МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра физики частиц и космологии

Решение уравнения Дирака в терминах двухкомпонентных спиноров со спиальностью ± 1

Курсовая работа
студента 2 курса
Евсеева Олега Александровича

Научный руководитель:
академик РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор
Рубаков Валерий Анатольевич

Москва, 2014 г.

Содержание

1. Введение . . . 2

2. Уравнение Дирака и уравнение Клейна-Гордона . . . 3

3. Решение уравнения Дирака для свободной частицы . . . 4
   - 3.1. Система уравнений . . . 4
   - 3.2. Базис решений . . . 5
   - 3.3. Компонента φ^+ . . . 5
   - 3.4. Компонента φ^- . . . 6
   - 3.5. Связь базисных спиноров со спиральностью . . . 6
   - 3.6. Случай отрицательной энергии . . . 7

4. Выводы . . . 8

Список литературы . . . 8

1. Введение

В 1928 году П. Дираком было установлено релятивистски-инвариантное уравнение движения для би-спинорного классического поля электрона, известное сейчас как уравнение Дирака. Применимое для описания не только электронов, но и других точечных фермионов со спином 1/2, уравнение играет огромную роль во всей квантовой механике.

В настоящей работе был рассмотрен случай движения свободного электрона, для которого было записаны решение уравнения Дирака в терминах двухкомпонентных спиноров. Решение было представлено как линейная комбинация двух базисных решений, соответствующих различным знакам спиральности (проекции вектора спина на направление движения частицы).

Во всей работе используется так называемая *рациональная система единиц*, в которой скорость света и постоянная Планка равны единице: $c = \hbar = 1$. Кроме того, везде, где в выражении встречаются повторяющиеся индексы, следуя правилу Эйнштейна, будем подразумевать суммирование по повторяющемуся индексу:

$$a_\nu b^\nu = \sum_{\nu=0}^{3} a_\nu b^\nu.$$

Если суммирование ведётся по пространственным компонентам, индексы будем обозначать латинскими буквами, взятыми из середины алфавита:

$$\mathbf{ab} = a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_4,$$

а по четырём компонентам – греческими:

$$\vec{p}\,\vec{x} = a^\nu b_\nu = a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3.$$

Если векторная величина обозначена в формуле жирным шрифтом ($\mathbf{p}$), подразумевается пространственный вектор, а если символом вектора ($\vec{p}$) – четырёхвектор.

Под произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем понимать

$$\vec{a}\vec{b} = a^0 b^0 - \mathbf{ab} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu,$$

где g – диагональный метрический тензор:

$$g_{00} = 1, \;\; g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} \text{ при } \mu^2 + \nu^2 \neq 0$$

И, наконец, переход от контравариантных p^ν к ковариантным p_ν компонентам и обратно определяется также через метрический тензор g:

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu \text{ и обратно } a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu, \text{ где } g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$$

2. Уравнение Дирака и уравнение Клейна-Гордона

Когда Дирак начинал работу над уравнением, описывающим поле электрона, уже было известно и активно использовалось уравнение Клейна-Гордона:

$$(\Box - m^2)\psi = 0, \tag{1}$$

где $\Box = \triangle - \partial_0^2 = -\partial_\nu \partial^\nu$ – оператор д'Аламбера. Однако, как писал сам Дирак[2]:

> *Теория преобразований стала моим любимым детищем, и меня не интересовала ни одна из теорий, которые не подходили для моего любимого творения* $<\ldots>$ *Таким образом, я должен был беспокоиться о проблеме создания релятивистской теории, которая была бы линейной по оператору* $\partial/\partial t$. *Линейность по* $\partial/\partial t$ *была абсолютно необходима для меня; я просто не мог представить себе, что можно отказаться от теории преобразований.*

Чтобы добиться линейности по $\partial/\partial t$ Дирак представил оператор Клейна-Гордона в виде произведения двух коммутирующих матричных операторов:

$$\Box - m^2 = (i\gamma^\nu \partial_\nu - m)(i\gamma^\mu \partial_\mu + m) = (i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m), \tag{2}$$

где коэффициенты γ определяются из условия на их антикоммутатор:

$$\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} = \gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu}. \tag{3}$$

Матрицы γ определены с точностью до унитарного преобразования[1], однако, в целях упрощения дальнейших вычислений, связанных с проекцией вектора спина на направление движения частицы, удобнее использовать представление Вейля:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \ \gamma^1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$
$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -i \\ \cdot & \cdot & i & \cdot \\ \cdot & i & \cdot & \cdot \\ -i & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \ \gamma^3 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \tag{4}$$

или

$$\gamma^\nu = \begin{pmatrix} \mathbf{\Theta} & \sigma_\nu \\ \overline{\sigma}_\nu & \mathbf{\Theta} \end{pmatrix} \text{ при } \nu = \overline{0,3}, \tag{5}$$

где $\sigma_\nu = (\mathbf{I}, \sigma_n)$, $\overline{\sigma}_\nu = (\mathbf{I}, -\sigma_n)$, σ_n – двухрядные матрицы Паули, а $\mathbf{I}$ и $\mathbf{\Theta}$ – единичная и нулевая матрицы соответственно:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

В таком представлении условие эрмитова сопряжения запишется в виде

$$(\gamma^\nu)^\dagger = g_{\nu\mu}\gamma^\mu \equiv \gamma_\nu. \tag{7}$$

Таким образом, мы получаем уравнение

$$(i\gamma^\nu\partial_\nu + m)(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi(\vec{x}\,) = (i\gamma^\nu\partial_\nu - m)(i\gamma^\nu\partial_\nu + m)\psi(\vec{x}\,) = 0. \tag{8}$$

В соответствии с традицией[1] выберем в качестве уравнения движения спинорного поля уравнение

$$(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi(\vec{x}\,) = 0, \tag{9}$$

решение которого в простейшем случае представляет собой 4-компонентный спинор[1], часто записываемый в виде столбца:

$$\psi(\vec{x}\,) = \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Взяв теперь эрмитово сопряжение от (9) и домножив получившееся выражение на γ^0 справа, получаем сопряжённое уравнение:

$$i\partial_\nu\overline{\psi}(\vec{x}\,)\gamma^\nu + m\overline{\psi}(\vec{x}\,) = 0, \tag{11}$$

где $\overline{\psi}(\vec{x}\,)$ (дираковски) сопряженный спинор:

$$\overline{\psi}(\vec{x}\,) = \psi^\dagger(\vec{x}\,)\gamma^0. \tag{12}$$

3. Решение уравнения Дирака для свободной частицы

3.1. Система уравнений

Поскольку матрицы γ обладают внутренней структурой (могут быть записаны через матрицы Паули), будем искать решение уравнение Дирака в следующем виде:

$$\psi(\vec{x}\,) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ и $\chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ – двухкомпонентные спиноры.

Подставляя волновую функцию (13) и выражения для матриц γ (5) в уравнение Дирака (9) имеем:

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{\Theta} & \sigma_\nu \\ \overline{\sigma}_\nu & \mathbf{\Theta} \end{pmatrix} \partial_\nu \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{m}{i} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{14}$$

или, раскрыв произведения и переписав (14) в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi}{\partial x_0} - \sigma_n \frac{\partial \chi}{\partial x_n} = \frac{m}{i} \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + \sigma_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = \frac{m}{i} \chi \end{cases} . \tag{15}$$

Если теперь выразить из второго уравенения системы (15) χ и подставить в первое, мы получим, применяя соотношения для матриц Паули ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbf{I}$, $\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i$ при $i \neq j$), уравнение Клейна-Гордона для двухкомпонентного спинора φ и выражение для χ через φ:

$$\begin{cases} \chi = \frac{i}{m} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \sigma_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \varphi \\ m^2 \varphi = \Box \varphi = \left(\triangle - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right) \varphi \end{cases} . \tag{16}$$

3.2. Базис решений

Поскольку система уравнений (15) с точностью до знаков симметрична относительно φ и χ, решение можно искать двумя способами: зафиксировать выражение для φ в виде плоской волны (нас интересует решение для свободной частицы) и рассчитать компоненты χ и наоборот. Полученные выражения будут отличаться знаком энергии p_0[1] Рассмотрим случай, соответствующий $p_0 > 0$:

$$\varphi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} e^{i\vec{p}\vec{x}}, \tag{17}$$

где u_1, u_2 – некоторые функции 4-импульса $\vec{p}$ (уравнение описывает свободную частицу, то есть $\vec{p} = const$, откуда $u_1 = const$ и $u_2 = const$).

Подставляя выражение (17) во второе уравнение системы (16), получаем известное соотношение для энергии и импульса: $p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$. Таким образом, любая функция φ вида (17) будет удовлетворять системе (16).

Для упрощения дальнейших вычислений разложим решение (17) по ортонормированному базису $\{\varphi^+, \varphi^-\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ и произведём необходимые вычисления для каждой из компонент отдельно:

$$\varphi = u_1 e^{i\vec{p}\vec{x}} \varphi^+ + u_2 e^{i\vec{p}\vec{x}} \varphi^- . \tag{18}$$

3.3. Компонента φ^+

Пусть

$$\varphi = u_1 e^{i\vec{p}\vec{x}} \varphi^+ = \begin{pmatrix} u_1 e^{i\vec{p}\vec{x}} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

тогда, подставляя выражение (19) в первое уравнение системы (16), получаем выражение для χ:

$$\chi = -\frac{u_1}{m}\begin{pmatrix} p_0 + p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix} e^{i\vec{p}\vec{x}} \qquad (20)$$

или, подставляя в φ и χ в (13):

$$\psi(\vec{x}\,) = -\frac{u_1}{m}\begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ p_0 + p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix} e^{i\vec{p}\vec{x}}. \qquad (21)$$

Из (12) соответствующий сопряжённый спинор $\overline{\psi}(\vec{x}\,)$ равен:

$$\overline{\psi}(\vec{x}\,) = -\frac{u_1^*}{m}(p_0 + p_3, p_1 - ip_2, -m, 0)e^{-i\vec{p}\vec{x}}. \qquad (22)$$

Определим коэффициент u_1 из условия нормировки волновой функции:

$$u_1 = u_1^* = \frac{m}{\sqrt{\left(m^2 + (p_0 + p_3)^2 + p_1^2 + p_2^2\right)\int d\mathbf{x}}} \qquad (23)$$

3.4. Компонента φ^-

Пусть теперь

$$\varphi = u_2 e^{i\vec{p}\vec{x}}\varphi^- = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 e^{i\vec{p}\vec{x}} \end{pmatrix}, \qquad (24)$$

тогда аналогичными выкладками получаем:

$$\psi(\vec{x}\,) = -\frac{u_2}{m}\begin{pmatrix} 0 \\ -m \\ p_2 + ip_1 \\ p_0 + p_3 \end{pmatrix} e^{i\vec{p}\vec{x}}. \qquad (25)$$

Соответствующий сопряжённый спинор $\overline{\psi}(\vec{x}\,)$ равен:

$$\overline{\psi}(\vec{x}\,) = -\frac{u_2^*}{m}(p_2 - ip_1, p_0 + p_3, 0, -m)e^{-i\vec{p}\vec{x}}, \qquad (26)$$

а нормировочный множитель u_2 примет вид:

$$u_2 = u_2^* = \frac{m}{\sqrt{\left(m^2 + (p_0 + p_3)^2 + p_1^2 + p_2^2\right)\int d\mathbf{x}}} \qquad (27)$$

3.5. Связь базисных спиноров со спиральностью

Не умаляя общности рассуждений будем далее полагать, что частица движется вдоль оси x_3, т.е. $\vec{p} = \{p_0, 0, 0, p_3\}$. Проекция вектора спина на ось x_3 (т.е. на направление движения) выражается [1] через компоненты матричного тензора спина $\sigma^{\mu\nu}$:

$$S_3 = \int dx S^{0(12)} = \frac{1}{4}\int \overline{\psi}(\vec{x}\,)(\gamma^0\sigma^{12} + \sigma^{12}\gamma^0)\psi(\vec{x}\,)dx. \tag{28}$$

Подставляя для конкретного предсатвления γ значение

$$\sigma^{12} = \sigma_{12} = \frac{\gamma_1\gamma_2 - \gamma_2\gamma_1}{2i} = \frac{(\gamma^1)^\dagger(\gamma^2)^\dagger - (\gamma^2)^\dagger(\gamma^1)^\dagger}{2i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

в формулу (28), получаем

$$S_3 = \frac{1}{2}\int \overline{\psi}(\vec{x}\,) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \psi(\vec{x}\,)d\mathbf{x}. \tag{30}$$

В случае $\varphi = u_1 e^{i\vec{p}\,\vec{x}}\varphi^+$ из (30) получаем:

$$S_3^{\varphi^+} = \frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\,|u_1|^2 \frac{(p_0+p_3)^2 + m^2}{m^2} = \frac{1}{2} > 0. \tag{31}$$

В случае $\varphi = u_2 e^{i\vec{p}\,\vec{x}}\varphi^-$ из (30) получаем:

$$S_3^{\varphi^-} = -\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\,|u_2|^2 \frac{(p_0+p_3)^2 + m^2}{m^2} = -\frac{1}{2} < 0. \tag{32}$$

Таким образом, двум базисным спинорам φ^+ и φ^- соответствуют состояния с положительной и отрицательной спиральностью.

3.6. Случай отрицательной энергии

В разделе 3.2 для демонстрации рассчётов был выбран случай, соответсвующий положительному значению энергии p_0. Случай $p_0 < 0$ рассчитывается аналогично. Ниже приведены волновые функции, порождаемые базисными спинорами $\{\chi^+, \chi^-\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ и соответствующие им значения проекции спина на ось x_3 при условии нулевых проекций 4-вектора $\vec{p}$ на оси x_1 и x_2:

$$\psi(\vec{x}\,) = \frac{v_1}{m}(p_3 - p_0, p_1 - ip_2, 0, m)^{\mathbf{T}} e^{i\vec{p}\,\vec{x}}, \quad S_3 = +\frac{1}{2}, \tag{33}$$

$$\psi(\vec{x}\,) = \frac{v_1}{m}(p_1 - ip_2, p_3 - p_0, m, 0)^{\mathbf{T}} e^{i\vec{p}\,\vec{x}}, \quad S_3 = -\frac{1}{2}, \tag{34}$$

где

$$v_{1,2} = v_{1,2}^* = \frac{m}{\sqrt{\left(m^2 + (p_3 - p_0)^2 + p_1^2 + p_2^2\right)\int d\mathbf{x}}}. \tag{35}$$

4. Выводы

В ходе работы было выписано решение уравнения Дирака в терминах двухкомпонентных спиноров. Решение (отдельно для случаев $p_0 > 0$ и $p_0 < 0$) было представлено как линейная комбинация двух базисных решений. Было показано, что базисные решения (как в случае положительной, так и в случае отрицательной энергии) соответствуют частицам с различными знаками спиральности (проекции вектора спина на направление движения частицы):

$$\psi(\vec{x}\,) = -\frac{u_1}{m}(-m, 0, p_0 + p_3, p_1 + ip_2)^{\mathbf{T}} e^{i\vec{p}\vec{x}}, \quad S_3 = +\frac{1}{2}, \tag{36}$$

$$\psi(\vec{x}\,) = -\frac{u_2}{m}(0, -m, p_2 + ip_1, p_0 + p_3)^{\mathbf{T}} e^{i\vec{p}\vec{x}}, \quad S_3 = -\frac{1}{2}, \tag{37}$$

$$\psi(\vec{x}\,) = \frac{v_1}{m}(p_3 - p_0, p_1 - ip_2, 0, m)^{\mathbf{T}} e^{i\vec{p}\vec{x}}, \quad S_3 = +\frac{1}{2}, \tag{38}$$

$$\psi(\vec{x}\,) = \frac{v_1}{m}(p_1 - ip_2, p_3 - p_0, m, 0)^{\mathbf{T}} e^{i\vec{p}\vec{x}}, \quad S_3 = -\frac{1}{2}, \tag{39}$$

Список литературы

[1] Боголюбов Н.Н. Ширков Д.В. Квантовые поля: Учеб. пособие для вузов. – 3-е изд., доп – М.: Физматлит, 2005. – 384 с. – ISBN 5-9221-0580-9

[2] Дирак П. А. М. Релятивистское волновое уравнение электрона: Успехи физических наук, 1979, в. 4, т. 129, с. 681-691.

[3] Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики, 2-е изд. М.: Наука, 1979, 480 с.

[4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Физматлит, 2008, 800 с.

[5] Дирак П. А. М. Спиноры в гильбертовом пространстве, М.: Мир, 1978, 126 с.

[6] Фейнман Р. П. Теория фундаментальных процессов: Библиотека теоретической физики, М.: Наука, 1978, 199 с.

[7] Картан Э. Теория спиноров, Волгоград: Платон, 1997, 223 с. – ISBN 5-80100-256-1