Решение уравнения Дирака в терминах двухкомпонентных спиноров со спиральностью ±1

Курсовя работа студента 2 курса
Евсеева Олега Александровича

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, академик
Рубаков Валерий Анатольевич

Уравнение Дирака и уравнение Клейна-Гордона

Уравнение Клейна-Гордона: $(\Box - m^2)\psi = 0$

$$\Box - m^2 = (i\gamma^\nu\partial_\nu - m)(i\gamma^\mu\partial_\mu + m) = (i\gamma^\nu\partial_\nu + m)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)$$

Представление Вейля: $\gamma^\nu = \begin{pmatrix} \mathbf{\Theta} & \sigma_\nu \\ \overline{\sigma}_\nu & \mathbf{\Theta} \end{pmatrix}$ при $\nu = \overline{0,3}$

Уравнение Дирака: $(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi(\vec{x}\,) = 0$

Волновая функция и сопряжённый спинор

Волновая функция: $\psi(\vec{x}\,) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$

Сопряжённое уравнение: $i\partial_\nu \overline{\psi}(\vec{x}\,)\gamma^\nu + m\overline{\psi}(\vec{x}\,) = 0$

Дираковски сопряжённый спинор: $\overline{\psi}(\vec{x}\,) = \psi^\dagger(\vec{x}\,)\gamma^0$

Внутренняя структура волновой функции и система уравнений

Представление Вейля: $\gamma^\nu = \begin{pmatrix} \mathbf{\Theta} & \sigma_\nu \\ \overline{\sigma}_\nu & \mathbf{\Theta} \end{pmatrix}$ при $\nu = \overline{0,3}$

Волновая функция: $\psi(\vec{x}\,) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ где $\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ и $\chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$

Система уравнений: $\begin{cases} \dfrac{\partial \chi}{\partial x_0} - \sigma_n \dfrac{\partial \chi}{\partial x_n} = \dfrac{m}{i}\varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0} + \sigma_n \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} = \dfrac{m}{i}\chi \end{cases}$

Базис решений

Плоская волна: $\varphi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} e^{i\vec{p}\vec{x}}$

Ортонормированный базис: $\{\varphi^+, \varphi^-\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Разложение по базису: $\varphi = u_1 e^{i\vec{p}\vec{x}} \varphi^+ + u_2 e^{i\vec{p}\vec{x}} \varphi^-$

Компонента φ^+

Волновая функция: $\psi(\vec{x}\,) = -\frac{u_1}{m}\begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ p_0 + p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix} e^{i\vec{p}\,\vec{x}}$

Сопряжённый спинор: $\overline{\psi}(\vec{x}\,) = -\frac{u_1^*}{m}(p_0 + p_3, p_1 - ip_2, -m, 0)e^{-i\vec{p}\,\vec{x}}$

Нормировка: $u_1 = u_1^* = \frac{m}{\sqrt{\left(m^2 + (p_0 + p_3)^2 + p_1^2 + p_2^2\right) \int d\mathbf{x}}}$

Компонента φ^-

Волновая функция: $\psi(\vec{x}\,) = -\frac{u_2}{m}\begin{pmatrix} 0 \\ -m \\ p_2 + ip_1 \\ p_0 + p_3 \end{pmatrix} e^{i\vec{p}\,\vec{x}}$

Сопряжённый спинор: $\overline{\psi}(\vec{x}\,) = -\frac{u_2^*}{m}(p_2 - ip_1, p_0 + p_3, 0, -m)e^{-i\vec{p}\,\vec{x}}$

Нормировка: $u_2 = u_2^* = \frac{m}{\sqrt{\left(m^2 + (p_0 + p_3)^2 + p_1^2 + p_2^2\right) \int d\mathbf{x}}}$

Спиральность

Выбор системы координат: $\vec{p} = \{p_0, 0, 0, p_3\}$

Проекция вектора спина:

$$S_3 = \int dx S^{0(12)} = \frac{1}{4} \int \overline{\psi}(\vec{x}\,)(\gamma^0 \sigma^{12} + \sigma^{12} \gamma^0) \psi(\vec{x}\,) dx$$

В представлении Вейля:

$$S_3 = \frac{1}{2} \int \overline{\psi}(\vec{x}\,) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \psi(\vec{x}\,) d\mathbf{x}$$

Состояния системы:

$$\psi(\vec{x}\,) = -\frac{u_1}{m}(-m, 0, p_0 + p_3, p_1 + ip_2)^{\mathbf{T}} e^{i\vec{p}\,\vec{x}}, \quad S_3 = +\frac{1}{2},$$

$$\psi(\vec{x}\,) = -\frac{u_2}{m}(0, -m, p_2 + ip_1, p_0 + p_3)^{\mathbf{T}} e^{i\vec{p}\,\vec{x}}, \quad S_3 = -\frac{1}{2},$$

$$\psi(\vec{x}\,) = \frac{v_1}{m}(p_3 - p_0, p_1 - ip_2, 0, m)^{\mathbf{T}} e^{i\vec{p}\,\vec{x}}, \quad S_3 = +\frac{1}{2},$$

$$\psi(\vec{x}\,) = \frac{v_1}{m}(p_1 - ip_2, p_3 - p_0, m, 0)^{\mathbf{T}} e^{i\vec{p}\,\vec{x}}, \quad S_3 = -\frac{1}{2},$$

Выводы:

- Выписано решение уравнения Дирака в виде линейной комбинации двух решений, порождаемых базисными двухкомпонентными спинорами
- Доказано сохранение во времени проекции вектора спина на направление движения
- Показано, что двум базисным решениям соответствуют состояния системы с положительной и отрицательной проекцией вектора спина на направление движения