Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

Динамическое происхождение релятивистского дефекта масс

Курсовая работа
студента 2 курса
Попеску Андрея Дориновича

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, академик.
Валерий Анатольевич Рубаков

Москва-2014

1 Постановка задачи

Рассмотрим связанную систему двух равных по массе частиц, вращающихся вокруг общего центра с нерелятивистскими скоростями и находящихся в однородном силовом поле. Эта система как целое будет двигаться подобно частице с массой, меньшей суммы масс данных частиц. Требуется объяснить дефект масс с позиций уравнений движения для каждой из частиц.

2 Решение

2.1 Электромагнитное взаимодействие

Обозначим силовое поле F, и пусть частицы взаимодействуют электромагнитно (будем считать их электроном и позитроном). Пусть они имеют заряды $+e$ и $-e$ и массу m. Обозначим скорости позитрона и электрона соответственно $\vec{V_1}$ и $\vec{V_2}$. Рассмотрим лабораторную СО. Потенциал, создаваемый электроном φ выражается формулой Лиенара-Вихерта, в которой величины справа вычисляются с учетом запаздывания:

$$\varphi = \frac{-e}{R_{21} - \left(\frac{\vec{V_2} \cdot \vec{R}_{21}}{c}\right)}. \tag{1}$$

Здесь $\overrightarrow{R_{21}}$ - радиус-вектор позитрона, отсчитываемый от электрона. В последующем рассмотрении мы будем считать, что скорости частиц много меньше скорости света, поэтому будем пренебрегать запаздыванием. Векторный потенциал $\vec{A}$, создаваемый электроном, выглядит следующим образом:

$$\vec{A} = \frac{\varphi \vec{V_2}}{c}.$$

Лагранжиан позитрона имеет вид:

$$\mathscr{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{V_1}{c}\right)^2} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{V_1} - e\varphi + (\vec{F}, \vec{r_1}).$$

Вычислим его частные производные:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{V_1}} = \gamma_1 m \vec{V_1} + \frac{e\vec{V_2}}{c^2}\varphi;$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{r_1}} = -e \cdot \nabla\varphi \left(1 - \frac{\vec{V_1}\vec{V_2}}{c^2}\right) + \vec{F}.$$

Приходим к уравнению движения для позитрона:

$$\frac{d}{dt}\left[\gamma_1 m \vec{V_1} + \frac{e\vec{V_2}}{c^2}\varphi\right] = -e \cdot \nabla_{r_1}\varphi \left(1 - \frac{\vec{V_1}\vec{V_2}}{c^2}\right) + \vec{F}. \tag{2}$$

Аналогично выглядит уравнение движения для электрона (ψ - потенциал, создаваемый позитрона):

$$\frac{d}{dt}\left[\gamma_2 m\vec{V_2} - \frac{e\vec{V_1}}{c^2}\psi\right] = +e\cdot\nabla_{r_2}\psi\left(1-\frac{\vec{V_1}\vec{V_2}}{c^2}\right)+\vec{F}. \tag{2*}$$

При малых скоростях будем считать потенциал, создаваемый одной частицей в точке расположения другой, функцией лишь расстояния между частицами, так как поправка имеет порядок v/c, что в уравнении движения приводит к появлению члена порядка $(v/c)^3$. Такими слагаемыми будем пренебрегать. Итак, ($\varphi = -\psi$) вследствие равенства зарядов, и ($\nabla_{r_1}\varphi = \nabla_{r_2}\psi$).

Суммируя (2) и (2*), получаем:

$$\frac{d}{dt}\left[\gamma_1 m\vec{V_1} + \gamma_2 m\vec{V_2} + \frac{e\varphi}{c^2}\left(\vec{V_1}+\vec{V_2}\right)\right] = 2\vec{F}. \tag{3}$$

Пусть система как целое движется со скоростью $\vec{u}$. Будем считать, что $u \ll V_1, V_2$. Пусть в системе отсчета центра инерции частицы имеют скорости $\vec{w_1}$ и $\vec{w_2}$. Тогда, применяя преобразование скоростей, получим:

$$\vec{V_1} = \frac{\vec{u}+\vec{w_1}}{1+(\vec{w_1}\cdot\vec{u})/c^2} \approx \vec{u}+\vec{w_1} - \frac{(\vec{w_1}\cdot\vec{u})}{c^2}\vec{w_1} \tag{4}$$

Рассмотрим γ_1. В расчетах для наглядности положим $c=1$.

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2+w_1^2+2(\vec{u}\cdot\vec{w_1})}{1+2(\vec{u}\cdot\vec{w_1})+(\vec{u}\cdot\vec{w_1})^2}}} \approx \frac{1}{\sqrt{1-\frac{w_1^2+2(\vec{u}\cdot\vec{w_1})}{1+2(\vec{u}\cdot\vec{w_1})}}} \approx \frac{1}{\sqrt{1-(w_1^2+2(\vec{u}\cdot\vec{w_1}))(1-2(\vec{u}\cdot\vec{w_1}))}}$$
$$\approx \frac{1}{\sqrt{1-(w_1^2+2(\vec{u}\cdot\vec{w_1}))}} \approx \frac{1}{\sqrt{1-w_1^2}}\left(1+\frac{(\vec{u}\cdot\vec{w_1})}{1-w_1^2}\right)$$

Выражение $\gamma_1\vec{V_1}$ приобретает следующий вид:

$$\gamma_1\vec{V_1} \approx \frac{1}{\sqrt{1-w_1^2}}\left(1+\frac{(\vec{u}\cdot\vec{w_1})}{1-w_1^2}\right)(\vec{u}+\vec{w_1}-(\vec{u}\cdot\vec{w_1})\vec{w_1}) \approx$$
$$\approx \frac{1}{\sqrt{1-w_1^2}}\left(\vec{u}+\vec{w_1}-\vec{w_1}(\vec{u}\cdot\vec{w_1})+\vec{w_1}\frac{(\vec{u}\cdot\vec{w_1})}{1-w_1^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-w_1^2}}\left(\vec{u}+\vec{w_1}+\vec{w_1}\frac{w_1^2(\vec{u}\cdot\vec{w_1})}{1-w_1^2}\right) \approx$$
$$\approx \frac{1}{1-w_1^2}\left(\vec{u}+\vec{w_1}\right).$$

Возвращаясь к прежнему значению скорости света, получаем:

$$\gamma_1\vec{V_1} \approx \frac{1}{1-w_1^2/c^2}\left(\vec{u}+\vec{w_1}\right) = \gamma_1'(\vec{u}+\vec{w_1}).$$

Преобразуем с помощью полученных выражений уравнение (3):

$$\frac{d}{dt}\left[\gamma_1' m\vec{w_1} + \gamma_2' m\vec{w_2} + \frac{e\varphi}{c^2}\left(\vec{w_1}+\vec{w_2}\right)\right] + \frac{d}{dt}\left[\gamma_1' m\vec{u} + \gamma_2' m\vec{u} + \frac{e\varphi}{c^2}\left(\vec{u}+\vec{u}\right)\right] = 2\vec{F}. \tag{5}$$

Первое выражение в квадратных скобках представляет собой суммарный обобщенный импульс частиц в системе центра инерции, поэтому обращается в нуль.

Релятивистская теорема вириала дает:

$$\left\langle \frac{mc^2}{\gamma_1'} + \frac{mc^2}{\gamma_2'} \right\rangle = \left\langle \gamma_1' mc^2 + \gamma_2' mc^2 + e\varphi \right\rangle$$

Учитывая, что $w_{1,2} \ll c$, получаем $\gamma_i' \approx 1 + \frac{1}{2} w_i^2/c^2$. Тогда выражение упрощается:

$$\left\langle mw_1^2 + mw_2^2 \right\rangle = -\left\langle e\varphi \right\rangle. \tag{6}$$

Усредняя по времени уравнение (5) и подставляя соотношение (6), получаем:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\vec{u}}{c^2}\left\langle 2mc^2 + \frac{1}{2}mw_1^2 + \frac{1}{2}mw_2^2 + 2e\varphi \right\rangle\right] = 2\vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\left\langle 2m + \frac{e\varphi}{c^2}\right\rangle \vec{u}\right] = 2\vec{F}.$$

Движение системы как целого описывается уравнением Ньютона:

$$\frac{d}{dt}\left[M\vec{u}\right] = 2\vec{F}$$

Откуда масса системы

$$M = 2m + \left\langle \frac{e\varphi}{c^2} \right\rangle = 2m - \frac{W}{c^2} < 2m,$$

где $W > 0$ – энергия связи.

2.2 Взаимодействие со скалярным потенциалом

Рассмотрим две частицы, потенциал взаимодействия которых оказывается скаляром. Ограничимся конкретным видом потенциала:

$$\varphi \sim \frac{1}{r}.$$

Лагранжиан частицы в скалярном поле записывается так (q - заряд, характеризующий взаимодействие между частицами):

$$\mathscr{L} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\varphi\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + (\vec{F}, \vec{r})$$

Вычислим производные лагранжиана первой частицы:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{V_1}} = \gamma_1 \vec{V_1}\left(m + \frac{q_1\varphi}{c^2}\right);$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{r_1}} = -\bigtriangledown_{r_1} \varphi \cdot q_1 \gamma_1^{-1} + \vec{F}.$$

Аналогично выглядят равенства для второй частицы (ψ – потенциал, создаваемый первой частицей):

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{V_2}} = \gamma_2 \vec{V_2}\left(m + \frac{q_2\psi}{c^2}\right);$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{r_2}} = -\nabla_{r_2} \psi \cdot q_2 \gamma_2^{-1} + \vec{F}.$$

Будем учитывать те же приближения, что и в §2.1. Тогда $q_1\varphi = q_2\psi$. Считаем, что потенциалы, создаваемые частицами являются функциями только координат.

Составляя уравнения движения и складывая их, получим:

$$\frac{d}{dt}\left[\gamma_1 m\vec{V_1} + \gamma_2 m\vec{V_2} + \frac{e\varphi}{c^2}\gamma_1\vec{V_1} + \frac{e\psi}{c^2}\gamma_2\vec{V_2}\right] = -\nabla_{r_1} \varphi \cdot q_1\gamma_1^{-1} - \nabla_{r_2}\psi \cdot q_2\gamma_2^{-1} + 2\vec{F}.$$

При усреднении по времени в правой части остается только $2\vec{F}$. Далее, применяя теорему вириала, через те же шаги, что и в §2.1, приходим к результату:

$$M = 2m - W/c^2,$$

где $W = -q\langle\varphi\rangle > 0-$ энергия связи.

3 Случай n частиц (скалярный потенциал).

Рассмотрим систему n скалярно взаимодействующих частиц, помещенную в однородное силовое поле. Пусть, как и в §2.2, потенциал взаимодействия частиц имеет вид $\varphi \sim \frac{1}{r}$. Вследствие малости скоростей будем считать потенциал функцией расстояния между частицами. Индексами i будем обозначать величины, относящиеся к i-й частице. Потенциал, создаваемый j-й частицей в точке расположения i-й частицы будем обозначать φ_{ji}. Лагранжиан i-й частицы имеет вид:

$$\mathscr{L} = -m_i c^2\sqrt{1-\frac{V_i^2}{c^2}} - q_i\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ji}\sqrt{1-\frac{V_i^2}{c^2}} + (\vec{F},\vec{r_1}).$$

Уравнение движения для i-й частицы имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left[m_i\gamma_i\vec{V_i} + \gamma_i q_i\vec{V_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi_{ji}}{c^2}\right] = -q_i\gamma_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}\nabla_{r_i}\varphi_{ji} + \vec{F}.$$

Суммируя n уравнений, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left[m_i\gamma_i\vec{V_i} + \gamma_i q_i\vec{V_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi_{ji}}{c^2}\right] = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i\gamma_i^{-1}\nabla_{r_i}\varphi_{ji} + n\vec{F}. \tag{7}$$

Обозначим скорость центра инерции через $\vec{u}$. Подобно §2.1, перейдем в систему центра инерции ($\vec{w}_i$ – скорость i-й частицы в СО центра инерции, $\gamma_i' = (1 - w_i^2/c^2)^{-1/2}$ – релятивистский фактор):

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i'\vec{w}_i + \sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i'\vec{u} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_i' q_i\vec{w}_i\frac{\varphi_{ji}}{c^2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_i' q_i\vec{u}\frac{\varphi_{ji}}{c^2}\right] = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i\gamma_i^{-1}\nabla_{r_i}\varphi_{ji} + n\vec{F}. \tag{8}$$

В системе центра инерции:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i'\vec{w}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_i' q_i \vec{w}_i \frac{\varphi_{ji}}{c^2}\right] \equiv 0.$$

При усреднении по времени правой части получаем:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i\gamma_i^{-1} \bigtriangledown_{r_i} \varphi_{ji} \right\rangle = 0$$

Пользуемся теоремой вириала:

$$\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\langle U\rangle$$

$$\frac{m_i w_i^2}{2} \approx \langle \gamma_i' - 1\rangle m_i c^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \gamma_i' m_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} m_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i \left\langle \frac{\varphi_{ji}}{c^2}\right\rangle$$

Таким образом, усредняя (8) по времени, получаем:

$$\left\langle \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i'\vec{u} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_i' q_i \vec{u}\frac{\varphi_{ji}}{c^2}\right]\right\rangle \approx \frac{d}{dt}\left\langle \sum_{i=1}^{n} m_i\gamma_i'\vec{u} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i\vec{u}\frac{\varphi_{ji}}{c^2}\right\rangle =$$
$$= \frac{d}{dt}\left\langle \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{u} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i\vec{u}\frac{\varphi_{ji}}{c^2}\right\rangle = n\vec{F}$$

Откуда получаем:

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i\frac{\varphi_{ji}}{c^2} = \sum_{i=1}^{n} m_i - W/c^2,$$

где

$$W = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i\frac{\varphi_{ji}}{c^2} > 0 \text{ -- энергия связи.}$$

Список литературы

[1] Ландау, Лившиц, "Теоретическая физика, том 2. Теория поля".