Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Физический Факультет
Кафедра физики частиц и космологии

Курсовая работа:

Светоподобные геодезические в поле чёрной дыры

студента 2 курса, 210 группы
Широкова Ильи Евгеньевича

Научный руководитель:
кандидат физ-мат наук,
Левков Дмитрий Геннадьевич

Москва, 2014

Оглавление

Введение

В последнее время существует много попыток получить "портрет"чёрной дыры, регистрируя электромагнитные волны, излучённые или проходящие в её окрестности. Одним из таких проектов является международный проект Радиоастрон [1] с ведущим российским участием. Этот радиотелескоп обладает разрешением 7-8 угловых микросекунд при длине волны 1.5 сантиметра. Такое разрешение даёт надежду разрешить радиусы чёрных дыр в центрах галактик. В данной работе изучено линзирование изображения удалённого точечного источника полем чёрной дыры. Вычисления отклонения электромагнитных волн и изменения их интенсивности проведены в эйкональном приближении, когда длина волны считается малой по сравнению с размером чёрной дыры. В работе показано, что изображение удалённого источника сопровождается изображениями меньшей интенсивности, находящимся вблизи нестабильной светоподобной орбиты чёрной дыры ($R = 1.5R_s$, где R_s — радиус Шварцшильда).

Глава 1

Геодезические в метрике Шварцшильда

1.1 Геодезические в произвольной метрике

Пусть точка x^μ движется вдоль некоторой траектории, $x^\mu = x^\mu(\tau)$, где τ — собственное время или афинный параметр в случаях времениподобной и светоподобной траектории, соответственно. Величина $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ называется скоростью движения вдоль траектории. Геодезической называется траектория построенная путём последовательных параллельных переносов векторов u^μ из точек x^μ в точки $x^\mu + u^\mu d\tau$. Уравнение геодезической:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} u^\sigma u^\nu = 0, \tag{1.1.1}$$

где $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$ — символ Кристоффеля. Согласно принципу эквивалентности все пробные точечные тела движутся по геодезическим. Перепишем уравнение геодезической в другой форме. Введём обозначение $\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\rho} = u^\mu_{,\rho}$, тогда $\frac{du^\mu}{d\tau} = u^\rho u^\mu_{,\rho}$. Уравнение (1.1.1) принимает вид:

$$u^\rho (u^\mu_{,\rho} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} u^\nu) = 0. \tag{1.1.2}$$

Выражение в скобках представляет собой ковариантную производную, обозначим её как: $u^\mu_{;\rho}$, поэтому уравнение геодезической можно записать как:

$$u^\rho u^\mu_{;\rho} = 0. \tag{1.1.3}$$

Проще всего интегрировать уравнения геодезических, используя поля Киллинга. Эти поля характеризуют симметрию при глобальных преобразованиях, таких, как вращения и сдвиги пространства-времени. Рассмотрим преобразование координат следующего вида: $x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu +$

$\xi^\mu d\tau$. В системе координат $\{x'\}$ метрика имеет вид:

$$g'_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} g_{\mu\nu}. \tag{1.1.4}$$

Согласно нашему преобразованию:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} = \delta^\mu_\rho - \xi^\mu_{,\rho} d\tau; \qquad \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = \delta^\nu_\sigma - \xi^\nu_{,\sigma} d\tau. \tag{1.1.5}$$

Теперь подставим (1.1.5) и (1.1.4), тогда получим с учётом пренебрежения величинами второго и третьего порядка малости:

$$g'_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} - (\xi^\mu g_{\rho\sigma,\mu} + g_{\mu\sigma}\xi^\mu_{,\rho} + g_{\rho\mu}\xi^\mu_{,\sigma}) d\tau, \tag{1.1.6}$$

где мы использовали тождество:

$$g'_{\mu\nu}(x^\mu) = g'_{\mu\nu}(x'^\mu) - \xi^\sigma \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} d\tau + O(\xi^2). \tag{1.1.7}$$

Производная Ли определяется следующим образом:

$$\mathfrak{L}_\xi g_{\rho\sigma} = \lim_{d\tau \to 0} \frac{g_{\rho\sigma} - g'_{\rho\sigma}}{d\tau}. \tag{1.1.8}$$

Из (1.1.6) следует, что:

$$\mathfrak{L}_\xi g_{\rho\sigma} = \xi^\mu g_{\rho\sigma,\mu} + g_{\mu\sigma}\xi^\mu_{,\rho} + g_{\rho\mu}\xi^\mu_{,\sigma}. \tag{1.1.9}$$

Это выражение можно переписать через ковариантные производные:

$$\mathfrak{L}_\xi g_{\rho\sigma} = \xi^\mu g_{\rho\sigma;\mu} + g_{\mu\sigma}\xi^\mu_{;\rho} + g_{\rho\mu}\xi^\mu_{;\sigma}. \tag{1.1.10}$$

Если метрика сохраняется при общековариантных преобразованиях, то производная Ли от неё равна нулю $\mathfrak{L}_\xi g_{\rho\sigma} = 0$. Это свойство характеризует вышеупомянутую симметрию относительно глобальных преобразований. Ковариантная производная от метрики естественно равна нулю. В этом случае уравнение (1.1.10) приобретает вид уравнения Киллинга:

$$\xi_{\sigma;\rho} + \xi_{\rho;\sigma} = 0. \tag{1.1.11}$$

Векторное поле, удовлетворяющее уравнению (1.1.11), называется полем Киллинга.Докажем полезное свойство полей Киллинга. Пусть $U^\mu(r)$ — геодезическая. Запишем:

$$u^\rho(\xi_\mu u^\mu)_{;\rho} = u^\rho u^\mu \xi_{\mu;\rho} + \xi_\mu u^\rho u^\mu_{;\rho}, \tag{1.1.12}$$

Второе слагаемое равно нулю согласно (1.1.3), а первое можно записать в виде:

$$u^\rho u^\mu \xi_{\mu;\rho} = \frac{1}{2} u^\rho u^\mu \xi_{\mu;\rho} + \frac{1}{2} u^\rho u^\mu \xi_{\mu;\rho}. \tag{1.1.13}$$

Заменим немые индексы ρ и μ второго слагаемого в (1.1.13) на μ и ρ соответственно. Получим:

$$u^\rho u^\mu \xi_{\mu;\rho} = \frac{1}{2} u^\rho u^\mu (\xi_{\mu;\rho} + \xi_{\rho;\mu}). \tag{1.1.14}$$

Выражение (1.1.14) равно нулю в соответствии с (1.1.11). Следовательно и выражение (1.1.12) также равно нулю и:

$$\xi_\mu u^\mu = const. \tag{1.1.15}$$

Закон сохранения позволяет легко интегрировать уравнения геодезических.

1.2 Метрика Шварцшильда.

Будем использовать систему единиц $G = c = 1$. Рассмотрим сферически симметричное решение уравнений Эйнштейна в пустоте — метрику Шварцшильда. Она имеет следующий вид:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{1.2.1}$$

При $r = 2M$ некоторые компоненты метрики сингулярны. Эта сингулярность — устранимая, существует система координат, в которой она отсутствует. Можно показать, что, тело никогда не сможет покинуть область $r \leq 2M$. Радиус $r = 2M$ называется радиусом Шварцшильда. Объект, в котором реализуется подобная ситуация, называется чёрной дырой.

В метрике Шварцшильда существует два вектора Киллинга, удовлетворяющие уравнению (1.1.11):

$$\xi^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \psi^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.2.2}$$

Эти вектора соответствуют симметрии метрики (1.2.1) относительно сдвигов во времени поворотов, соответственно. Они помогут нам проинтегрировать уравнения геодезических.

Рассмотрим случай светоподобных геодезических в пространстве Шварцшильда. Подставив вектора (1.2.2) в (1.1.15), получим первые интегралы движения:

$$E = -g_{\nu\mu}\xi^{\nu}u^{\mu} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}; \qquad L = g_{\nu\mu}\psi^{\nu}u^{\mu} = r^2\dot{\phi}. \tag{1.2.3}$$

Величины $\hbar E$ и $\hbar L$ представляют собой полную энергию и угловой момент соответственно.

Помимо первых интегралов (1.2.3) можно использовать условия равенства нулю квадрата четырёхскорости для света, рассматривая при этом случай $\theta = \pi/2$:

$$g_{\nu\mu}u^{\nu}u^{\mu} = \left(-1 + \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \dfrac{2M}{r}} + r^2\dot{\phi}^2 = 0. \tag{1.2.4}$$

Уравнений (1.2.3), (1.2.4) достаточно для нахождения светоподобной геодезической $x^{\mu}(\tau)$.

1.3 Общее выражение для зависимости угла отклонения от расстояния до центра Чёрной дыры

Получим общее выражение для угла отклонения света. Подставим (1.2.3) в (1.2.4), запишем (1.2.4) в виде

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{L}{2r^3}(r - 2M) = \frac{E^2}{2}. \tag{1.3.1}$$

Второе слагаемое в выражении (1.3.1) можно интерпретировать как эффективный потенциал. Наличие максимума (минимума) этого потенциала свидетельствует о существовании нестабильной (стабильной) орбиты. Найдём его экстремум:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{3L}{2r^4}(r - 2M) + \frac{L}{2r^3} = 0 \tag{1.3.2}$$

Из (1.3.2) следует существование единственного максимума $r = 3M$. Этот максимум- единственная нестабильная орбита света. При этом минимальная энергия необходимая для преодоления этого потенциального барьера очевидно определяется следующим образом:

$$\frac{E^2}{2} = V(r = 3M) = \frac{L^2 M}{2(3M)^3} \tag{1.3.3}$$

Это выражение определяет величину:

$$\frac{L^2}{E^2} = 27M^2 \tag{1.3.4}$$

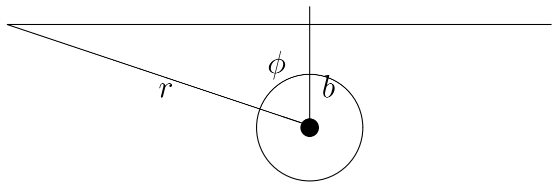

Рис. 1.1: Определение прицельного параметра b.

Теперь получим выражение для прицельного параметра b. Используя Рис. 1.1. получаем:

$$r = \frac{b}{\cos\phi} \tag{1.3.5}$$

Продифференцируем это выражение по времени, получим:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{b}{\cos^2\phi}\frac{d\phi}{dt}\sin\phi. \tag{1.3.6}$$

При $r \gg b$ из уравнений (1.3.5), (1.3.6)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r^2}{b}\frac{d\phi}{dt} \tag{1.3.7}$$

Так как в плоском пространстве $\frac{dr}{dt} = 1$, из выражения (1.2.3) получим:

$$b = r^2\frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{E} \tag{1.3.8}$$

Уравнений (1.3.8) будем далее считать определением прицельного параметра. Из выражения (1.3.8) понятно, что (1.3.4) характеризует квадрат критического прицельного параметра,

$$b_{crit} = \frac{L}{E} = M\sqrt{27}. \tag{1.3.9}$$

При $b < b_{crit}$ свет падает в чёрную дыру. Подставим (1.2.3) в (1.2.4), получим уравнение

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{r^2}\left[E^2 - \frac{L^2}{r^3}(r-2M)\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.3.10}$$

В терминах прицельного параметра (1.3.8) уравнение (1.3.10) приобретает вид:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{\left[r^4 b^{-2} - r(r-2M)\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.3.11}$$

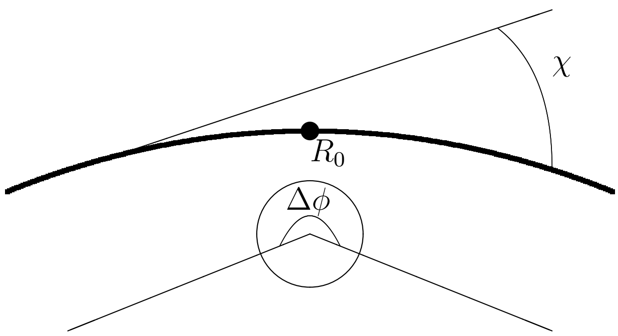

Рис. 1.2: Отклонение светового луча.

Найдём точку поворота R_0, изображённую на Рис. 1.2:

$$\left.\frac{dr}{d\phi}\right|_{R_0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_0^3 - b^2(R_0 - 2M) = 0. \tag{1.3.12}$$

Решение уравнения (1.3.12) можно представить в виде:

$$R_0 = \frac{2b}{\sqrt{3}} cos\left[\frac{1}{3} arcos\left(-\frac{\sqrt{27}M}{b}\right)\right]. \tag{1.3.13}$$

Полный угол поворота $\Delta\phi$ связан с углом χ на Рис. 1.2. соотношением $\chi = \Delta\phi - \pi$. Согласно (1.3.11),

$$\Delta\phi = 2\int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{dr}{\left[r^4 b^{-2} - r(r-2M)\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.3.14}$$

Проинтегрировав численно уравнение (1.3.11) получим зависимость, изображённую на Рис. 1.3.

На этом графике расстояние выражено в половинах радиуса Шварцшильда, а ϕ принято равным 0 в точке поворота $r = R_0$. Часть траектории, изображённой на Рис. 1.3, изображает вращение луча света вокруг чёрной дыры, а последующая отлёт.

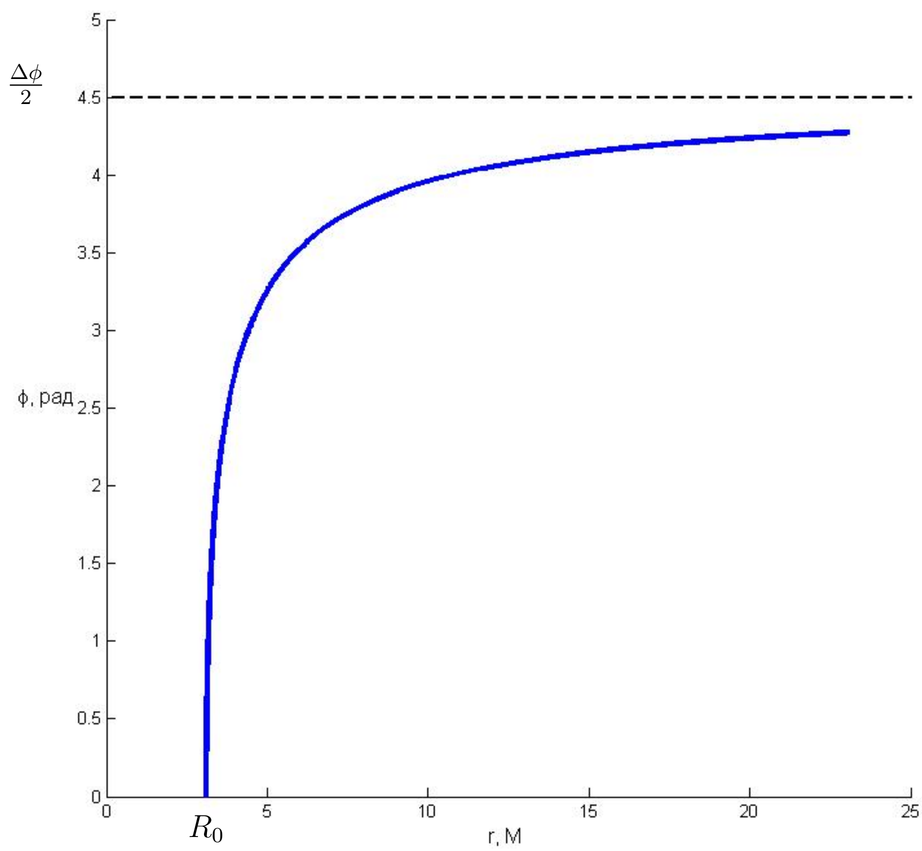

Рис. 1.3: Зависимость ϕ от r для $b - b_{crit} = \frac{M}{100}$.

1.4 Случай малого отклонения

Рассмотрим интеграл (1.3.14). Введём новую переменную $u = \frac{1}{r}$ тогда выражение (1.3.14) принимает следующий вид:

$$\Delta\phi = 2 \int\limits_0^{1/R_0} \frac{du}{(b^{-2} - u^2 + 2Mu^3)^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.4.1}$$

Теперь учтём, что при $b \gg M$ отклонения от первоначального направления малы, а характеристические расстояния до центра чёрной дыры сильно превышают радиус Шварцшильда $2M$. Поэтому мы можем использовать разложение по M с точностью до первого порядка. Исключая

b из (1.4.1) с помощью (1.3.12) получаем:

$$\Delta\phi = 2\int\limits_0^{1/R_0} \frac{du}{\left(R_0^{-2} - 2MR_0^{-3} - u^2 + 2Mu^3\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.4.2}$$

Дифференцируя (1.4.2) по M при фиксированном R_0 и вычисляя результат при M=0, получим:

$$\left.\frac{\partial\Delta\phi}{\partial M}\right|_{M=0} = 2\int\limits_0^{1/R_0} \left.\frac{(R_0^{-3} - u^3)\,du}{\left(R_0^{-2} - 2MR_0^{-3} - u^2 + 2Mu^3\right)^{\frac{3}{2}}}\right|_{M=0} =$$

$$= 2\int\limits_0^{1/b} \frac{b^{-3} - u^3\,du}{(b^{-2} - u^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{1.4.3}$$

Используем в (1.4.3) замену переменной $\sin t = ub$, получим:

$$\left.\frac{\partial\Delta\phi}{\partial M}\right|_{M=0} = \frac{4}{b}. \tag{1.4.4}$$

Поэтому,

$$\chi = \Delta\phi - \pi \approx M\left.\frac{\partial\Delta\phi}{\partial M}\right|_{M=0} = \frac{4}{b} = \frac{4M}{b}. \tag{1.4.5}$$

Зависимость (1.4.5) соответствует асимптотике $\chi(b)$ при больших b. Эта асимптотика изображена на Рис. 1.4. вместе с численным решением.

1.5 Нестабильные орбиты, случай большого отклонения

Чтобы рассматривать отклонение света вблизи чёрной дыры, важно рассмотреть случай малых прицельных параметров и, соответственно, больших отклонений. Дальнейшее рассмотрение будем вести в окрестности $b = \sqrt{27}M$ и $R_0 = 3M$, см. уравнения (1.3.9) и (1.3.3). Обратимся к выражению (1.3.12) и рассмотрим незначительные отклонения от критических значений $b = \sqrt{27}M + \Delta b$ и $R_0 = 3M + \Delta R_0$:

$$(3M + \Delta R_0)^3 - (\sqrt{27}M + \Delta b)^2(\Delta R_0 + M) = 0 \tag{1.5.1}$$

Оставляя члены второго порядка малости по ΔR_0 и первого по Δb, получим:

$$\Delta R_0^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\Delta b M. \tag{1.5.2}$$

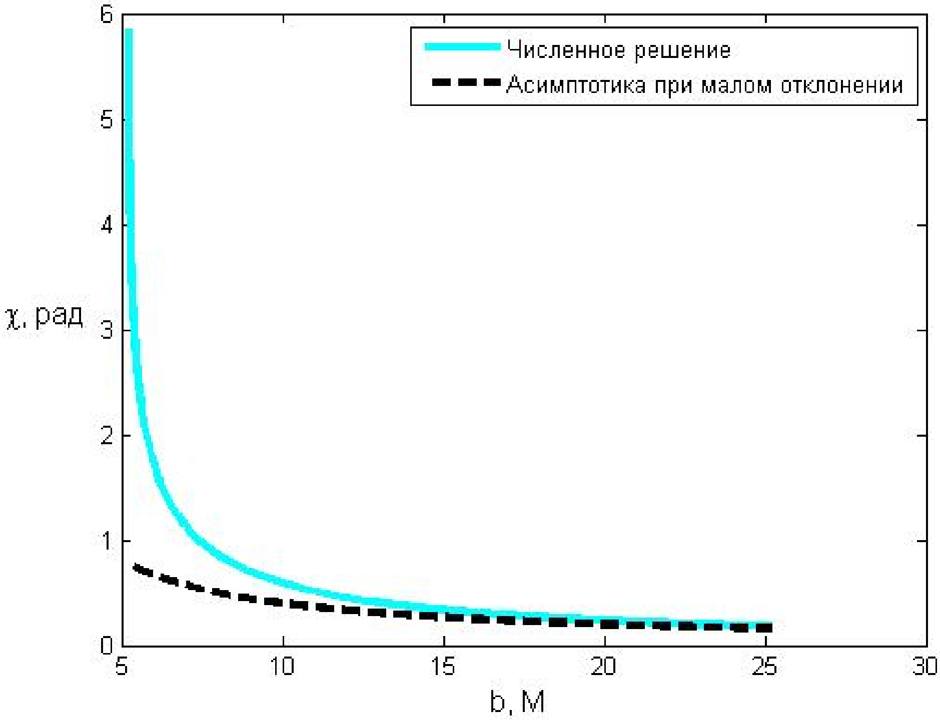

Рис. 1.4: Зависимость χ от b для асимптотики малого отклонения и численного решения.

Теперь рассмотрим интеграл (1.3.14). При больших отклонениях имеет смысл разбить его на две части: вращение в малой окрестности нестабильной орбиты $r = 3M$ и отлёт. В этом случае при отлёте можно считать величину Δb малой и пренебречь ей. Имеем:

$$\Delta\phi = \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 = 2\int\limits_{R_0}^{R_0+\delta} \frac{dr}{[r^4 b^{-2} - r^2 + 2Mr]^{\frac{1}{2}}} + \\ +2\int\limits_{R_0+\delta}^{\infty} \frac{dr}{\left[r^4(\sqrt{27}M)^{-2} - r^2 + 2Mr\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.5.3}$$

Здесь точка $R_0 + \delta$ имеет смысл точки сшивки двух режимов движения. Эта точка выбрана следующим образом:

$$\Delta b \ll \delta \ll M. \tag{1.5.4}$$

Во втором члене выражения (1.5.3) перегруппируем множители:

$$\Delta\phi_2(r) = 2\int \frac{\sqrt{27}M\,dr}{(r-3M)\sqrt{(r+6M)r}}, \tag{1.5.5}$$

где мы рассматриваем $\Delta\phi_2(r)$ как неопределённый интеграл. Введём замену $t = \frac{1}{r-3M}$, перепишем (1.5.5) в виде:

$$\Delta\phi_2(t) = -2\int \frac{dt}{\sqrt{(t+\frac{2}{9M})^2 + \frac{1}{27M^2} - (\frac{2}{9M})^2}}. \tag{1.5.6}$$

Вычислив интеграл, получаем:

$$\Delta\phi_2 = -2\ln\left|\frac{1}{r-3M} + \frac{2}{9M} + \sqrt{\left(\frac{1}{r-3M} + \frac{2}{9M}\right)^2 - \frac{1}{81M^2}}\right| + C. \tag{1.5.7}$$

Значение константы будет определено позже.

Вычислим первую часть выражения (1.5.3), ответственную за режим вращения вокруг чёрной дыры. Введём новую переменную $\Delta r = r - 3M$, учтём, что $\Delta r \ll M$. Также имеет смысл записать $b = \sqrt{27}M + \Delta b$. Работая в главном порядке по Δb и Δr, получим:

$$\Delta\phi_1 = 2\int\limits_{\Delta R_0}^{\Delta R_0+\delta} \frac{d\Delta r}{\left(\Delta r^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\Delta bM\right)}. \tag{1.5.8}$$

Теперь вычислим интеграл (1.5.8):

$$\Delta\phi_1 = 2\int\limits_{\Delta R_0}^{\Delta R_0+\delta} \frac{d\Delta r}{\left(\Delta r^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\Delta bM\right)} = 2\ln\left(\Delta r + \sqrt{\Delta r^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\Delta bM}\right)\Bigg|_{\Delta R_0}^{\Delta R_0+\delta}. \tag{1.5.9}$$

Используя (1.5.2) и условие (1.5.4) в (1.5.9) получим:

$$\Delta\phi_1 \approx 2\ln(2\delta) - \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\Delta bM\right). \tag{1.5.10}$$

Константа C в выражении (1.5.7) определяется из условия сшивки:

$$\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2(R_0+\delta). \tag{1.5.11}$$

Из (1.5.11) получим:

$$2\ln(2\delta) - \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\Delta b M\right) = -2\ln\left(\frac{2}{\delta}\right) + C. \tag{1.5.12}$$

Находя константу C, запишем зависимость угла отклонения от величины r в следующем виде:

$$\phi(r) = -2\ln\left|\frac{1}{r-3M} + \frac{2}{9M} + \sqrt{\left(\frac{1}{r-3M} + \frac{2}{9M}\right)^2 - \frac{1}{81M^2}}\right| + \\ +4\ln(2) - \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\Delta b M\right). \tag{1.5.13}$$

Из выражения (1.5.13) сразу получим:

$$\Delta\phi = -\ln\left|\frac{(2+\sqrt{3})^2\Delta b}{648M\sqrt{3}}\right|. \tag{1.5.14}$$

Поэтому:

$$\chi = \Delta\phi - \pi = -\ln\left|\frac{(2+\sqrt{3})^2(b-\sqrt{27}M)}{648M\sqrt{3}}\right| - \pi. \tag{1.5.15}$$

На Рис. 1.5. зависимость (1.5.15) сравнивается с численным решением уравнения (1.3.11). Видно что эта зависимость работает при всех малых $b - b_{crit}$.

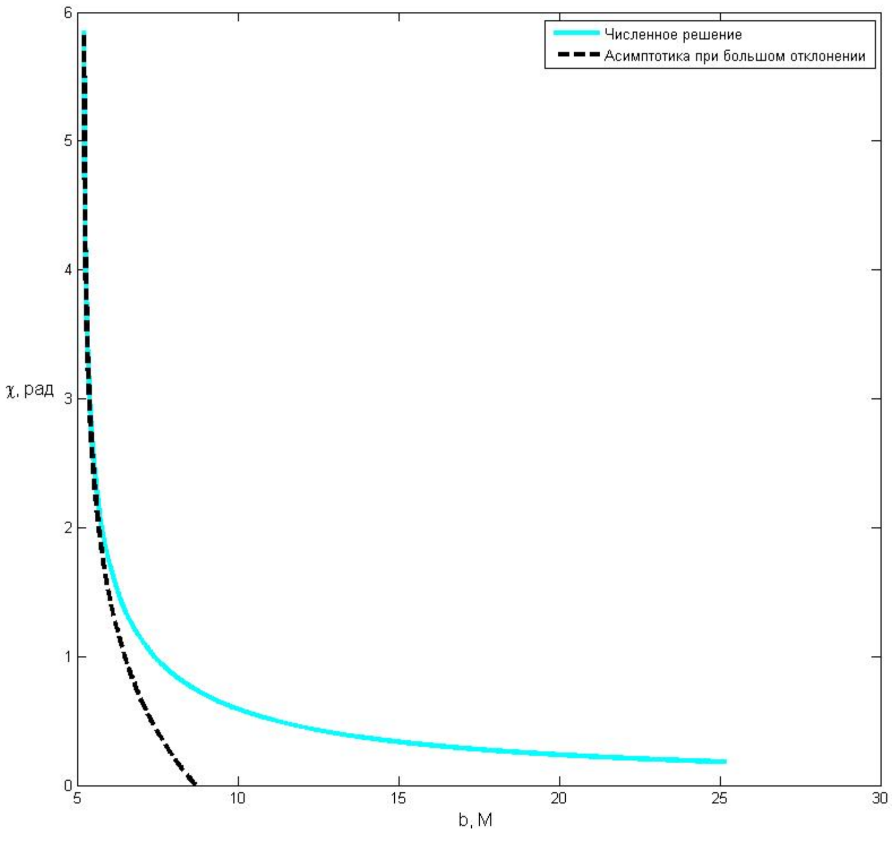

Рис. 1.5: Зависимость $\chi(b)$ в приближении (1.5.15) и для численного решения.

Глава 2

Внешний вид изображений источников излучения

В этой главе будет рассмотрен внешний вид источников излучения, а именно угловые размеры и интенсивности изображений источников.

2.1 Удалённый наблюдатель

Рассмотрим вид источника излучения с точки зрения удалённого наблюдателя. Задача определения интенсивности источника сводится к задаче рассеяния на чёрной дыре. Найдём зависимость дифференциального сечения рассеяния от угла рассеяния. Рассмотрим поток частиц с плотностью n и определим число частиц рассеянных в интервале $(\chi; \chi + d\chi)$ как dN. По определению сечения рассеяния равно:

$$d\sigma(\chi) = \frac{dN}{n}, \tag{2.1.1}$$

где n — число частиц пролетающих через единичную площадку за единицу времени. Теперь рассмотрим параллельный пучок фотонов, падающих под некоторым углом на чёрную дыру. Фотоны рассеиваются в интервале $(\chi; \chi + d\chi)$ тогда, когда они попадают в интервал прицельных параметров $(b; b + db)$. Количество таких фотонов за единицу времени равно:

$$dN = 2n\pi b db. \tag{2.1.2}$$

Используя (2.1.1) получим:

$$d\sigma(\chi) = 2\pi b db. \tag{2.1.3}$$

Поделив уравнение (2.1.3) на $d\chi$, получим:

$$\frac{d\sigma}{d\chi}(\chi) = 2\pi b \left|\frac{db}{d\chi}\right|. \tag{2.1.4}$$

Величина (2.1.4) называется дифференциальным сечением рассеяния. Эта величина также характеризует яркость в направлении угла χ. Функция $b(x)$ — многозначная см, например выражение (1.5.15). Физический смысл этого явления состоит в том, что многие фотоны могут сделать больше одного оборота вокруг чёрной дыры и оказаться под физически тем же углом, что и другие, не сделавшие этих оборотов. Поэтому в будем складывать вклады от всех траекторий.

Как видно из Рис. 1.5, полученная нами асимптотика хорошо работает для фотонов, сделавших более одного оборота. Следовательно (2.1.4) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d\sigma}{d\chi} = 2\pi b \left|\frac{db}{d\chi}\right| + 2\pi\sqrt{27}M \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{db}{d\chi}\right|_{\chi+2\pi n}. \tag{2.1.5}$$

Здесь мы под χ подразумеваем физический угол отклонения, второй член суммирует вклады от траекторий, сделавших n оборотов вокруг чёрной дыры. Используя (1.1.15) рассмотрим зависимость углов $\chi + 2\pi n$ от b:

$$b(\chi + 2\pi n) = e^{-\chi - 2\pi n} \frac{648M\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^2 e^{\pi}} + \sqrt{27}M. \tag{2.1.6}$$

Вычислим производную:

$$\left|\frac{db}{d\chi}\right|_{\chi+2\pi n} = e^{-\chi - 2\pi n} \frac{648M\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^2 e^{\pi}}. \tag{2.1.7}$$

Из (1.3.9) и (2.1.6) следует что это выражение не что иное как

$$\left|\frac{db}{d\chi}\right|_{\chi+2\pi n} = \Delta b(\chi + 2\pi n). \tag{2.1.8}$$

При этом выражение (2.1.8) также можно записать как:

$$\left|\frac{db}{d\chi}\right|_{\chi+2\pi n} = \Delta b(\chi) e^{-2\pi n} \tag{2.1.9}$$

Вернёмся к (2.1.5):

$$\frac{d\sigma}{d\chi}(\chi) = 2\pi b(\chi) \left|\frac{db}{d\chi}(\chi)\right| + 2\pi\sqrt{27}M\Delta b(\chi) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi n} \tag{2.1.10}$$

Ряд в выражении (2.1.10) представляет собой геометрическую прогрессию, поэтому окончательно получаем:

$$\frac{d\sigma}{d\chi}(\chi) = 2\pi b(\chi)\left|\frac{db}{d\chi}(\chi)\right| + 2\pi\sqrt{27}M\Delta b(\chi)\frac{1}{e^{2\pi}-1} \tag{2.1.11}$$

На Рис. 1.5. построена зависимость (2.1.11) при этом при $0 < \chi < \pi$ ис-

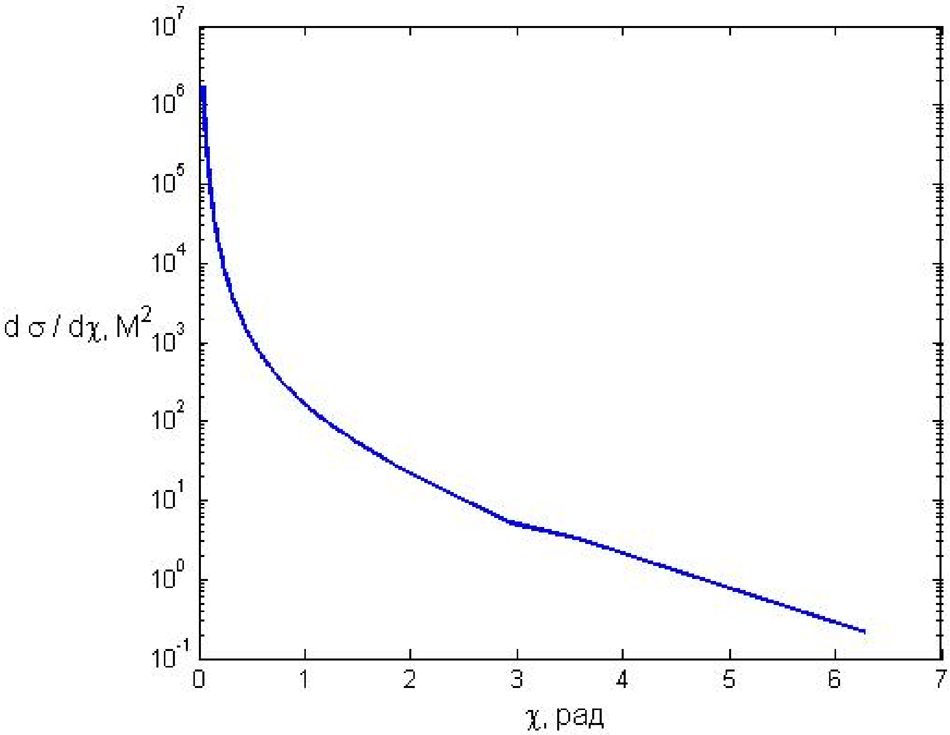

Рис. 2.1: Зависимость $\frac{d\sigma}{d\chi}$ от χ в логарифмическом масштабе.

пользовался численный метод конечных разностей для вычисления производной, а при $\chi > \pi$ использовалась наше выражение (2.1.8).

Как видно из выражения (2.1.11) и Рис. 1.5 фотоны обернувшиеся один раз и более, не вносят существенной поправки. Однако, они представляют собой дополнительные изображения источника, что интересно.

2.2 Земной телескоп

Теперь необходимо перейти к рассмотрению вида источника излучения с Земли. Пусть земной телескоп смотрит под некотором углом α на чёрную дыру. Пусть также на некотором расстоянии l_1 находится источник излучения. Расстояние от телескопа до чёрной дыры обозначим l_2. Введём также угол ω между нашим направление "земля — чёрная дыра"и направлением "чёрная дыра — источник". Согласно Рис. 2.2, получим

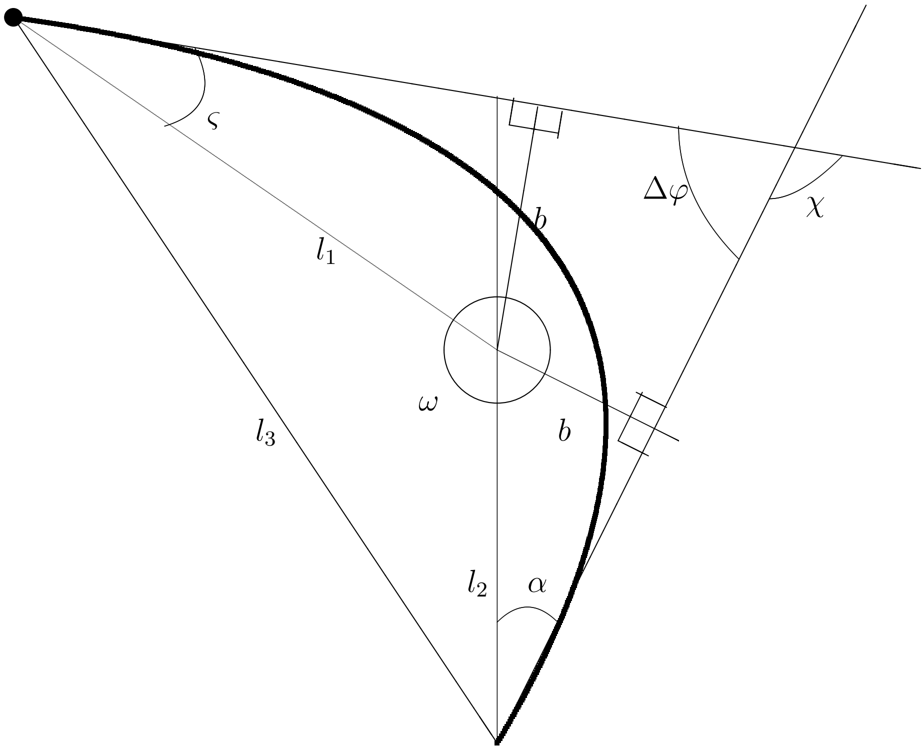

Рис. 2.2: Схема наблюдения в телескоп изображения источника

следующее геометрическое соотношение:

$$\alpha = -\Delta\varphi + \omega - \varsigma, \tag{2.2.1}$$

где углы ς и $\Delta\varphi$ введены на Рис. 2.2. Также очевидно, что поскольку $l_2, l_1 \gg b$, α и ς можно переписать в виде:

$$\alpha = \frac{b}{l_2}; \qquad \varsigma = \frac{b}{l_1}. \tag{2.2.2}$$

Тогда на основе (2.2.1) и (2.2.2) запишем:

$$b\left(\frac{l_2 + l_1}{l_2 l_1}\right) = -\Delta\varphi + \omega. \tag{2.2.3}$$

Очевидно, что в зависимости от того, на каком обороте фотон отлетает от чёрной дыры, его угол $\Delta\phi$ из выражения (1.5.14) будет связан с $\Delta\varphi$ следующим соотношением:

$$\Delta\varphi_n = 2\pi(n+1) - \Delta\phi_n, \tag{2.2.4}$$

где n — число сделанных оборотов. Тогда запишем (2.2.3) в следующем виде:

$$b_n(\frac{l_2+l_1}{l_2 l_1})-\omega=\Delta\phi_n-2\pi(n+1). \tag{2.2.5}$$

Теперь подставим (1.5.14) в (2.2.5):

$$b_n(\frac{l_2+l_1}{l_2 l_1})-\omega=-\ln\left|\frac{(2+\sqrt{3})^2\Delta b_n}{648M\sqrt{3}}\right|-2\pi(n+1). \tag{2.2.6}$$

Обернём выражение (2.2.6) и вспомним разложение экспоненты в первом приближении (это приближение справедливо поскольку $l_2, l_1 \gg b$):

$$e^{\omega-2\pi(n+1)}(1+b_n(\frac{l_2+l_1}{l_2 l_1}))=\frac{(2+\sqrt{3})^2(b_n-\sqrt{27}M)}{648M\sqrt{3}}. \tag{2.2.7}$$

Это линейное уравнение по b_n, его решение:

$$b_n=\frac{e^{\omega-2\pi(n+1)}+\frac{(2+\sqrt{3})^2}{216}}{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{648M\sqrt{3}}-e^{\omega-2\pi(n+1)}\frac{l_2+l_1}{l_2 l_1}}. \tag{2.2.8}$$

Тогда используя (2.2.2) получим:

$$\alpha_n=\frac{e^{\omega-2\pi(n+1)}+\frac{(2+\sqrt{3})^2}{216}}{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{648\sqrt{3}}\frac{l_2}{M}-e^{\omega-2\pi(n+1)}\frac{l_2+l_1}{l_1}}. \tag{2.2.9}$$

При рассмотрении источников, расположенных на расстоянии $l_1 \sim M$ следует использовать выражение (2.2.9). В противном случае можно пренебречь l_2/l_1, тогда (2.2.9) принимает вид:

$$\alpha_n=\frac{648\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^2}\frac{M}{l_2}e^{\omega-2\pi(n+1)}+\frac{M\sqrt{27}}{l_2}. \tag{2.2.10}$$

При нулевом порядке $n=0$ эта формула может не слишком хорошо работать, поэтому для нахождения α_0 следует решать уравнение (2.2.5) численно.

Проведём расчёт углов α_n для чёрной дыры в центре нашей галактики. Тогда $l_2 = 26000$ св лет, расстояние до ближайшей звезды: $l_1 = 1,9*10^{-3}$ св лет, радиус Шварцшильда: $2M = 1,3*10^{-6}$ св лет, $\omega = 3\pi/4$. Тогда получим следующие значения:
$\alpha_1 = 2.71 * 10^{-5}$ секунд угла
$\alpha_2 = 2.68 * 10^{-5}$ секунд угла

Кроме того, численное выражение даёт:
$\alpha_0 = 4.32 * 10^{-5}$ секунд угла
Поскольку $\alpha_0 - \alpha_1 \approx 16$ микросекунд угла, то Радиоастрон, в теории может разрешить первые два изображения как разные, хотя последующие изображения сливаются. Вообще говоря, изображения будут присутствовать с двух сторон от чёрной дыры, однако, одно из них будет обладать экспоненциально меньшей интенсивностью.

Интерес также представляет случай $\omega = \pi$. В этой ситуации источник закрыт чёрной дырой, а его изображения формируют кольцо вокруг чёрной дыры.

Вычислим яркость изображений источника. Для этого вспомним, что интенсивность определяется как:

$$I = \frac{dN}{dtS}. \tag{2.2.11}$$

Пусть свет падает на некоторую площадку перед чёрной дырой, тогда обозначив эту площадку за dS_0 получим для дифференциального сечения рассеяния (2.1.1):

$$d\sigma = \frac{dN}{dN_0/dS_0}. \tag{2.2.12}$$

Из (2.2.11) и (2.2.12) получим:

$$I = \frac{d\sigma}{dS}\frac{dN_0}{dS_0 dt}. \tag{2.2.13}$$

Второй множитель в (2.2.13) представляет собой начальную интенсивность. Площадка dS на которую падает прошедший свет представляет собой кольцо лежащее в плоскости наблюдения. Площадь этого кольца можно найти исходя из построения хода лучей после чёрной дыры. Она равна:

$$dS = 2\pi l_2^2 \sin\chi d\chi. \tag{2.2.14}$$

Исходя из (2.2.14) выражение (2.2.13) принимает вид:

$$I = \frac{d\sigma}{d\chi}\frac{I_0}{2\pi l_2^2 \sin\chi}. \tag{2.2.15}$$

Первый множитель это дифференциальное сечение рассеяния выражение для которого было уже найдено (см. (2.1.11). Рассматривая площадку dS_0 вблизи чёрной дыры для I_0 получим:

$$I_0 = \frac{dN}{4\pi l_1^2 dt}. \tag{2.2.16}$$

Для интенсивности света прошедшего напрямую получаем:

$$I_{dir} = \frac{dN}{4\pi l_3^2 dt}, \tag{2.2.17}$$

где l_3 — расстояние от источника излучения до телескопа (см. Рис. 2.2.). Исходя из (2.2.15)-(2.2.17) для отношения I/I_{dir} получаем:

$$\frac{I}{I_{dir}} = \frac{d\sigma}{d\chi}\frac{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\omega}{2\pi l_2^2 l_1^2 \sin\chi}. \tag{2.2.18}$$

Проведём расчёт для I_0/I_{dir} и I_1/I_{dir} ($\omega = 3\pi/4$), где первая величина соответствует первому изображению, а вторая второму.
$I_0/I_{dir} = 4.9 * 10^{-6}$
$I_1/I_{dir} = 2.5 * 10^{-9}$
Звёздная величина по определению равна:

$$m = -2.5 * \lg\frac{E_2}{E_1}, \tag{2.2.19}$$

тогда оценка звёздной величины для изображения звезды подобной солнцу даёт:
$m_0 \approx 35$
$m_1 \approx 42$
Эти величины разумеется больше характерных звёздных величин регистрируемых самыми большими телескопами ($m_0 \approx 28$).

Заключение

В работе исследовано поведение световых лучей в окрестности чёрных дыр. Получены решения уравнений геодезических, сравнение с численными решениями показывает, что эти приближения с достаточно высокой точностью описывают поведение лучей света при малых и больших значениях прицельного параметра. Показано, что точечные источники формируют изображения вблизи чёрной дыры, которые в случае источника, находящегося на одной линии с наблюдателем и чёрной дырой, переходят в кольцо. Были изучены возможности разрешения отдельных изображений. Оказалось, что угловое расстояние между изображениями сравнимо с угловым разрешением современных радиотелескопов. Однако слабые интенсивности вряд-ли могут сделать возможным прямое наблюдение изображений. В будущем, с появлением приборов высокой чувствительности, возможно, такие эффекты станут наблюдаемыми.

Литература

[1] http://www.asc.rssi.ru/radioastron/index.html

[2] Л.Д. Ландау, Е.М Лифшиц. Механика, Наука, 1988.

[3] П.А.М. Дирак. Общая теория относительности, Атомиздат, 1978.

[4] Ю.С. Владимиров. Системы отсчёта в теории гравитации, Энергоиздат, 1982.

[5] R.M. Wald. General Relativity, The Univeristy of Chicago Press, 1984.