня на другой, поэтому полное фермионное число — разность чисел фермионов и "дырок" — не изменяется. Если в начальный момент система находилась в минимуме энергии — все уровни с отрицательной энергией заполнены, все уровни с положительной энергией свободны, фермионное число равно нулю, — то в конце будет заполнен один из двух уровней с нулевой энергией, фермионное число не изменится: $N_f + N_e = 0$. В результате имеем $N_f = \frac{1}{2}$, $N_e = -\frac{1}{2}$, то есть в присутствии кинка море Дирака получает наведенное дробное фермионное число. Если фермионы заряжены, каждый несет заряд e, то в результате система приобретает дробный заряд $e/2$.

Литература:

Рубаков, ч.3, §14.1, 15.1. Раджараман, §9.4.

Пересечение уровней в двумерной модели.

Рассмотрим безмассовые фермионы в (1+1)-мерии. Уравнение Дирака расщепляется на два, решением являются независимые левые и правые фермионы: если $\psi = \binom{\chi}{\eta}$, то

$$i\gamma_\mu \partial_\mu \psi = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} (\partial_0 + \partial_1)\chi = 0 & \Rightarrow \quad \chi = \chi(x_0 - x_1) \;\text{ — правые,} \\ (\partial_0 - \partial_1)\eta = 0 & \Rightarrow \quad \eta = \eta(x_0 + x_1) \;\text{ — левые.} \end{cases}$$

Решения с фиксированной энергией ищутся в виде $\exp(-i\omega x_0 + ikx_1)$, получаем для правых фермионов $\omega = +k$, для левых $\omega = -k$. Для фермионов на отрезке длины L периодические граничные условия приводят к $k = 2\pi n/L$, n –целое.

Фермионные числа: число левых фермионов (аналогично для правых):

$$N_L = \begin{bmatrix}\text{число фермионов,} \\ \text{движущихся налево}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{число антифермионов,} \\ \text{движущихся налево}\end{bmatrix},$$

полное фермионное число $N_F = N_L + N_R$, киральность $Q_5 = N_L - N_R$. В отсутствие внешних полей N_L и N_R сохраняются.

Введем внешнее поле A_μ – электрическое поле вдоль оси x_1 направо. Правые фермионы будт приобретать энергию, а левые – терять (соответственно, ускоряться и замедляться внешним полем). Значит, часть правых фермионов переместится на более высокие уровни, а часть левых – на более низкие. Если в начале процесса море Дирака было заполнено, а уровни с положительной энергией были свободны, то в результате действия внешнего поля появятся фермионы на положительных уровнях правых фермионов и дырки на отрицательных уровнях левых фермионов, то есть N_L и N_R изменятся.

Количественно – пусть внешнее поле в калибровке $A_0 = 0$ адиабатически изменяется, причем $E = -\partial_0 A_1(x_0, x_1) \to 0$ при $x \to \pm\infty$, т.е., например, $A_1 = 0$ при $x_0 = -\infty$ и $A_1 \to \mathrm{const}$ при $x_0 \to +\infty$. При медленном изменении поля уровни энергии медленно движутся, $\omega = \omega(x_0)$, то есть решения можно искать в виде

$$\psi(x_0, x_1) = \mathrm{e}^{-i\int_{-\infty}^{x_0} \omega(t)\,dt} \psi_{\omega(x_0)}(x_1).$$

Изменение числа правых фермионов

$$\Delta N_R = \begin{bmatrix}\text{количество правых} \\ \text{уровней, пересек-} \\ \text{ших нуль снизу}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{количество правых} \\ \text{уровней, пересек-} \\ \text{ших нуль сверху}\end{bmatrix},$$

аналогично для левых. В начальный и конечный моменты спектры (но не числа заполнения уровней!) совпадают, если $q = n(x_0 = +\infty) - n(x_0 = -\infty) = n(x_0 = +\infty)$ – целое (см. задачу). Решение уравнения Дирака во внешнем поле,

$$i\gamma_0 \partial_0 \psi = i\gamma_1 (\partial_1 - ieA_1)\psi,$$

в пренебрежении производной $\partial_0 \omega$ (адиабатическое приближение) имеет вид:

$$\chi_{\omega(x_0)}(x_1) = \exp\left[-i\omega(x_0)x_1 + ie\int_0^{x_1} A_1(x_0, x_1)\,dx_1\right],$$

$$\eta_{\omega(x_0)}(x_1) = \exp\left[+i\omega(x_0)x_1 + ie\int_0^{x_1} A_1(x_0, x_1)\,dx_1\right].$$

Граничные условия – периодичность в пространстве – приводят к следующему результату: если энергия фермиона на некотором уровне была $\omega_l(x_0 = -\infty) = 2\pi l/L$, то она стала $\omega_l(x_0 = +\infty) = 2\pi(l \pm q)/L$ (знак "+" для правых, "−" для левых фермионов). Так как расстояния между уровнями $2\pi/L$, то $\Delta N_R = -\Delta N_L = q$.

Литература:

Рубаков, ч.3, §15.2.

Сверхпроводящие струны.

Рассмотрим абелеву модель Хиггса в (3+1) измерениях:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}^2 + |D_\mu\phi|^2 - \frac{\lambda}{2}\left(|\phi|^2 - v^2\right)^2,$$

$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$, B_μ – калибровочное поле (не электромагнитное), заряд обозначим буквой g.

Модель допускает статическое классическое решения в виде струны – вихрь Абрикосова-Нильсена-Олесена в плоскости (x_1, x_2), однородное вдоль x_3:

$$\phi(r,\theta) = v\mathrm{e}^{i\theta}F(r),$$

$$B_\alpha(r,\theta) = -\frac{1}{gr}\epsilon_{\alpha\beta}n_\beta B(r),$$

$$B_0 = B_3 = 0,$$

где $\alpha, \beta = 1, 2$; $\mu, \nu = 0, \ldots, 3$; r, θ – полярные координаты в плоскости (x_1, x_2); $n_\alpha = x_\alpha/r$. Граничные условия:

$$F(0) = B(0) = 0, \;\; F(\infty) = B(\infty) = 1.$$

Введем безмассовые фермионы $\psi = \binom{\chi}{\eta}$, где ψ и η – двухкомпонентные столбцы, соответствующие левым и правым фермионам. В нашем выборе γ-матриц кинетический член для фермионов имеет вид

$$i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi = i\eta^\dagger\sigma_\mu\partial_\mu\eta + i\chi^\dagger\bar{\sigma}_\mu\partial_\mu\chi,$$

левые и правые компоненты входят отдельно, поэтому могут быть заряжены по-разному относительно калибровочных преобразований. Пусть χ имеет заряд $+\frac{1}{2}$, η – заряд $-\frac{1}{2}$. Введем взаимодействие и со скалярным полем, так что вся фермионная часть лагранжиана будет иметь вид:

$$\mathcal{L}_F = i\eta^\dagger\sigma_\mu D_\mu^{(+)}\eta + i\chi^\dagger\bar{\sigma}_\mu D_\mu^{(-)}\chi - h\left(\phi^*\chi^\dagger\eta + \phi\eta^\dagger\chi\right),$$

где

$$D_\mu^{(\pm)} = \partial_\mu \mp i\frac{g}{2}B_\mu,$$

h – действительная постоянная. Уравнения движения для фермионов:

$$i\bar{\sigma}_\mu D_\mu^{(-)}\chi - h\phi^*\eta = 0,$$

$$i\sigma_\mu D_\mu^{(+)}\eta - h\phi\chi = 0.$$

В вакуумном внешнем поле ($\phi = v$, $B_\mu = 0$) уравнения описывают свободные фермионы с массой $m_F = hv$. Во внешнем поле струны, которое не зависит от x_0 и x_3, решения имеют вид

$$\psi(x_0, x_\alpha, x_3) = \mathrm{e}^{-i\omega x_0 + ik_3x_3}\psi_T(x_\alpha). \quad (21)$$

Вдали от струны внешние поля стремятся к вакуумным, поэтому и волновые функции фермионов стремятся к решениям во внешнем вакуумном поле – свободным фермионам с массой m_F, то есть $\omega^2 = m_F^2 + k^2$, и энергиями $|\omega| > m_F$. Кроме того, могут быть решения, быстро стремящиеся к нулю – тривиальному решению – вдали от струны. Соответствующие волновые функции локализованы вблизи струны и могут иметь энергию меньше m_F.

Уравнения движения в подстановке (21) имеют вид

$$(-k_3 C_T + D_T)\,\psi_T = \omega\psi_T,$$

где (4×4) матричные операторы

$$C_T = \begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \qquad D_T = \begin{pmatrix} i\bar{\sigma}_\alpha D_\alpha^{(-)} & h\phi^* \\ h\phi & i\sigma_\alpha D_\alpha^{(+)} \end{pmatrix}.$$

Заметим (см. задачу), что $C_T D_T + D_T C_T = 0$ и что сохраняется величина $J_3 = L_3 + s_3 - R$, где L_3 – 3-я компонента углового момента $L_i = -i\epsilon_{ijk}x_j\partial_k$, $s_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ – 3-я компонента спина, а $R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – оператор заряда.

Пусть $\psi_{T,\lambda}(x_\alpha)$ – собственная функция оператора D_T с с.з. $\lambda > 0$. Тогда спектр будет иметь вид $\omega^2 = \lambda^2 + k_3^2$. Могут быть нелокализованные состояния, для которых $\lambda^2 = m_F^2 + k_\alpha^2$ – непрерывный спектр, и локализованные на струне состояния с дискретным спектром $|\lambda| < m_F$, расстоянием между разными значениями λ порядка m_F. В частности, есть состояния с $\lambda = 0$.

Если $\lambda = 0$, то с.ф. $\psi_{T,0}(x_\alpha)$ является и с.ф. оператора C_T. Ищем нулевую моду с $J_3 = L_3 = 0$, тогда $C_T\psi_{T,0} = \psi_{T,0}$ и $\psi_{T,0}$ не зависит от θ, т.е.

$$\chi_{T,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(r) \end{pmatrix}, \qquad \eta_{T,0} = \begin{pmatrix} f_2(r) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где функции $f_{1,2}(r)$ удовлетворяют уравнениям

$$f_1' - \frac{B}{2r}f_1 + ihvFf_2 = 0,$$

$$f_2' - \frac{B}{2r}f_2 - ihvFf_1 = 0.$$

Убывающее при $r \to \infty$ решение имеет вид

$$f_1(r) = -if_2(r) = C\exp\left[-\int_0^r \left(-\frac{B(r)}{2r} + hvF(r)\right)\,dr\right],$$

асимптотики: при $r \to 0$ $f_1 \sim$, при $r \to \infty$

$$f_1 \sim \frac{\mathrm{e}^{-m_F r}}{\sqrt{r}}.$$

Этим решениям соответствует $\omega = -k_3$, то есть все локализованные на струне фермионы движутся в одну сторону и могут иметь энергии сколь угодно близкие к нулю. Эти фермионы, т.о., ведут себя как безмассовые частицы определенной киральности в (1+1)-мерии – на струне.

Если ввести взаимодействие с электромагнитным полем A_μ, например, зарядив χ и η одинаково - зарядом e, а ϕ оставив нейтральным, то уравнения не изменят вида, только ковариантная производная станет

$$D_\mu^{(\pm)} = \partial_\mu \mp i\frac{g}{2}B_\mu - ieA_\mu.$$

Спектр останется таким же, движению фермионов теперь будет соответствовать электрический ток.

Пусть состояние системы отличается от вакуумного (с заполненным морем Дирака и свободными уровнями с положительной энергией) на некоторое количество фермионов, занимающих уровни с $\lambda = 0$, $\omega \leq \mu > 0$. Эти фермионы движутся в одну сторону, так что по струне течет электрический ток. Этот ток не уменьшается, ибо фермионы не могут потерять энергию – если μ меньше наименьшего ненулевого с.з. $\lambda_{\min} \sim m_F$, то все уровни с низшей энергией заполнены. Линейная плотность фермионов $N/L = \mu/(2\pi)$, ток $j_3 = e\mu/(2\pi)$. Критический ток, при котором пропадает сверхпроводимость, соответствует $\mu \sim m_F$ – тогда фермионы начинают перескакивать на уровни с $\lambda \neq 0$. Если приложить внешнее электрическое поле вдоль струны, фермионы начнут рождаться, ток будет расти со временем линейно, пока не достигнет критического. Чтобы сохранялся электрический заряд, надо добавить фермионы с противоположным зарядом, тогда они будут рождаться парами, сверхпроводимость сохранится.

Литература:

Рубаков, ч.3, §16.3.

Задачи

43. Показать, что в топологически тривиальных статических внешних скалярных полях отсутствуют нулевые моды (1+1)-мерных фермионов.

44. Показать, что в задаче о пересечении уровней в (1+1)-мерной модели спектры в начальный и конечный моменты совпадают, если $q = n(x_0 = +\infty) - n(x_0 = -\infty) = n(x_0 = +\infty)$ – целое

45. Проверить явным вычислением соотношения $[J_3, -k_3 C_T + D_T] = 0$ и $\{C_T, D_T\} = 0$.

46. Рассмотреть уравнение $D_T \psi_T = 0$ в секторе с $J_3 = 0$, $C_T = -1$. Показать, что соответствующие радиальные уравнения не имеют нормируемых решений.

47. Оценить величину критического тока в сверхпроводящей струне (в амперах и в единицах $\hbar = c = 1$), считая e и m_e зарядом и массой электрона.