ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОИСХОЖДЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ДЕФЕКТА МАСС

Курсовую работу выполнил студент 216 группы: Попеску А.Д.

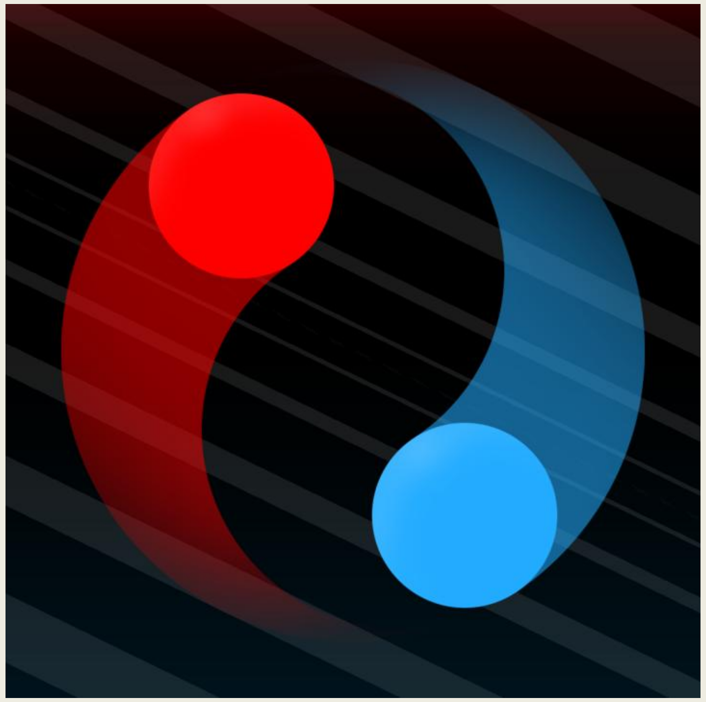
Научный руководитель:д. ф.-м. наук, академик. Рубаков В.А..

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра космологии и физики частиц
Москва, Россия

2014

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим связанную систему двух равных по массе частиц, вращающихся вокруг общего центра с нерелятивистскими скоростями и находящихся в однородном силовом поле.



Эта система как целое будет двигаться подобно частице с массой, меньшей суммы масс частиц.

Требуется объяснить дефект масс с позиций уравнений движений для каждой из частиц

§1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Поместим электрон и позитрон в однородное силовое поле.

- Частицы имеют равные массы ***m*** и заряды ***–e*** и ***e*** соответственно.
- Обозначим их скорости через $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$.
- Пусть электрон в точке нахождения позитрона создает потенциал φ.
- А позитрон создает в точке нахождения электрона потенциал ψ.

❖ Лагранжиан позитрона выглядит следующим образом:

$$\mathscr{L} = -mc^2\sqrt{1-\left(\frac{V_1}{c}\right)^2} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{V_1} - e\varphi + (\vec{F},\vec{r_1}).$$

❖ Откуда уравнение движения позитрона имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left[\gamma_1 m\vec{V_1} + \frac{e\vec{V_2}}{c^2}\varphi\right] = -e\cdot\nabla_{r_1}\varphi\left(1-\frac{\vec{V_1}\vec{V_2}}{c^2}\right) + \vec{F}.$$

❖ Аналогично получается уравнение движения электрона:

$$\frac{d}{dt}\left[\gamma_2 m\vec{V}_2 - \frac{e\vec{V}_1}{c^2}\psi\right] = +e\cdot\nabla_{r_2}\psi\left(1-\frac{\vec{V}_1\vec{V}_2}{c^2}\right)+\vec{F}.$$

При малых скоростях будем считать потенциал, создаваемый частицей, функцией лишь расстояния, так как поправка имеет порядок *v/c*, что в уравнении движения приводит к появлению члена порядка *(v/c)*^{3}.

Такими слагаемыми будем пренебрегать. Тогда *(φ= - ψ)* вследствие равенства зарядов по модулю.

❖ Суммируя уравнения движения, получим:

$$\frac{d}{dt}\left[\gamma_1 m\vec{V}_1 + \gamma_2 m\vec{V}_2 + \frac{e\varphi}{c^2}\left(\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)\right] = 2\vec{F}.$$

Пусть система частиц как целое движется со скоростью ***u***. Будем считать, что скорости частиц много больше ***u***. Перейдем в систему центра инерции. Скорости частиц в СО центра инерции обозначим через $\boldsymbol{w_i}$.

Применяя преобразование скоростей, получаем:

$$\boxed{\vec{V_1} = \frac{\vec{u} + \vec{w_1}}{1 + (\vec{w_1} \cdot \vec{u})/c^2} \approx \vec{u} + \vec{w_1} - \frac{(\vec{w_1} \cdot \vec{u})}{c^2}\vec{w_1}}$$

Рассмотрим γ_1. Здесь для компактности положим **c**=1.

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - V_1^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 - w_1^2}} \left(1 + \frac{(\vec{u} \cdot \vec{w_1})}{1 - w_1^2}\right)$$

Учитывая это равенство, выразим слагаемое из уравнения движения:

$$\boxed{\gamma_1 \vec{V_1} \approx \frac{1}{1 - w_1^2/c^2} (\vec{u} + \vec{w_1}) = \gamma_1'(\vec{u} + \vec{w_1}).}$$

Аналогично выглядят соотношения для $\boldsymbol{V_2}$ и $\gamma_{2.}$

❖ Учитывая полученные соотношения и пренебрегая членами малого порядка, получим уравнение движения в виде:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\gamma_1' m\vec{w}_1 + \gamma_2' m\vec{w}_2 + \frac{e\varphi}{c^2}\left(\vec{w}_1 + \vec{w}_2\right)\right] + \frac{d}{dt}\left[\gamma_1' m\vec{u} + \gamma_2' m\vec{u} + \frac{e\varphi}{c^2}\left(\vec{u} + \vec{u}\right)\right] = 2\vec{F}.}$$

Первое выражение в квадратных скобках представляет собой суммарный обобщенный импульс частиц в СО центра инерции, поэтому обращается в нуль.

❖ Таким образом, требуется усреднить по времени следующее уравнение:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\gamma_1' m\vec{u} + \gamma_2' m\vec{u} + \frac{e\varphi}{c^2}\left(\vec{u} + \vec{u}\right)\right] = 2\vec{F}.}$$

Релятивистская теорема вириала дает:

$$\left\langle \frac{mc^2}{\gamma_1'} + \frac{mc^2}{\gamma_2'} \right\rangle = \langle \gamma_1' mc^2 + \gamma_2' mc^2 + e\varphi \rangle$$

Учитывая малость скоростей, получаем:

$$\langle m w_1^2 + m w_2^2 \rangle = - \langle e\varphi \rangle \,.$$

❖ Подставим это соотношение в усредненное по времени уравнение движения:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\vec{u}}{c^2}\left\langle 2mc^2 + \frac{1}{2} m w_1^2 + \frac{1}{2} m w_2^2 + 2e\varphi \right\rangle\right] = 2\vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\left\langle 2m + \frac{e\varphi}{c^2} \right\rangle \vec{u}\right] = 2\vec{F}.$$

❖ Движение системы как целого описывается уравнением Ньютона:

$$\frac{d}{dt}\left[M\vec{u}\right] = 2\vec{F}$$

❖ Откуда масса системы имеет вид:

$$M = 2m + \left\langle \frac{e\varphi}{c^2} \right\rangle = 2m - \frac{W}{c^2} < 2m$$

Где ***W*** – усредненная по времени энергия связи.

§2. СКАЛЯРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Поместим две частицы, взаимодействующие скалярно с потенциалом взаимодействия ~(1/r) в однородное силовое поле.

- Частицы имеют массы m_1 и m_2 и заряды q_1 и q_2 соответственно.
- Обозначим их скорости через V_1 и V_2.
- Пусть частица №1 в точке нахождения частицы №2 создает потенциал ψ.
- А частица №2 создает в точке нахождения частицы №1 потенциал φ.

❖ Лагранжиан частицы имеет вид:

$$\mathscr{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\varphi\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + (\vec{F},\vec{r})$$

Запишем уравнения Эйлера для первой частицы:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{V_1}} = \gamma_1 \vec{V_1}\left(m + \frac{q_1\varphi}{c^2}\right);$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{r_1}} = -\nabla_{r_1}\varphi \cdot q_1\gamma_1^{-1} + \vec{F}.$$

❖ Составив уравнения движения для частиц и сложив их, получим:

$$\frac{d}{dt}\left[\gamma_1 m\vec{V}_1 + \gamma_2 m\vec{V}_2 + \frac{e\varphi}{c^2}\gamma_1\vec{V}_1 + \frac{e\psi}{c^2}\gamma_2\vec{V}_2\right] = -\nabla_{r_1}\varphi \cdot q_1\gamma_1^{-1} - \nabla_{r_2}\psi \cdot q_2\gamma_2^{-1} + 2\vec{F}.$$

- Мы рассматриваем члены, порядок малости которых не превышает $(v/c)^2$, поэтому $(\gamma\varphi \approx \varphi)$.

- При усреднении по времени правой части остается лишь постоянный член ***2F***.

- Классическая теорема вириала для потенциала ~(1/r) дает тот же результат, что и релятивистская для электромагнитного взаимодействия

Таким образом, далее вывод аналогичен §1 и дает результат:

$$M = 2m + \left\langle \frac{e\varphi}{c^2} \right\rangle = 2m - \frac{W}{c^2} < 2m$$

Где ***W*** – усредненная по времени энергия связи.

§3. СКАЛЯРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ **N** ЧАСТИЦ

*Поместим **N** частиц, взаимодействующих скалярно с потенциалом взаимодействия ~(1/r) в однородное силовое поле.*

- Будем приписывать величинам, относящимся к i-й частице индекс i.
- Потенциал, создаваемый j-й частицей в точке расположения i-частицы, будем обозначать через φ_{ji}.
- $\varphi_{ii}=0$ для удобства написания.

❖ Лагранжиан i-й частицы имеет вид:

$$\mathscr{L} = -m_i c^2 \sqrt{1-\frac{V_i^2}{c^2}} - q_i \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ji} \sqrt{1-\frac{V_i^2}{c^2}} + (\vec{F}, \vec{r_1}).$$

❖ Уравнение движения i-й частицы выглядит так:

$$\frac{d}{dt}\left[m_i \gamma_i \vec{V_i} + \gamma_i q_i \vec{V_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi_{ji}}{c^2} \right] = -q_i \gamma_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} \nabla_{r_i} \varphi_{ji} + \vec{F}.$$

❖ Просуммировав уравнения движения всех частиц и выразив скорости, получим:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i'\vec{w}_i + \sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i'\vec{u} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_i' q_i\vec{w}_i\frac{\varphi_{ji}}{c^2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_i' q_i\vec{u}\frac{\varphi_{ji}}{c^2}\right] = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i\gamma_i^{-1}\nabla_{r_i}\varphi_{ji} + n\vec{F}.$$

С учетом следующих равенств:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i'\vec{w}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_i' q_i\vec{w}_i\frac{\varphi_{ji}}{c^2}\right] \equiv 0.$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i\gamma_i^{-1}\nabla_{r_i}\varphi_{ji}\right\rangle = 0$$

А также теоремы вириала:

$$\sum_{i=1}^{n}\langle\gamma_i' m_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} m_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i\left\langle\frac{\varphi_{ji}}{c^2}\right\rangle$$

Уравнение движения упрощается:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{u} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i\vec{u}\frac{\varphi_{ji}}{c^2}\right\rangle = n\vec{F}$$

❖ Откуда масса системы имеет вид:

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{n} m_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i \frac{\varphi_{ji}}{c^2} = \sum_{i=1}^{n} m_i - W/c^2}$$

где $$\boxed{W = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i \frac{\varphi_{ji}}{c^2} > 0}$$

Выводы

В результате работы получено объяснение релятивистского дефекта масс для случая двух частиц, взаимодействующих электромагнитно и скалярно с потенциалом (1/r).

Также рассмотрен случай системы **N** частиц, взаимодействующих скалярно с тем же потенциалом. Возможно аналогичное рассмотрение для системы электромагнитно взаимодействующих частиц, однако, очевидно, имеет смысл только для электрически нейтральной системы.

Список литературы

- Ландау, Лифшиц, «Теоретическая физика, том 2. Теория поля»