Условия сдачи зачета по курсу "Классические калибровочные поля" (осень 2013)

1. Зачет выставляется по результатам устной сдачи решенных дома задач из приведенного ниже списка. Сдавать задачи можно до дня официального окончания зачетной сессии (декабрь) включительно.

2. Для получения зачета необходимо сдать хотя бы 2 задачи – одну из части III и одну из части IV. Эти задачи должны быть разными у всех сдающих.

3. Для желающих поступать в аспирантуру в теоротдел ИЯИ или на кафедру за сданную задачу засчитывается балл, указанный после названия задачи. Для получения оценки "отлично" надо набрать в сумме не менее 18 баллов, для оценки "хорошо" – не менее 10 баллов. Баллы за задачу не делятся, то есть засчитываются только при сданном решении всех пунктов задачи.

Задачи к зачету по курсу "Классические калибровочные поля" (осень 2013)

(в скобках после названия задачи указано количество баллов)

Часть III. Задачи по теме "Теории с фермионами"

1. Правила отбора в $(1+1)$-мерной модели (4).
Рассмотрим абелеву модель Хиггса в (1+1)-мерном пространстве–времени. Пусть имеется N сортов безмассовых фермионов ψ_i с зарядами — целыми числами q_i, то есть преобразующихся при калибровочном преобразовании $A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$ по закону $\psi_i \to \psi_i' = \mathrm{e}^{iq_i\alpha(x)}\psi_i$. Наивно в этой модели сохраняются числа правых и левых фермионов каждого типа, $N_L^{(i)}$ и $N_R^{(i)}$. Найти все сохраняющиеся комбинации фермионных чисел с учетом инстантонов.

2. Нетопологический солитон в теории с фермионами (5).
Рассмотрим четырехмерную теорию одного действительного скалярного поля φ, взаимодействующего с N типами фермионов юкавским образом. Действие скалярного поля выберем в виде

$$S_\varphi = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\right)^2 - \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - v^2)^2\right] .$$

Предположим для простоты, что юкавские константы связи всех фермионов одинаковы, т.е. фермионное действие имеет вид

$$S_\psi = \int d^4x \sum_{i=1}^{N} \left(i\bar{\psi}_i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_i - f\varphi\bar{\psi}_i\psi_i\right) .$$

Константы λ и f считаем малыми, но $\lambda \gg f^4$. Используя соображения, аналогичные приведенным на лекциях, показать, что при достаточно больших N в теории имеются нетопологические солитоны (например, такие, в которых число фермионов каждого типа равно 1). Оценить соответствующее минимальное значение N. Поляризацией вакуума (в том числе вкладом дираковского моря в полную энергию) пренебречь.

3. Распады Q-шаров на бозоны и фермионы (5).

Рассмотрим модель комплексного скалярного поля ϕ в $(3+1)$ измерениях,

$$\mathcal{L}_\phi = |\partial_\mu \phi|^2 - V(|\phi|),$$

где $V(\phi) \approx m^2|\phi|^2$ при $\phi \to 0$, $V(\phi) \to M^4$ при $|\phi| \to \infty$. Из-за сохранения заряда Q, связанного с группой $U(1)_Q$ глобальной симметрии ($\phi \to \mathrm{e}^{i\alpha}\phi$), эта теория допускает существование устойчивых Q-шаров. Включение других полей, заряженных по $U(1)_Q$, может повлиять на устойчивость этих решений.

1. Введем в модель дополнительное скалярное поле χ, заряженное по $U(1)_Q$ и взаимодействующее с ϕ:
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi - m_\chi^2 \chi^2 - g|\phi\chi|^2,$$
где g – константа. Как изменится условие устойчивости Q-шара в зависимости от массы m_χ? Изучить, в частности, случай $m_\chi \to 0$.

2. Рассмотрим теперь взаимодействие поля ϕ с безмассовыми фермионами ψ (заряд которого по $U(1)_Q$ равен $+1$) и η (не заряженным по $U(1)_Q$):
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi - h\phi\bar{\psi}\eta,$$
где h – константа. Что можно сказать об устойчивочти Q-шара в этом случае? Оценить максимальную скорость распада Q-шара в зависимости от его заряда. Если $M \approx 1$ ТэВ, то какой заряд должен иметь Q-шар, чтобы его время жизни было гарантированно дольше времени жизни Вселенной (15 миллиардов лет)?

4. Локализация фермионов на вихре (6).

1. Рассмотрим абелеву модель Хиггса в $(5+1)$-мерном пространстве Минковского. Теория допускает статические решения в виде вихрей в плоскости (x_4, x_5), не зависящие от (x_1, x_2, x_3). Введя взаимодействие с фермионами, аналогичное случаю сверхпроводящей струны в $(3+1)$, показать, что существуют нулевые фермионные моды, локализованные в пространстве (x_1, x_2, x_3). Являются ли они правыми (левыми) с точки зрения четырехмерной теории в пространстве (x_0, x_1, x_2, x_3)?

2. Рассмотрим теперь абелеву модель Хиггса в пространстве $M_4 \times S_2$, где M_4 – это $(3+1)$-мерное пространство Минковского, а S_2 – двумерная сфера радиуса R. Обобщить конструкцию пункта 1 на случай вихря на сфере, изученного в экзаменационной задаче 14 за первый семестр.

5. Пересечение уровней в $(3+1)$-мерной модели (5).

Рассмотрим заряженные безмассовые фермионы в кубическом ящике большого размера L в (3+1)-мерном пространстве во внешнем постоянном магнитном поле $\mathbf{H}$, направленном вдоль оси z. Пусть на некоторое время τ на систему накладывается однородное электрическое поле $\mathbf{E}$, направленное вдоль оси z. Найти изменение чисел правых и левых фермионов. Связать это изменение с

$$\int F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\, d^4x \propto \int \mathbf{E}\cdot\mathbf{H}\, d^4x,$$

где $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}$. Считать, что включение и выключение поля производится адиабатически, но время переключений много меньше τ.

6. Куда пропал заряд? (6)

Рассмотрим (1+1)-мерные безмассовые фермионы с электрическим зарядом $e = +1$ в ящике с периодическими граничными условиями. Фермионы взаимодействуют с потенциалом

$$A_0 = -Zf(x)\ , \qquad\qquad A_1 = 0\ ,$$

где $f(x) \geq 0$ — узкая функция, интеграл от которой равен 1 (гладкий аналог δ–функции).

1. Найти собственные значения и собственные функции гамильтониана Дирака. Можно ли отличить модели с $Z = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, проводя эксперименты по рассеянию фермионов?

2. Предположим, что в некотором эксперименте значение Z увеличивается адиабатически от $Z = 0$ до $Z = 2\pi$. Сохраняется ли при этом электрический заряд?

3. Вакуумом модели с $Z = 2\pi n$ будем называть состояние, в котором заполнены все фермионные уровни с отрицательной энергией. Вычислить плотность заряда вакуума:
$$\rho(x) = \langle\hat{\psi}^{+}(x)\,\hat{\psi}(x)\rangle\ , \qquad (1)$$
где $\hat{\psi}(x)$ — вторичноквантованный фермионный оператор. Чему равен полный заряд вакуума?
Указание. Вообще говоря, величина (1) равна бесконечности из-за присутствия бесконечного числа уровней в море Дирака. В качестве регуляризации можно использовать раздвижку точек операторов $\hat{\psi}^{+}$ и $\hat{\psi}$:
$$\rho(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\langle\hat{\psi}^{+}(x-\epsilon)\,\hat{\psi}(x+\epsilon)\rangle_{Z=2\pi m} - \langle\hat{\psi}^{+}(x-\epsilon)\,\hat{\psi}(x+\epsilon)\rangle_{Z=0}\right]\ ,$$
где мы учли, что при $Z = 0$ вакуум обладает нулевой плотностью заряда.

7. Критический заряд в модели с короткодействием (7).

Вообразим атом, связанный короткодействующим центрально-симметричным векторным полем

$$A_0 = -Z\delta(r-R)\ , \qquad\qquad A_i(r) = 0\ ,$$

где R - радиус, а Z – заряд ядра. Заряд электрона по отношению к полю A_μ положен равным $e = +1$.

1. При каких значениях Z, R существуют связанные состояния электронов в поле ядра? Изобразить соответствующую область на плоскости $Z-R$. Найти энергию и волновую функцию основного состояния. Рассмотреть случаи $mR \gg 1$, $mR \ll 1$, где m - масса электрона.

2. Найти критическое значение заряда $Z_c(R)$, при котором основной электронный уровень растворяется в дираковском море.

3. Представим эксперимент, в котором заряд ядра изменяется от $Z = 0$ до $Z > Z_c$ за характерное время $\tau \gg m^{-1}$. Сколько частиц(античастиц) рождается в таком эксперименте? Рассмотреть случаи $\tau \gg R$, $\tau \ll R$.

8. Рассеяние фермионов на космической струне (8).

Рассмотрим $(2+1)$– мерные массивные фермионы с дробным электрическим зарядом $q > 0$. Фермионы помещены в потенциал Ааронова-Бома

$$A_0 = 0 \ , \qquad\qquad A_i = -\theta(r-R)\,\epsilon_{ij}\frac{n_j}{r} \ , \tag{2}$$

где R — размер центральной части потенциала. Можно грубо полагать, что поле (2) создано вихрем Абрикосова размера R. Ниже будем рассматривать два представления матриц Дирака

$$\alpha^1 = \sigma^1 \ , \qquad \alpha^2 = s\sigma^2 \ , \qquad \beta = \sigma^3 \ , \tag{3}$$

отличающиеся значением параметра $s = \pm 1$.

- Показать, что представления (3) не эквивалентны, т.е. не могут быть переведены друг в друга преобразованием

  $$\alpha^i \to U\alpha^i U^+ \ , \qquad\qquad \beta \to U\beta U^+ \ ,$$

  где U– унитарная матрица. Параметр s будем отождествлять с удвоенным спином фермиона.

- Рассмотрим фермионы в поле вихря нулевого размера, $R = 0$. Наложив условие регулярности волновой функции при $r = 0$, найти точные решения уравнения Дирака. Вычислить амплитуду рассеяния на вихре фермиона, который изначально двигался вдоль координаты x^1. Зависит ли амплитуда от параметра s?

- Рассмотрим теперь вихрь конечного, но малого размера. Используя условие сшивки при $r = R$, найти собственноэнергетические волновые функции фермионов, “выживающие” в пределе $R \to 0$. Совпадают ли они с волновыми функциями, полученными в предыдущем пункте? Найти амплитуду рассеяния на вихре конечного, но малого размера.

Теперь рассмотрим $(3+1)$– мерное пространство-время. Потенциалу (2) в этом случае соответствует космическая струна — одномерный объект, электрическое поле которого обладает свойством трансляционной инвариантности вдоль координаты x^3 ($A_3 = 0$, а остальные компоненты A_μ даются выражением (2)).

1. Показать, что волновые функции фермионов, обладающих нулевым импульсом вдоль координаты x^3, описываются $(2+1)$– мерным уравнением Дирака, причем два уравнения с $s = \pm 1$ описывают две независимые поляризации $\psi_\pm$ четырехмерного фермиона. Показать, что проекция спина на координату x^3 представима в виде $\hat{s}^3 = s\sigma^3/2$. Ниже будем использовать линейно поляризованные фермионы

   $$\psi_\gamma = \cos\gamma\psi_+ + \sin\gamma\psi_- \ .$$

2. Найти дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma(\psi_\gamma \to \psi_{\gamma'})$ поляризованных фермионов на космической струне.

9. Аксиальная симметрия и доменные стенки (8).
Рассмотрим в (3+1) измерениях теорию с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1,$$

где

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{e^2}{32\pi^2} \theta F_{\mu\nu} \tilde{F_{\mu\nu}} + \bar{\psi} i \gamma_\mu D_\mu \psi - M \bar{\psi} \mathrm{e}^{i\gamma_5 \theta} \psi + \frac{v^2}{2} \left(\partial_\mu \theta\right)^2,$$
$$\mathcal{L}_1 = -v^2 m^2 (1 - \cos\theta),$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_n u A_\mu$, $\tilde{F_{\mu\nu}} = \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda}$, A_μ – электромагнитное поле, ψ – фермионное поле, θ – скалярное поле.

1. Найти глобальные симметрии теории, а также глобальные симметрии теории с лагранжианом $\mathcal{L}_0$.

2. Выписать уравнения движения.

3. Найти множество вакуумов и провести их топологическую классификацию. Показать, что в теории имеются классические решения в виде доменных стенок. Найти доменную стенку в явном виде.

4. Изучить моды фермионного поля ψ во внешнем поле доменной стенки. Исследовать вопрос о локализации фермионных состояний на стенке. В тонкостенном пределе найти локализованные моды и написать для них эффективный (2+1)-мерный лагранжиан.

10. Холодная фермионная материя в $(1+1)$ измерениях (5). Рассмотрим абелеву модель Хиггса в двумерном пространстве-времени Минковского. Включим в нее безмассовые фермионы с действием

$$S_\psi = \int d^2x \, i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ie\gamma^5 A_\mu)\psi.$$

1. Какие фермионные числа сохраняются, а какие нарушаются (и насколько) в инстантонных процессах в данной модели?

2. Рассмотрим вначале состояние системы, в котором поля A_μ и φ принимают вакуумные значения $A_\mu = 0$, $\varphi = v$, и имеется конечная плотность фермионов n_F (при этом плотности числа левых и правых фермионов равны, так что полный заряд системы равен нулю). Будем теперь адиабатически изменять векторное поле $A_1(x^1)$ (используем калибровку $A_0 = 0$). Пренебрегая поляризацией дираковского вакуума (не зависящей от n_F), найти изменение энергии фермионной среды, т. е. вклад фермионов в статическую энергию как функционал от $A_1(x^1)$. Показать, что имеется критическое значение n_F, при котором несохранение фермионного числа происходит без туннелирования (без экспоненциального подавления). Оценить это критическое значение.

Часть IV. Задачи по теме "Неабелевы теории"

11. Плоские направления (4).
Рассмотрим модель двух комплексных скалярных полей φ_1 и φ_2 с лагранжианом

$$L = \partial_\mu \varphi_1^* \partial_\mu \varphi_1 + \partial_\mu \varphi_2^* \partial_\mu \varphi_2 - \lambda(\varphi_1^* \varphi_1 - \varphi_2^* \varphi_2 - v^2)^2$$

1. Найти группу глобальной симметрии этого лагранжиана (указание: ограничиться компактными группами).

2. Найти множество классических вакуумов в модели. Найти ненарушенную подгруппу для каждого вакуума.

3. Найти спектр малых возбуждений относительно каждого из вакуумов. Какие вакуумы являются физически эквивалентными, а какие — нет? Выполняется ли теорема Голдстоуна? Совпадает ли количество безмассовых возбуждений с количеством ненарушенных генераторов? Почему?

12. Калибровочная теория $SU(4)$ (4).
Выписать наиболее общий калибровочно инвариантный лагранжиан, содержащий взаимодействия полей не выше четвертой степени, для модели с калибровочной группой $SU(4)$ и одним поколением скалярной материи, содержащим одно поле в антисимметричном тензорном и одно поле в сопряженном фундаментальному представлении. Описать возможные варианты хиггсовского нарушения симметрии. То же для двух поколений.

13. Модель $SU(5)$ (3).
Рассмотрим теорию с калибровочной группой $SU(5)$.

1. Подобрать представление скалярных полей и скалярный потенциал так, чтобы $SU(5)$ нарушилась до $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, где $SU(3)$ и $SU(2)$ вложены в $SU(5)$ следующим образом:
$$\left(\begin{array}{c|c} SU(3) & 0 \\ \hline 0 & SU(2) \end{array}\right),$$
а группа $U(1)$ диагональна в $SU(5)$.

2. Найти массы векторных бозонов и их представления относительно ненарушенной калибровочной группы.

3. Скалярное поле в каком представлении $SU(5)$ нужно добавить, чтобы обеспечить дальнейшее нарушение до $SU(3) \times U(1)$, причем так, что $SU(2) \times U(1)$ нарушается до $U(1)$ аналогично стандартной модели? Подобрать полный скалярный потенциал для нарушения $SU(5) \to SU(3) \times U(1)$.

4. Отождествить поля материи Стандартной модели с мультиплетами группы $SU(5)$. Выписать лагранжиан взаимодействия в явно $SU(5)$–инвариантной форме. Является ли он наиболее общим калибровочно–инвариантным лагранжианом данной модели, не содержащим члены размерности выше m^4? Если нет, то найти наиболее общий. Определить глобальные симметрии наиболее общего лагранжиана.

14. Модель с полностью нарушенной калибровочной $SU(2)$ симметрией и тремя различными массами калибровочных бозонов (4).
Построить модель с полностью нарушенной калибровочной $SU(2)$-симметрией, в которой массы всех трех векторных бозонов различны.

15. Уравнение Клейна-Гордона в поле монополя (3).
Пусть $A_i^a(\mathbf{x})$, $\phi^a(\mathbf{x})$ — классическое поле монополя в $SU(2)$–модели, рассмотренное на лекции. Введем в теорию еще одно скалярное поле $\xi(x)$ — дублет относительно калибровочной группы $SU(2)$ — с лагранжианом

$$\mathcal{L}_\xi = (D_\mu \xi)^\dagger (D_\mu \xi) - m^2 \xi^\dagger \xi \ ,$$

где $D_\mu \xi = (\partial_\mu - ig\frac{\tau^a}{2} A_\mu^a)\xi$, g — калибровочная константа связи.

1. Считая поле монополя внешним, записать уравнение для поля ξ (схематически это уравнение можно записать в виде $K\xi = 0$; требуется найти оператор K). Используя тот факт, что поле монополя инвариантно относительно пространственных вращений, дополненных калибровочными преобразованиями, найти аналог оператора углового момента (обычно $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$, $\mathbf{p} = -i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$), который коммутирует с оператором K. Найти явный вид низших “монопольных гармоник”, т.е. собственных функций аналога углового момента с наименьшим собственным значением.

2. Рассматривая решения для поля ξ с фиксировнной энергией, $\xi = \mathrm{e}^{-iEx^0}\xi_E(\mathbf{x})$, записать систему радиальных уравнений для низших монопольных гармоник. Найти решение этой системы при $E \ll m_V, m_H$ (m_V и m_H — массы векторного и хиггсовского полей) вдали от ядра монополя, $r \gg m_V^{-1}, m_H^{-1}$.

16. Вихри в неабелевой теории (6).
Рассмотрим в (2+1)–мерном пространстве–времени теорию с калибровочной группой $SU(2)$ и двумя полями материи $\phi_{1,2}$ в присоединенном представлении с потенциалом

$$V(\phi_1, \phi_2) = \lambda \left((\phi_1^a \phi_1^a - v^2)^2 + (\phi_2^a \phi_2^a - v^2)^2 + (\phi_1^a \phi_2^a)^2 \right) ,$$

где $\phi_{1,2}^a$, $a = 1,\ 2,\ 3,$ – действительные компоненты.

1. Описать множество вакуумов, найти ненарушенную подгруппу.

2. Провести топологическую классификацию решений с конечной энергией.

3. Показать, что в модели имеются топологические солитоны. Подобрать подстановку для векторных и скалярных полей, приводящую уравнения движения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решением которой является солитон. Оценить энергию и размер солитона.

17. Солитоны в теории $SU(2)$-поля (5).
Пусть $\phi(x) \in SU(2)$ – матрица 2×2 из группы. Рассмотрим теорию с лагранжианом

$$L = \frac{F^2}{2} \mathrm{Tr} \left(\partial_\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi \right) + \frac{g^2}{16} \mathrm{Tr} \left(\left[\phi^\dagger \partial_\mu \phi, \phi^\dagger \partial_\nu \phi \right]^2 \right) .$$

1. Найти уравнения движения.

2. Показать, что L содержит не более чем две производные поля ϕ по времени. Найти функционал энергии и показать, что энергия неотрицательна.

3. Найти множество вакуумов. Выбрать один и найти спектр масс.

4. Найти полный лагранжиан взаимодействия в терминах полей π^a, где $\phi(x) = \exp(\tau_a \pi^a(x))$ (исключить τ-матрицы).

5. Рассмотреть статические конфигурации $\phi(\mathbf{x})$ с конечной энергией. Показать, что они разбиваются на топологические сектора, характеризуемые целым топологическим числом n. Таким образом, в модели имеется возможность существования топологических солитонов.

6. Показать, что при $g^2 = 0$ статические солитоны отсутствуют.

7. Рассмотрим конфигурации вида

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \mathrm{e}^{i\tau^a n^a f(r)} , \\ n^a &= x^a/r . \end{aligned}$$

   В каком смысле они сферически-симметричны? Найти значения $f(0)$ и $f(\infty)$, при которых $\phi(\mathbf{x})$ несингулярны, а статическая энергия конечна. Найти связь между $f(0)$, $f(\infty)$ и топологическим числом n.

8. Оценить массу и размер солитона при $g^2 > 0$.

18. Уравнение Дирака в поле монополя (8).
Рассмотрим $SU(2)$–модель, в которой имеется монопольное решение $A_i^a(\mathbf{x})$, $\phi^a(\mathbf{x})$. Добавим в нее триплет фермионов ψ^a, $a = 1, 2, 3$, с действием

$$S_\psi = \int d^4x \left(i\bar{\psi}^a \gamma^\mu (D_\mu \psi)^a - f\varepsilon^{abc} \bar{\psi}^a \psi^b \varphi^c \right) ,$$

где, как обычно, $(D_\mu \psi)^a = \partial_\mu \psi^a + g\varepsilon^{abc} A_\mu^b \psi^c$.

1. Записать уравнение Дирака во внешнем поле монополя (схематически $K\psi = 0$).

2. Используя инвариантность поля монополя относительно пространственных вращений, дополненных калибровочными преобразованиями, найти аналог углового момента, коммутирующий (или антикоммутирующий) с оператором K. Найти низшие “монопольные гармоники”, т. е. угловые функции с минимальным собственным значением аналога углового момента.

3. Ограничиваясь фермионами с минимальным угловым моментом, показать, что в поле монополя имеются нулевые фермионные моды (собственные состояния дираковского гамильтониана с нулевой энергией). Найти их количество.