Движение массивного тела в расширяющейся Вселенной: ньютонов подход

Людмила Бишлер

научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, академик
Рубаков Валерий Анатольевич

Май, 2015

Задача

Анализ движения гравитационно связанных объектов в расширяющейся Вселенной. Для этого рассмотрим бесконечное однородное и изотропное пространство, заполненное пылью с нулевым давлением, найдем его потенциал, а затем проанализируем, как этот потенциал влияет на движение планеты в поле тяжести массивного тела.

При решении задачи учитывались особенности современной Вселенной:

1. Однородность и изотропность
2. Расширение
3. Пространственная кривизна, если и отлична от нуля, то мала

Система уравнений и ее однородное решение

Уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \tag{1}$$

уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\rho v\right) = 0, \tag{2}$$

уравнение Пуассона:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = 4\pi G\rho, \tag{3}$$

где $v = v(r,t), \varphi = \varphi(r,t), \rho = \rho(t)$ (так как среда однородна в любой момент времени)

Решая данную систему приходим, у уравнению

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3\alpha^3}\frac{1}{a^3} + \frac{\kappa}{a^2}, \quad (4)$$

где $a(t) = 1/(\alpha\rho^{1/3})$, α – произвольная постоянная. Это уравнение совпадает с уравнением Фридмана:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{æ}{a^2}, \quad (5)$$

где $a(t)$ – масштабный фактор, $\frac{\dot{a}}{a}$ – параметр Хаббла, ρ – плотность энергии, æ – ростоpанственная кривизна. В плоском пространстве $æ = 0$. Тогда

$$a(t) = \frac{1}{\alpha}(6\pi G)^{1/3}(t)^{2/3}, \; H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}, \quad (6)$$

а искомый потенциал равен

$$\varphi = \frac{2}{3}\pi G\rho r^2 = \frac{1}{9}\frac{r^2}{t^2}. \quad (7)$$

Движение планеты в поле тяжести массивного тела

Запишем лагранжиан планеты в расширяющейся Вселенной:

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m(r\dot{\varphi})^2}{2} + G\frac{mM}{r} - \frac{m}{9}\frac{r^2}{(t+t_1)^2}, \tag{8}$$

где t_1 – момент начала наблюдения за движением. Уравнение движения планеты:

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} + \frac{GM}{r^2} + \frac{2}{9}\frac{r}{(t+t_1)^2} = 0, \tag{9}$$

где $L = mr^2\dot{\varphi}$.

Решение уравнения движения

Уравнение

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} + \frac{GM}{r^2} + \frac{2}{9}\frac{r}{(t+t_1)^2} = 0 \tag{10}$$

решаем методом последовательных приближений. В нулевом приближении $\frac{2}{9}\frac{r}{(t+t_1)^2} = 0$ и $\ddot{r} = 0$. Получаем невозмущенное решение

$$r_0 = \frac{L^2}{GMm^2}. \tag{11}$$

Решение в первых двух порядках теории возмущений:

$$r(t) = \frac{L^2}{GMm^2} - \frac{2}{9}\frac{r_0}{\omega_0^2 (t+t_1)^2} + \frac{2}{9}\frac{6}{\omega_0^4}\frac{r_0}{(t+t_1)^4}, \tag{12}$$

где $\omega_0 = \frac{L}{mr_0^2}$.

С момента времени t_1 $(t = 0)$ в пределе при $t \to \infty$ радиус орбиты увеличится на величину

$$\Delta r = \frac{2}{9}\frac{r_0}{\omega_0^2 (t_1)^2} - \frac{2}{9}\frac{6}{\omega_0^4}\frac{r_0}{(t_1)^4} \sim r_0 \frac{H^2(t_1)}{\omega_0^2}. \tag{13}$$

Для современного значения параметра Хаббла и частоты обращения Земли вокруг Солнца изменение радиуса очень мало:

$$\Delta r \sim 1.5 \cdot 10^{-9} \text{ м}. \tag{14}$$

Результаты

В результате выполнения работы найдены:

- потенциал
$$\varphi = \frac{1}{9}\frac{r^2}{t^2}, \tag{15}$$
- зависимость плотности частиц в пространстве от времени
$$\rho = \frac{1}{6\pi G}\frac{1}{t^2}, \tag{16}$$
- масштабный фактор
$$a(t) = \frac{1}{\alpha}(6\pi G)^{1/3} \cdot t^{2/3}, \tag{17}$$

  при этом вторая производная масштабного фактора отрицательна. Из этого можно сделать вывод, что расширение будет происходить с замедлением:
$$\ddot{a} \sim -\frac{1}{t^{4/3}}, \tag{18}$$

- параметр Хаббла $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)$ и его связь со скоростью радиального движения:

$$H = \frac{2}{3}\frac{1}{t}, \qquad v = Hr \text{ (закон Хаббла)}, \tag{19}$$

- изменение радиуса орбиты за бесконечное время с момента времени t_1:

$$\Delta r = \frac{2}{9}\frac{r_0}{\omega_0^2 (t_1)^2} - \frac{2}{9}\frac{6}{\omega_0^4}\frac{r_0}{(t_1)^4} \sim r_0 \frac{H^2(t_1)}{\omega_0^2}. \tag{20}$$

Для современного значения параметра H и частоты обращения Земли вокруг Солнца это изменение очень мало:

$$\frac{H^2(t_1)}{\omega_0^2} \sim 10^{-20}, \qquad \Delta r \sim 1.5 \cdot 10^{-9} \text{ м}. \tag{21}$$

Спасибо за внимание!

Спасибо за внимание!

Однородная и изотропная Вселенная

Метрика Фридмана-Робертсона-Уокера:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j. \qquad (22)$$

Уравнение Фридмана:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{æ}{a^2}, \qquad (23)$$

где $a(t)$ – масштабный фактор, $\frac{\dot{a}}{a}$ – темп расширения Вселенной (параметр Хаббла), ρ – плотность энергии материи, æ – просторанственная кривизна.

Теперь можно выписать окончательное решение начальной системы:

$$\rho = \frac{1}{6\pi G}\frac{1}{t^2}, \tag{24}$$

$$v = -\frac{r\dot{\rho}}{3\rho} = \frac{2}{3}\frac{1}{t}r = Hr, \tag{25}$$

$$\varphi = \frac{2}{3}\pi G\rho r^2 = \frac{1}{9}\frac{r^2}{t^2}, \tag{26}$$

$$a(t) = \frac{1}{\alpha}\left(6\pi G\right)^{1/3}\left(t\right)^{2/3}, \tag{27}$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3}\frac{1}{t} \tag{28}$$

Сделаем замену

$$u = l + \frac{2}{9}\frac{r_0}{\omega_0^2(t+t_1)^2} \tag{29}$$

и преобразуем уравнение (??) к виду

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0, \tag{30}$$

пренебрегая членом $-\frac{2}{9}\frac{6}{\omega_0^2}\frac{r_0}{(t+t_1)^4}$. Решение уравнения (29) представимо в виде:

$$u = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t. \tag{31}$$

Выберем $A = 0$ и $B = 0$, так как мы рассматриваем круговую орбиту. Получаем

$$l = -\frac{2}{9}\frac{r_0}{\omega_0^2(t+t_1)^2} \tag{32}$$

– первая поправка к радиусу. Аналогично вычисляется поправки более старших порядков.