Московский государственный университет
Имени М.В.Ломоносова
Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

# Гамильтонианы со связями второго рода

Презентация к курсовой работа
студента 2 курса, 216 группы
Корочкина Александра
Научный руководитель
Академик РАН, доктор физ.-мат.наук
В.А.Рубаков

# Постановка задачи

- Найти гамильтониан и выписать гамильтоновы уравнения движения для системы с двумя обобщёнными координатами $q_i, i=1,2$ и лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,2} M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1,2} N_i\dot{q}_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,2} V_{ij}q_iq_j$$

где $M_{ij}, N_i$ и $V_{ij}$ – числа (зависят от $q_i$ и от времени). Матрица $V$ не вырождена, про $M$ и $N$ ничего не известно.

# Случай невырожденной матрицы

- Запишем выражения для импульсов и разрешим получившуюся систему уравнений относительно скоростей

$$\begin{cases} p_1 = M_1\dot{q}_1 + M_0\dot{q}_2 + N_1 \\ p_2 = M_0\dot{q}_1 + M_2\dot{q}_2 + N_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{M_0(p_2 - N_2) - M_2(p_1 - N_1)}{M_0^2 - M_1 M_2} \\ \dot{q}_2 = \dfrac{M_0(p_1 - N_1) - M_1(p_2 - N_2)}{M_0^2 - M_1 M_2} \end{cases}$$

- Подставим скорости в выражение для гамильтониана

$$H = p_n\dot{q}_n - L = -\frac{M_2(p_1 - N_1)^2 - 2M_0(p_1 - N_1)(p_2 - N_2) + M_1(p_2 - N_2)^2}{2(M_0^2 - M_1 M_2)} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,2} V_{ij} q_i q_j$$

- Взяв необходимые производные, легко получить гамильтоновы уравнения движения

# Случай вырожденной матрицы

- Если матрица *M* вырождена, то система уравнений, определяющая импульсы разрешима относительно скоростей только в случае выполнения соотношения

$$\varphi(p,q) = p_1 - kp_2 - N_1 + kN_2 = 0 \text{ где } k = \frac{M_1}{M_0} = \frac{M_0}{M_2}$$

- Легко показать, что если выполняется первичная связь $\varphi(p,q) = 0$, то величин $H = p_n\dot{q}_n - L$ не зависит от $\dot{q}$. Выраженная через $p$ и $q$ она называется гамильтонианом.
- В нашей задаче получим следующий гамильтониан

$$H = \frac{(p_1 - N_1)(p_2 - N_2)}{2M_0} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,2} V_{ij} q_i q_j$$

- На данном этапе мы получили выражение для гамильтониана, верное при выполнении первичных связей. Следующим шагом является получение и исследование гамильтоновых уравнений движения. Для этого используем принцип наименьшего действия для величины $L = p_n\dot{q}_n - H$ с уравнением связи $\varphi(p,q) = 0$.
- Уравнения движения:

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial q_n}$$

где $\lambda -$ некоторая функция $p$ и $q$.

- Для упрощения дальнейших выкладок используем скобки Пуассона двух величин $f$ и $g$:

$$[f,g] = \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial g}{\partial q_n}$$

- Если *g* – произвольная функция переменных *p* и *q,* а *p* и *q* удовлетворяют уравнениям движения, то

$$\dot{g} = [g, H] + \lambda [g, \varphi]$$

- Выясним условия, при которых уравнения движения сохраняют связь $\varphi = 0$ неизменной

$$\dot{\varphi}(p,q) = [\varphi, H] + \lambda[\varphi,\varphi] = 0 \quad \Rightarrow \quad -(V_1 q_1 + V_0 q_2) + k(V_0 q_1 + V_2 q_2) = 0$$

- Условие сохранения вторичной связи $\chi(p,q) = 0$

$$\dot{\chi}(p,q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{(p_2 - N_2)(kV_0 - V_1) + (p_1 - N_1)(kV_2 - V_0)}{2M_0(k^2 V_2 - 2kV_0 + V_1)}$$

- Уравнения движения, удовлетворяющие всем условиям непротиворечивости

$$\dot{q}_1 = \frac{p_2 - N_2}{2M_0} + \frac{(p_2 - N_2)(kV_0 - V_1) + (p_1 - N_1)(kV_2 - V_0)}{2M_0(k^2V_2 - 2kV_0 + V_1)}$$

$$\dot{q}_2 = \frac{p_1 - N_1}{2M_0} - k\frac{(p_2 - N_2)(kV_0 - V_1) + (p_1 - N_1)(kV_2 - V_0)}{2M_0(k^2V_2 - 2kV_0 + V_1)}$$

$$\dot{p}_1 = -V_1 q_1 - V_0 q_2$$

$$\dot{p}_2 = -V_0 q_1 - V_2 q_2$$

- Уравнения следует решать при учете связи $\varphi(p,q) = 0$

# Проверка уравнений Гамильтона

- Получим уравнения Лагранжа из уравнений Гамильтона
- Уравнения Лагранжа: $\begin{cases} M_1\ddot{q}_1 + M_0\ddot{q}_2 = -V_1 q_1 - V_0 q_2 \\ M_0\ddot{q}_1 + M_2\ddot{q}_2 = -V_0 q_1 - V_2 q_2 \end{cases}$
- Следствия уравнений Гамильтона: $\begin{cases} \ddot{q}_1 = \dfrac{\dot{p}_2}{2M_0} + \dfrac{\dot{p}_2(kV_0 - V_1) + \dot{p}_1(kV_2 - V_0)}{2M_0(k^2V_2 - 2kV_0 + V_1)} \\ \ddot{q}_2 = \dfrac{\dot{p}_1}{2M_0} - k\,\dfrac{\dot{p}_2(kV_0 - V_1) + \dot{p}_1(kV_2 - V_0)}{2M_0(k^2V_2 - 2kV_0 + V_1)} \end{cases}$
- После алгебраических преобразований с учетом связи $\dot{\varphi} = \dot{p}_1 + k\dot{p}_2 = 0$, получим:

$$\begin{cases} M_1\ddot{q}_1 + M_0\ddot{q}_2 = M_0\left(k\dfrac{\dot{p}_2}{2M_0} + \dfrac{\dot{p}_1}{2M_0}\right) = \dfrac{1}{2}(k\dot{p}_2 + \dot{p}_1) = \dot{p}_1 = -V_1 q_1 - V_0 q_2 \\ M_0\ddot{q}_1 + M_2\ddot{q}_2 = \dfrac{M_0}{k}\left(k\dfrac{\dot{p}_2}{2M_0} + \dfrac{\dot{p}_1}{2M_0}\right) = \dfrac{1}{2k}(k\dot{p}_2 + \dot{p}_1) = \dot{p}_2 = -V_0 q_1 - V_2 q_2 \end{cases}$$

# Нахождение неизвестных коэффициентов $\lambda_k(p,q)$ в произвольном случае

- Пусть индекс *k* принимает значения от 1 до *N*, где *N* – число первичных связей
- Индекс *j* принимает значение от 1 до *M*, где *M* – полное число связей
- Коэффициенты находятся из системы

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = [\varphi_1, H] + \lambda_k [\varphi_1, \varphi_k] = 0 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_M = [\varphi_M, H] + \lambda_k [\varphi_M, \varphi_k] = 0 \end{cases}$$

- Общее решение представимо в виде суммы частного решения неоднородной системы и общего решения однородной системы уравнений
- Коэффициенты $\lambda_k(p,q)$ определятся однозначно, если однородная система уравнений имеет только тривиальное решение

- Будем говорить что функция от $q$ и $p$ является переменной первого рода, если ее скобки Пуассона со всеми $\varphi_j$ равны нулю
- В противном случае будем говорить, что функция является переменной второго рода
- Можно показать, что размерность пространства решений однородной системы уравнений равна числу линейно независимых первичных связей первого рода
- Таким образом, коэффициенты $\lambda_k(p,q)$ определятся единственным образом только если все первичные связи будут величинами второго рода

# Заключение

- В результате работы была решена задача о переходе к гамильтониану от лагранжиана с вырожденной матрицей скоростей
- Были получены гамильтоновы уравнения движения и показана их эквивалентность лагранжевым уравнениям движения
- Получены условия, при которых гамильтоновы уравнения движения определяются однозначно

# Спасибо за внимание!