Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

Гамильтонианы со связями второго рода

Курсовая работа
студента 2 курса
Корочкина Александра Алексеевича

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, академик.
Валерий Анатольевич Рубаков

Москва, 2014

1 Постановка задачи

Найти гамильтониан и выписать гамильтоновы уравнения движения для системы с двумя обобщёнными координатами q_i, $i = 1, 2$ и лагранжианом

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,2} M_{ij}\,\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1,2} N_i\dot{q}_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,2} V_{ij}\,q_iq_j$$

где M_{ij}, N_i и V_{ij} — числа (не зависят от q_i и от времени). Матрица V не вырождена, про M и N ничего не известно.

2 Решение

По условию про матрицу M ничего не известно, поэтому в задаче существует два случая: когда M вырождена и когда не вырождена.

2.1 Случай невырожденной матрицы

Рассмотрим стандартный случай, когда M не вырождена. Используем такие обозначения:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_0 \\ M_0 & M_2 \end{pmatrix} \qquad\qquad V = \begin{pmatrix} V_1 & V_0 \\ V_0 & V_2 \end{pmatrix} \quad .$$

Далее, согласно определению, введём импульсы:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_1} = M_1\dot{q}_1 + M_0\dot{q}_2 + N_1; \\ p_2 = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_2} = M_0\dot{q}_1 + M_2\dot{q}_2 + N_2. \end{cases}$$

Мы получили систему линейных уравнений относительно переменных $\dot{q}_1$и $\dot{q}_2$ определитель которой совпадает с матрицей M и поэтому отличен от нуля. Следовательно система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{M_0(p_2-N_2)-M_2(p_1-N_1)}{M_0^2-M_1M_2}; \\ \dot{q}_2 = \frac{M_0(p_1-N_1)-M_1(p_2-N_2)}{M_0^2-M_1M_2}. \end{cases}$$

Гамильтонианом называется величина

$$\mathscr{H} = p_n\dot{q}_n - \mathscr{L} \tag{1}$$

выраженная через p и q. Если подставить найденные значения $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$ вместе с лагранжианом из условия задачи, то получим:

$$\mathscr{H} = -\frac{\frac{M_2}{2}(p_1-N_1)^2 - M_0(p_1-N_1)(p_2-N_2) + \frac{M_1}{2}(p_2-N_2)^2}{M_0^2 - M_1M_2} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,2} V_{ij}\,q_iq_j. \tag{2}$$

Далее легко написать гамильтоновы уравнения движения.

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_1} = \frac{M_0(p_2-N_2)-M_2(p_1-N_1)}{M_0^2-M_1M_2}; \\ \dot{q}_2 = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_2} = \frac{M_0(p_1-N_1)-M_1(p_2-N_2)}{M_0^2-M_1M_2}; \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_1} = -V_1q_1 - V_0q_2; \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_2} = -V_0q_1 - V_2q_2. \end{cases}$$

2.2 Случай вырожденной матрицы

Пусть теперь матрица M вырождена. Рассмотрим систему уравнений

$$p_n = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q_n}}. \tag{3}$$

Предположим, что матрица является линейной относительно $\dot{q_n}$. Без дополнительных условий неоднородная линейная система с определителем, равным нулю, может не иметь решений. Так как мы хотим, чтобы решения были, придется ввести некоторые ограничения на p_n и q_n. Используем тот факт, что необходимым и достаточным условием совместости линейной системы уравнений является ортогональность неоднородности всем решениям однородной системы с транспонированной матрицей. В нашем случае однородная система с транспонированной матрицей выглядит так:

$$\begin{cases} M_1\dot{q}_1 + M_0\dot{q}_2 = 0; \\ M_0\dot{q}_1 + M_2\dot{q}_2 = 0. \end{cases}$$

Выберем за независимую переменную $\dot{q_1}$. Тогда решение таково:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{M_1}{M_0} \end{pmatrix} \dot{q_1}. \tag{4}$$

Неоднородность начальной системы:

$$r = \begin{pmatrix} p_1 - N_1 \\ p_2 - N_2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Поэтому необходимым и достаточным условием совместности нашей системы уравнений будет выполнение связи:

$$\varphi = (p_1 - N_1) - \frac{M_1}{M_0}(p_2 - N_2) = p_1 - kp_2 - N_1 + kN_2 = 0. \tag{6}$$

Где $k = \frac{M_1}{M_0}$. В общем случае из уравнений (3) может получится несколько соотношений типа $\varphi_k(p, q) = 0$, $k = 1..N$, которые обычно называют первичными связями. Таким образом в данной задаче мы получили одну первичную связь.

Теперь рассмотрим величину, определяемую выражением:

$$H = p_n\dot{q_n} - \mathscr{L}. \tag{7}$$

Вычислим полный дифференциал H.

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_n}dq_n + \frac{\partial H}{\partial \dot{q_n}}d\dot{q_n} + \frac{\partial H}{\partial p_n}dp_n = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_n}dq_n + (p_n - \frac{\partial L}{\partial \dot{q_n}})d\dot{q_n} + \dot{q_n}dp_n. \tag{8}$$

Если q_n, $\dot{q_n}$ и p_n удовлетворяют уравнениям (3), то

$$p_n - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q_n}} = 0, \tag{9}$$

откуда получаем, что $\frac{\partial H}{\partial \dot{q_n}} = 0$ и H не зависит от $\dot{q_n}$. Таким образом величина H не зависит от $\dot{q_n}$ только при выполнении связи (6), так как это условие необходимо и достаточно для существования решения системы(3). Выраженная через p и q она называется гамильтонианом и обозначается $\mathscr{H}$.

Проведем вычисления для лагранжиана, данного в задаче. Выразим $\dot{q}_2$ из первого уравнения системы:

$$\dot{q}_2 = \frac{p_1 - N_1}{M_0} - k\dot{q}_1 \quad . \tag{10}$$

Подставим это выражение в (7) условии выполнения связи (6):

$$\begin{aligned} \mathscr{H} &= p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - \mathscr{L} = \\ &= p_1\dot{q}_1 + p_2\left(\frac{p_1 - N_1}{M_0} - k\dot{q}_1\right) - \frac{1}{2}M_1\dot{q}_1{}^2 - M_0\dot{q}_1\left(\frac{p_1 - N_1}{M_0} - k\dot{q}_1\right) - \frac{1}{2}M_2\left(\frac{p_1 - N_1}{M_0} - k\dot{q}_1\right)^2 - \\ &\qquad - N_1\dot{q}_1 - N_2\left(\frac{p_1 - N_1}{M_0} - k\dot{q}_1\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,2} V_{ij}\, q_i q_j. \end{aligned} \tag{11}$$

Проводя алгебраические преобразования с испольованием первичной связи и соотношения $k = \frac{M_1}{M_0} = \frac{M_0}{M_2}$, получим гамильтониан:

$$\mathscr{H} = \frac{(p_1 - N_1)(p_2 - N_2)}{2M_0} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,2} V_{ij}\, q_i q_j. \tag{12}$$

Следующим шагом будет получение и исследование гамильтоновых уравнений движения. В общем случае для этого следует использовать принцип наименьшего действия для величины $\mathscr{L} = p_n\dot{q}_n - \mathscr{H}$ с уравнениями связи $\varphi_k(p, q) = 0$:

$$\delta \int (p_n\dot{q}_n - \mathscr{H})dt = 0. \tag{13}$$

Такая задача является стандартной для вариационного исчисления, поэтому можно сразу записать решение:

$$\dot{q}_n = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_n} + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_n}; \tag{14}$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_n} - \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_n}. \tag{15}$$

Где λ_k - некоторые функция p и q.

В случае одной связи, как в данной задаче, уравнения упрощаются:

$$\dot{q}_n = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_n} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}; \tag{16}$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_n} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial q_n}. \tag{17}$$

Для упрощения дальнейших выкладок удобно использовать скобоки Пуассона. Если f и g две функции переменных p и q, то скобка Пуассона $[f, g]$ определяется как

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial g}{\partial q_n}. \tag{18}$$

Для произвольной функции g переменных p и q имеем:

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q_n}\dot{q_n} + \frac{\partial g}{\partial p_n}\dot{p_n}. \tag{19}$$

Если вместо $\dot{q_n}$ и $\dot{p_n}$ подставить их значения, заданные уравнениями (14) и (15) то получим:

$$\dot{g} = [g, \mathscr{H}] + \lambda_k[g, \varphi_k]. \tag{20}$$

Выполнение уравнений (14) и (15) является только необходимым условием для достижения экстремума функционала, поэтому следует проверить, что они сохраняют связь $\varphi(p, q) = 0$ неизменной. Для этого вычислим производную от φ по времени и приравняем ее к нулю.

$$\dot{\varphi} = [\varphi, \mathscr{H}] + \lambda[\varphi, \varphi] = -(V_1q_1 + V_0q_2) + k(V_0q_1 + V_2q_2) = 0. \tag{21}$$

Мы получаем, что связь φ сохраняется только при определенных q_n, то есть мы нашли еще одну связь

$$\chi_1(p, q) = q_1(kV_0 - V_1) + q_2(kV_2 - V_0) = 0. \tag{22}$$

Связи такого рода будем называть вторичными, так как для их получения нужно использовать не только сисетму уравнений (3), но и уравнения движения.

Связь $\chi_1 = 0$ необходима для выполнения $\varphi = 0$, поэтому проверим ее сохранение при данных уравнениях движения.

$$\begin{aligned}\dot{\chi_1} &= [\chi_1, \mathscr{H}] + \lambda[\chi_1, \varphi] = \\ &= (kV_0 - V_1)\frac{(p_2 - N_2)}{2M_0} + (kV_2 - V_0)\frac{(p_1 - N_1)}{2M_0} + \lambda\Big[(kV_0 - V_1) - k(kV_2 - V_0)\Big] = 0.\end{aligned} \tag{23}$$

Из этого соотношения можно выразить λ:

$$\lambda = \frac{(p_2 - N_2)(kV_0 - V_1) + (p_1 - N_1)(kV_2 - V_0)}{2M_0\big[k^2V_2 - 2kV_0 + V_1\big]}. \tag{24}$$

При полученном λ выполняются все связи и уравнения движения непротиворечивы.

Таким образом из набора возможных уравнений движения мы выделили те, которые в любой момент времени сохраняют как первичные, так и вторичные связи.

$$\dot{q_1} = \frac{p_2 - N_2}{2M_0} + \frac{(p_2 - N_2)(kV_0 - V_1) + (p_1 - N_1)(kV_2 - V_0)}{2M_0\big[k^2V_2 - 2kV_0 + V_1\big]}; \tag{25}$$

$$\dot{q_2} = \frac{p_1 - N_1}{2M_0} - k\frac{(p_2 - N_2)(kV_0 - V_1) + (p_1 - N_1)(kV_2 - V_0)}{2M_0\big[k^2V_2 - 2kV_0 + V_1\big]}; \tag{26}$$

$$\dot{p_1} = -V_1q_1 - V_0q_2; \tag{27}$$

$$\dot{p_2} = -V_0q_1 - V_2q_2. \tag{28}$$

2.3 Нахождение неизвестных коэффициентов λ_k в произвольном случае

В данном пункте исследуем процесс нахождения неизвестных коэффициентов λ_k, $k = 1..N$, N - число первичных связей. Пусть φ_j, $j = 1..M$ - полный набор связей, первичных и вторичных ($M \geq N$), которые могли быть найдены с помощью алгорита, описанного в предыдущем параграфе. Эти связи в любой момент времени должны выполнятся, поэтому их производная по времени равна нулю. Отсюда получаем линейную систему уравнений, для определения λ_k:

$$\dot{\varphi}_j = [\varphi_j, \mathscr{H}] + \lambda_k[\varphi_j, \varphi_k] = 0. \tag{29}$$

Общее решение системы представимо в виде суммы частного решения неоднородной системы и общего решения однродной. Частное решение должно существовать, иначе теория была бы противоречива. Если однородная система имеет нетривиальное решение, то общее решение не единственно. Выясним при каких условиях коэффициенты λ_k определяются однозначно.

Будем говорить, что функция от q и p является переменной первого рода, если ее скобки Пуассона со всеми φ_j равны нулю. В противном случае будем говорить, что функция является переменной второго рода.

Пусть размерность пространства решений однородной системы равна $P \leq N$. Тогда базис этого пространства можно записать в виде матрицы V_{ki}, $i = 1..P$, столбцами которой являются линейно независимые решения. Докажем, что $\chi_i = V_{ki}\varphi_k$ является переменной первого рода. Действительно:

$$[\chi_i, \varphi_j] = [V_{ik}\varphi_k, \varphi_j] = V_{ik}[\varphi_k, \varphi_j] = 0. \tag{30}$$

Далее докажем, что χ_i образуют полный набор линейно независимых функций первого рода, которые можно получить как линейные комбинации первичных связей. Предположим обратное. Пусть $a_k\varphi_k$ величина первого рода и при этом линейно независима с χ_i. Тогда

$$[a_k\varphi_k, \varphi_j] = a_k[\varphi_k, \varphi_j] = 0. \tag{31}$$

Следовательно коэффициенты a_k удовлетворяют однородной системе и поэтому могут быть представлены в виде линейной комбинации столбцов V_{ik}. Но тогда и $a_k\varphi_k$ линейно зависима с χ_i.Получаем противоречие.

Из двух последних утверждений следует, что размерность пространства решений равна числу линейно независимых первичных связей первого рода. Поэтому, для того, чтобы неизвестные λ_k определились однозначно, все первичные связи должны быть величинами второго рода. Заметим, что в нашей задаче разобран именно такой случай.

3 Проверка уравнений Гамильтона

Уравнения Лагранжа имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q}. \tag{32}$$

Для лагарнжиана, данного в условии задачи, получим:

$$\begin{cases} M_1\ddot{q}_1 + M_0\ddot{q}_2 = -V_1q_1 - V_0q_2; \\ M_0\ddot{q}_1 + M_2\ddot{q}_2 = -V_0q_1 - V_2q_2. \end{cases}$$

Получим эти уравнения из системы гамильтоновых уравнений движения (25)-(28). Для этого продифференцируем (25) и (26) по времени.

$$\ddot{q}_1 = \frac{\dot{p}_2}{2M_0} + \frac{\dot{p}_2(kV_0 - V_1) + \dot{p}_1(kV_2 - V_0)}{2M_0\big[k^2V_2 - 2kV_0 + V_1\big]}; \tag{33}$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{\dot{p}_1}{2M_0} - k\frac{\dot{p}_2(kV_0 - V_1) + \dot{p}_1(kV_2 - V_0)}{2M_0\big[k^2V_2 - 2kV_0 + V_1\big]}. \tag{34}$$

С учетом связи $\dot{\varphi} = \dot{p}_1 - k\dot{p}_2 = 0$ и соотношения $k = \frac{M_1}{M_0} = \frac{M_0}{M_2}$ имеем:

$$M_1\ddot{q}_1 + M_0\ddot{q}_2 = M_0\left(k\frac{\dot{p}_2}{2M_0} + \frac{\dot{p}_1}{2M_0}\right) = \frac{1}{2}(k\dot{p}_2 + \dot{p}_1) = \dot{p}_1 = -V_1q_1 - V_0q_2. \tag{35}$$

Аналогично получается второе уравнение Лагранжа:

$$M_0\ddot{q}_1 + M_2\ddot{q}_2 = \frac{M_0}{k}\left(k\frac{\dot{p}_2}{2M_0} + \frac{\dot{p}_1}{2M_0}\right) = \frac{1}{2k}(k\dot{p}_2 + \dot{p}_1) = \dot{p}_2 = -V_0q_1 - V_2q_2. \tag{36}$$

В результате этой проверки мы убедились в том, система гамильтоновых уравнений движения при учете первичной связи $\varphi(p, q) = 0$ эквивалентна системе лагранжевых уравнений движения.

Список литературы

[1] Дирак П.А.М, "Лекции по квантовой механике". — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1998. 146 с.