МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра физики частиц и космологии

Движение массивного тела в расширяющейся Вселенной: ньютонов подход

Курсовая работа
студентки 2 курса
Бишлер Людмилы Владимировны

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, академик
Рубаков Валерий Анатольевич

Москва, 2015 г.

Содержание

1 Введение **2**

1.1 Свойства пространства 2

1.2 Расширение 2

1.3 Уравнение Фридмана 3

1.4 Постановка задачи 3

2 Уравнения, описывающие сплошную среду **3**

2.1 Уравнение Пуассона и закон сохранения вещества 3

2.2 Уравнение Эйлера 4

3 Система уравнений и ее однородное решение **5**

4 Движение в поле массивного тела в расширяющейся Вселенной **8**

5 Выводы **11**

1 Введение

В 20-ых годах XX века наблюдениями с Земли было обнаружено, что Вселенная расширяется: галактики разбегаются друг от друга и наблюдателю в каждой кажется, что именно в ней центр расширения. Целью данной работы является анализ движения гравитационно связанных объектов в расширяющейся Вселенной. Начнем с краткого обсуждения современного состояния Вселенной.

1.1 Свойства пространства

На больших масштабах видимая часть Вселенной однородна и изотропна. Во Вселенной нет выделенных направлений (изотропность), а области размером 100 Мпк и более выглядят одинаково (однородность). Однородность и изотропность Вселенной означают, что в фиксированный момент времени геометрия пространства – это геометрия однородного и изотропного трехмерного многообразия. Таких многообразий существует всего три: трехмерная сфера, трехмерное евклидово пространство и трехмерный гиперболоид. Фундаментальным результатом наблюдений последних лет стало установление того факта, что пространственная кривизна Вселенной если и отлична от нуля, то мала.

1.2 Расширение

Как было сказано выше, Вселенная расширяется: галактики удаляются друг от друга. Для описания расширения вводят понятие масштабного фактора $a(t)$. Расстояние между двумя удаленными объектами пропорционально $a(t)$. В случае пространственно-плоской Вселенной масштабный фактор определен с точностью до умножения на произвольную постоянную, поэтому более интересным для изучения является темп расширения Вселенной, характеризующийся параметром Хабла $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$. Параметр Хаббла связан с временным масштабом Вселенной. Для современного значения параметра это время равно

$$H^{-1} = 1.4 \cdot 10^{10} \text{лет}. \tag{1.1}$$

Это время по порядку величины совпадает с возрастом Вселенной. Прямая экстраполяция эволюции Вселенной в прошлое приводит к представлению о моменте Большого взрыва, с которого началась классическая космологическая эволюция. С этой точки зрения, время жизни Вселенной – время, прошедшее с момента Большого взрыва, а размер видимой ее части (космологического горизонта) – расстояние, которое прошли с момента Большого взрыва сигналы, движущиеся со скоростью света. При этом размер Вселенной превышает размер горизонта.

1.3 Уравнение Фридмана

Расширяющаяся однородная изотропная Вселенная описывается метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j, \tag{1.2}$$

где $\gamma_{ij}dx^i dx^j$ - метрика единичной 3-сферы ($dl^2 = d\chi^2 + sin^2\chi(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)$), единичного 3-гиперболоида ($dl^2 = d\chi^2 + sh^2\chi(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)$) или 3-плоскости ($dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$). ($\chi$, θ и ϕ - сферические углы).

(00)-компонента уравнений Эйнштейна в однородной и изотропной Вселенной (с метрикой, определяемой уравнением (1.2)) имеет вид:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{æ}{a^2} \tag{1.3}$$

и называется уравнением Фридмана. Оно связывает темп расширения Вселенной $\frac{\dot{a}}{a}$ с плотностью энергии материи ρ и просторанственной кривизной æ.

1.4 Постановка задачи

Рассмотрим однородное и изотропное пространство, заполненное нерелятивистским веществом – пылью – с нулевым давлением ($p = 0$). Выясним, как будет развиваться это пространство и как оно будет влиять на гравитационно связанные объекты, которые мы туда поместим. Данная задача является задачей ОТО, но на небольших расстояниях и нерелятивистских движениях ОТО переходит в ньютонову теорию гравитации. Поэтому для данной задачи адекватным является ньютонов подход. Его мы и будем использовать. Найдем потенциал, создаваемый средой, а затем рассчитаем, как этот добавочный потенциал повлияет на движение объекта в центральном поле силы тяжести.

2 Уравнения, описывающие сплошную среду

2.1 Уравнение Пуассона и закон сохранения вещества

Так как среда не заряжена, между частицами действуют только гравитационные силы. Вещество создает гравитационный потенциал φ, удовлетворяющий уравнению

Пуассона:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho. \tag{2.1}$$

Рассмотрим некоторый объем V_0 пространства, ограниченный поверхностью f, $\vec{v}$ – скорость вещества в данной точке пространства, а ρ – плотность. Тогда через элемент поверхности df, ограничивающий рассматриваемый объем, в единицу времени протекает количество $\rho\vec{v}d\vec{f}$ вещества. А его полное количество, вытекающее за единицу времени из объема V_0, есть

$$\oint \rho\vec{v}d\vec{f}, \tag{2.2}$$

где интегрирование производится по поверхности, охватывающей рассматриваемый объем.

С другой стороны, уменьшение количества жидкости в объеме V_0 можно записать в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV. \tag{2.3}$$

Приравнивая оба выражения и преобразуя интеграл по поверхности в интеграл по объему, получаем уравнение:

$$\int \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{v}\right) dV = 0, \tag{2.4}$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{v} = 0. \tag{2.5}$$

Это уравнение носит название уравнения непрерывности и отражает закон сохранения вещества.

2.2 Уравнение Эйлера

Выделим в веществе некоторый объем. На него действуют сила давления, которая в нашем случае равна 0, и сила со стороны гравитационного поля, создаваемого другими частицами. Уравнение движения элемента объема запишется в виде:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p - \rho\nabla\varphi. \tag{2.6}$$

В данном случае, скорость – функция координат и времени:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t). \tag{2.7}$$

Полный дифференциал скорости $d\vec{v}$:

$$d\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}dz + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}dt. \tag{2.8}$$

Первые три слагаемых отвечают за разность скоростей (в один и тот же момент времени) в двух точках, разделенных расстоянием $d\vec{r}$, которое пройдет рассматриваемая частица (объем) за время dt, последнее слагаемое отвечает за изменение скорости в данной точке пространства. Запишем выражение (2.8) в виде:

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + (d\vec{r}\nabla)\vec{v}. \tag{2.9}$$

Разделим обе части равенства на dt:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}. \tag{2.10}$$

Уравнение (2.6) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\varphi. \tag{2.11}$$

Это уравнение Эйлера.

3 Система уравнений и ее однородное решение

Получившиеся уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\,\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\varphi,\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{v} = 0,\\
&\Delta\varphi = 4\pi G\rho
\end{aligned}$$

при переходе к сферически симметричному и однородному распределению плотности массы преобразуются к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\rho v\right) = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = 4\pi G\rho, \tag{3.3}$$

где $v = v(r,t), \varphi = \varphi(r,t), \rho = \rho(t)$ (так как среда однородна в любой момент времени). В этом случае можно легко проинтегрировать уравнение (3.3) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{4}{3}\pi G\rho r + \frac{C_1(t)}{r^2},\\
\varphi &= \frac{2}{3}\pi G\rho r^2 - \frac{C_1(t)}{r} + C_2(t).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Исследуемая система обладает трансляционной симметрией: мы можем перенести начало отсчета в любую точку пространства, и уравнения не поменяются. В начале отсчета нет неоднородности плотность, поэтому $C_1(t) = 0$. Член $C_2(t)$ отвечает за нормировку потенциала и его можно отбросить, так как потенциал всегда определен с точностью до произвольной постоянной. Окончательное решение уравнения (3.3):

$$\varphi = \frac{2}{3}\pi G\rho r^2. \tag{3.5}$$

Аналогично из уравнения (3.2) можно найти $r^2\rho v$ и выразить v:

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{r^2\rho}\left(\frac{r^3\dot{\rho}}{3} + C(t)\right), \\ v &= -\frac{r\dot{\rho}}{3\rho} - \frac{C(t)}{r^2\rho}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Выбираем $C(t) = 0$, так как мы рассмотриваем однородную среду. Окончательно получаем:

$$v = -\frac{r\dot{\rho}}{3\rho}. \tag{3.7}$$

При подстановке (3.7) и (3.5) уравнение (3.1) преобразуется к виду

$$\frac{\ddot{\rho}}{\rho} - \frac{4}{3}\frac{\dot{\rho}^2}{\rho^2} = 4\pi G\rho. \tag{3.8}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде:

$$\rho = \xi^\beta. \tag{3.9}$$

Подставим (3.9) в уравнение (3.8):

$$\frac{\beta(\beta-1)}{\xi^2}\left(\dot{\xi}\right)^2 + \frac{\beta}{\xi}\ddot{\xi} - \frac{4}{3}\frac{\beta^2}{\xi^2}\left(\dot{\xi}\right)^2 = 4\pi G\xi^\beta. \tag{3.10}$$

Оно содержит два члена с $\left(\dot{\xi}\right)^2$, выберем β таким образом, чтобы они сократились. Для этого необходимо, чтобы:

$$\beta(\beta-1) = \frac{4}{3}\beta^2, \tag{3.11}$$

откуда

$$\beta = -3, \tag{3.12}$$

то есть
$$\rho = \frac{1}{\xi^3}. \tag{3.13}$$

После подстановки $\rho = \frac{1}{\xi^3}$ в уравнение (3.8) получаем:

$$\ddot{\xi} = -\frac{4\pi G}{3}\frac{1}{\xi^2}. \tag{3.14}$$

Умножим его на $\dot{\xi}$ и получим уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{1}{2}d\left(\dot{\xi}^2\right) = \frac{4\pi G}{3}d\left(\frac{1}{\xi}\right), \tag{3.15}$$

решаем его и получаем:
$$\left(\dot{\xi}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{1}{\xi} + \mathrm{const}, \tag{3.16}$$

поделим все на ξ^2:
$$\left(\frac{\dot{\xi}}{\xi}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{1}{\xi^3} + \frac{\mathrm{const}}{\xi^2}. \tag{3.17}$$

С помощью замены $\xi = a(t)\alpha$ приведем уравнение (3.17) к уравнению Фридмана (1.3):
$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3\alpha^3}\frac{1}{a^3} + \frac{æ}{a^2} \tag{3.18}$$

При этом $a(t)$ будем считать безразмерным, тогда пространственная кривизна будет иметь размерность обратного квадрата длины. А множитель α обезразмеривает ξ, поэтому имеет размерность, обратную кубическому корню из плотности (что эквивалентно $M^{-4/3}$). В данном случае плотность энергии ρ из (1.3) равна $\frac{1}{(\alpha a)^3}$ и совпадает с обычной плотностью. В терминах ОТО $a(t)$–масштабный фактор, $H = \frac{\dot{a}}{a}$ – параметр Хаббла. Как мы уже знаем, æ отвечает за пространственную кривизну, которая равна 0, когда простнанство плоское. Мы рассматриваем именно этот случай, поэтому подставим $æ = 0$ в уравнение (3.18):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3\alpha^3}\frac{1}{a^3}, \tag{3.19}$$

решением этого уравнения служит

$$a(t) = \frac{1}{\alpha}\left(6\pi G\right)^{1/3}\left(t - t_0\right)^{2/3} \tag{3.20}$$

где t_0 - произвольная постоянная, выберем $t_0 = 0$. Тогда:

$$a(t) = \frac{1}{\alpha}(6\pi G)^{1/3} \cdot t^{2/3}. \tag{3.21}$$

Параметр Хаббла обратно пропорционален временному масштабу:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3}\frac{1}{t}. \tag{3.22}$$

Зная масштабный фактор, мы можем найти зависимость плотности вещества от времени ($\rho = \frac{1}{(\alpha\xi)^3}$):

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi G}\frac{1}{t^2}. \tag{3.23}$$

Подставляя выражение для ρ в (3.7), получим выражение для скорости, с которой отдаляются друг от друга две материальных точки:

$$v = \frac{2}{3}\frac{r}{t} = rH. \tag{3.24}$$

Она пропорциональна расстоянию между ними r, а коэффициент пропорциональности H – параметр Хаббла. Выражение (3.24) называют законом Хаббла. Подставляя (3.23) в (3.5), получаем выражение для потенциала:

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{9}\frac{r^2}{t^2}. \tag{3.25}$$

Зная потенциал, мы можем выяснить, как он влияет на движение материальных точек, находящихся в поле массивного тела.

4 Движение в поле массивного тела в расширяющейся Вселенной

Рассмотрим движение планеты вокруг массивного тела в потенциале, создаваемом расширяющейся Вселенной. Рассмотрим общее решение уравнения (3.5) для потенциала, при этом будем считать, что $C_2 = 0$, а в начало координат поместим массивное тело, поэтому $\mathrm{C}_1 = MG$. При этом будем пренебрегать влиянием этой массы на плотность окружающей материи ρ. Будем рассматривать моменты времени, далекие от точки сингулярности в потенциале (**??**), и обозначим время через $t+t_1$, где t_1 – большое время начала наблюдения за движением, а t – время, прошедшее с начала наблюдения, которое отсчитывается от нуля. О том, насколько большим должно быть t_1, поговорим после вычислений. Запишем функцию Лагранжа, для планеты с учетом потенциала (3.25):

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m(r\dot{\varphi})^2}{2} + G\frac{mM}{r} - \frac{m}{9}\frac{r^2}{(t+t_1)^2}. \tag{4.1}$$

Уравнения движения планеты имеют вид

$$\begin{aligned} &\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + G\frac{M}{r^2} + \frac{2}{9}\frac{r}{(t+t_1)^2} = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right) = 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

Из второго уравнения видно, что обобщенный импульс этой системы сохраняется:

$$\begin{aligned} mr^2\dot{\varphi} &= L, \\ \dot{\varphi} &= \frac{L}{mr^2}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

откуда

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}. \tag{4.4}$$

Тогда первое уравнение из системы (4.2) приобретает вид:

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3} + \frac{GM}{r^2} + \frac{2}{9}\frac{r}{(t+t_1)^2} = 0. \tag{4.5}$$

Будем решать это уравнение методом последовательных приближений, считая последний член в левой части малым. В этом случае мы приходим к стандартной задаче ньютоновой механики. Рассмотрим круговую орбиту, для которой $\ddot{r} = 0$ в нулевом приближении. Учитывая все вышесказанное в нулевом приближении получаем уравнение

$$\frac{L^2}{m^2r^3} = \frac{GM}{r^2}, \tag{4.6}$$

которое имеет решение

$$r_0 = \frac{L^2}{GMm^2}, \tag{4.7}$$

где r_0 – это радиус круговой орбиты. Теперь добавим к невозмущенному решению $r = r_0$ малую поправку и будем искать решение исходного уравнения в виде $r = r_0 + l(t)$. Тогда уравнение (4.5) приобретает вид:

$$\frac{d^2}{dt^2}(r_0 + l(t)) - \frac{L^2}{m^2(r_0 + l(t))^3} + \frac{GM}{(r_0 + l(t))^2} + \frac{2}{9}\frac{r_0 + l(t)}{(t+t_1)^2} = 0. \tag{4.8}$$

Так как мы рассматриваем отдаленный от Большого взрыва момент времени t_1 и поправка $l(t)$ малая, то величина $\frac{l(t)}{(t+t_1)^2}$ малая более высокого порядка, чем остальные величины и мы можем ей пренебречь. Разложим уравнение в ряд по $l(t)$ и получим уравнение

$$\ddot{l} + \omega_0^2 l + \frac{2}{9}\frac{r_0}{(t+t_1)^2} = 0, \tag{4.9}$$

где $\omega_0 = \frac{L}{mr_0^2}$. Сделаем замену

$$u = l + \frac{2}{9}\frac{r_0}{\omega_0^2(t+t_1)^2} \tag{4.10}$$

и преобразуем уравнение к виду

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u - \frac{2}{9}\frac{6}{\omega_0^2}\frac{r_0}{(t+t_1)^4} = 0. \tag{4.11}$$

Пренебрежем членом $\frac{2}{9}\frac{6}{\omega_0^2}\frac{r_0}{(t+t_1)^4}$, который является малой величиной более высокого поядка. Общее решение уравнения $\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$ представимо в виде

$$u = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t. \tag{4.12}$$

Члены $A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ отвечают за эллиптичность орбиты. Будем считать, что орбита круговая, и выберем $A = 0$ и $B = 0$, тогда $u = 0$. Мы нашли первую поправку к невозмущенному решению (4.7):

$$\Delta r_1 = -\frac{2}{9}\frac{r_0}{\omega_0^2(t+t_1)^2}. \tag{4.13}$$

Аналогично можно вычислить вторую поправку и получить

$$\Delta r_2 = \frac{2}{9}\frac{6}{\omega_0^4}\frac{r_0}{(t+t_1)^4}. \tag{4.14}$$

Суммируем первые две поправки и находим решение задачи в первых двух порядках теории возмущений:

$$r(t) = r_0 + l(t) = \frac{L^2}{GMm^2} - \frac{2}{9}\frac{r_0}{\omega_0^2(t+t_1)^2} + \frac{2}{9}\frac{6}{\omega_0^4}\frac{r_0}{(t+t_1)^4}. \tag{4.15}$$

С момента времени t_1 ($t = 0$) в пределе при $t \to \infty$ радиус орбиты увеличится на величину

$$\Delta r = \frac{2}{9}\frac{r_0}{\omega_0^2(t_1)^2} - \frac{2}{9}\frac{6}{\omega_0^4}\frac{r_0}{(t_1)^4}. \tag{4.16}$$

Величина $\frac{1}{t_1}$ с точностью до множителя $\frac{2}{3}$ совпадает с параметром Хаббла в момент начала наблюдения за движением. Следовательно, если $\omega_0 \gg H(t_1)$, то радиус изменяется мало:

$$\triangle r \sim r_0 \frac{H^2(t_1)}{\omega_0^2}. \tag{4.17}$$

Для современного значения параметра Хаббла ($H_0 = 73\frac{\text{км}}{\text{с}\cdot\text{Мпк}}$) и частоты обращения Земли вокруг Солнца ($\omega_0 = 1.15 \cdot 10^{-5}\frac{1}{c}$) это отношение мало:

$$\frac{H^2(t_1)}{\omega_0^2} \sim 10^{-26}, \tag{4.18}$$

следовательно, расширение Вселенной крайне слабо влияет на движение объектов, связанных силой гравитаци, если частота их обращения превышает параметр Хаббла.

5 Выводы

В результате выполнения работы было описано однородное изотропное пространство, заполненное пылью, и проанализировано движение планеты вокруг массивного тела в таком пространстве.

1. Найден потенциал, создаваемый в однородном и изотропном пространстве, которое заполнено пылью:
$$\varphi = \frac{1}{9}\frac{r^2}{t^2}. \tag{5.1}$$

2. Найдена зависимость плотности частиц в пространстве от времени:
$$\rho = \frac{1}{6\pi G}\frac{1}{t^2}. \tag{5.2}$$
Плотность зависит только от времени, так как рассматривалось однородное пространство.

3. Масштабный фактор $a(t)$ растет с течением времени. С точки зрения ОТО, это говорит о том, что пространство растягивается, все длины увеличиваются. Убывание плотности с течением времени говорит об этом же:
$$a(t) = \frac{1}{\alpha}(6\pi G)^{1/3} \cdot t^{2/3}. \tag{5.3}$$
Вторая производная масштабного фактора отрицательна. Из этого можно сделать вывод, что расширение будет происходить с замедлением:
$$\ddot{a} \sim -\frac{1}{t^{4/3}}. \tag{5.4}$$

4. Найден параметр Хаббла $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)$ и его связь со скоростью радиального движения:
$$\begin{gathered} H = \frac{2}{3}\frac{1}{t}, \\ v = Hr. \end{gathered} \tag{5.5}$$
Наблюдатель в каждой системе отсчета будет видеть, что все точки пространства отдаляются от него со скоростью пропорциональной расстоянию до них. Это утверждение называют законом Хаббла.

5. Рассмотрено движение планеты по круговой орбите в центральном поле силы тяжести в расширяющемся пространстве. Найдено изменение радиуса орбиты за бесконечное время с момента времени t_1:
$$\Delta r = \frac{2}{9}\frac{r_0}{\omega_0^2(t_1)^2} - \frac{2}{9}\frac{6}{\omega_0^4}\frac{r_0}{(t_1)^4} \sim r_0\frac{H^2(t_1)}{\omega_0^2}, \tag{5.6}$$

где r_0 – радиус орбиты в отсутствие расширения пространства, $H(t_1)$ – параметр Хаббла в момент начала наблюдения, ω_0 – частота вращения планеты по орбите. Для современного значения параметра H и частоты обращения Земли вокруг Солнца это изменение очень мало:

$$\begin{gathered} \frac{H^2(t_1)}{\omega_0^2} \sim 10^{-26}, \\ \Delta r \sim 1.5 \cdot 10^{-15} \text{ м.} \end{gathered} \tag{5.7}$$

Влияние расширения Вселенной на гравитационно связанные объекты очень мало, когда частота их обращения много больше параметра Хаббла.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие.: Для вузов. В 10 т. Т. I. Механика.–5-е изд., стереот.–М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

2. Горбунов Д.С., Рубаков В.А. Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего большого взрыва.–М.: Издательство ЛКИ, 2008.–552с.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика.–3-е изд., перераб.–М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т. Т. II. Теория поля.–7-е изд., испр.–М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.