

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Физический Факультет

Кафедра физики частиц и космологии

**Нахождение спектра Е-моды поляризации реликтового
излучения, образованной в эпоху вторичной ионизации,
на малых угловых масштабах для случая
CDM-моды постоянной кривизны**

Курсовая работа
Студентки 2 курса 216 группы
Катышевой Виктории Владимировны

Научный руководитель
Горбунов Дмитрий Сергеевич
Институт Ядерных Исследований РАН

Москва, 2015

Содержание

1. Введение	3
1.1 Моды постоянной кривизны.....	3
1.2 Начальные условия	4
1.3 Первичный спектр	4
1.4 Возмущения до рекомбинации	5
2. Основная часть	6
2.1 Анизотропия реликтового излучения	6
2.2 Поляризация реликтового излучения	7
2.3 Эпоха вторичной ионизации	9
2.4 Доплеровский вклад на больших угловых масштабах	10
2.5 Нахождение спектра Е-моды поляризации	10
3. Заключение	13
4. Список литературы	13

Введение

1.1 Моды постоянной кривизны

Считая, что космическая среда не содержит других компонент кроме барион-электрон-фотонной плазмы, темной материи и нейтрино ее можно охарактеризовать четырьмя параметрами: плотностью энтропии S (температурой), плотностью барионного числа n_B , плотностью частиц темной материи n_{CDM} и плотностью лептонного числа n_L . Таким образом, для задания начальных условий космологических возмущений необходимо задать эти величины как функции координат в заданный момент времени. Удобно разделить возможные начальные данные (а, значит, и моды возмущений) на линейно независимые части: адиабатическую моду и моды постоянной кривизны. Поскольку данная работа посвящена изучению мод постоянной кривизны, на определении адиабатической моды мы останавливаться не будем.

Для барионной и CDM-мод постоянной кривизны глубоко на радиационно-доминированной стадии (РД) возмущения релятивистского вещества отсутствуют, но имеют место неоднородности состава. В случае неоднородности плотности темной материи (при однородной плотности барионного и лептонного чисел) говорят о CDM-моде постоянной кривизны. Так как значения n_B/s и n_{CDM}/s постоянны в пространстве и времени, то CDM-мода постоянной кривизны в формальном пределе $\eta \rightarrow 0$ характеризуется следующими свойствами:

$$\delta_B = 0, \delta_{CDM} \neq 0, \delta T = 0, \text{ где } \delta_B = \frac{\delta n_B}{n_B} = \frac{\delta \rho_B}{\rho_B}, \quad \delta_{CDM} = \frac{\delta n_{CDM}}{n_{CDM}} = \frac{\delta \rho_{CDM}}{\rho_{CDM}}.$$

Название «моды постоянной кривизны» связано с тем, что барионы и темная материя вносят малый вклад в плотность энергии на РД-стадии, поэтому генерируемые ими гравитационные потенциалы также малы. Таким образом, в конформной ньютоновой калибровке можно дать следующее определение мод постоянной кривизны: за горизонтом в них отсутствуют гравитационные потенциалы.

Согласно наблюдениям, во Вселенной имелась только адиабатическая мода, вклад барионной моды и CDM-моды постоянной кривизны составляет лишь несколько процентов.

1.2 Начальные условия

Традиционно при описании начальных условий в случае мод постоянной кривизны вводят величину (для каждой пары компонент):

$$S_{\lambda,\lambda'} \equiv 3(\xi_\lambda - \xi_{\lambda'}) = \frac{\delta_\lambda}{1 + \omega_\lambda} - \frac{\delta_{\lambda'}}{1 + \omega_{\lambda'}}.$$

Здесь величина ξ_λ определяется соотношением $\xi_\lambda = -\Phi + \frac{\delta\rho_\lambda}{3(\rho_\lambda + p_\lambda)}$ и

является постоянной за горизонтом. Для удобства будем рассматривать пары (λ, γ) , где $\lambda = CDM$, $\lambda' = \gamma$, т.е. $S_{CDM,\gamma}$. Таким образом, рассматриваемые

CDM-моды постоянной кривизны за горизонтом характеризуются

отличными от нуля и не зависящими от времени значениями величин:

$$S_{CDM} = \delta_{CDM} - \frac{3}{4}\delta_\gamma.$$

При этом для возмущений плотности энтропии s справедливо соотношение

$$\frac{\delta s}{s} = \frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = \frac{3}{4}\delta_\gamma.$$

Тогда величину S_{CDM} можно представить в виде:

$$S_{CDM} = \frac{\delta(n_{CDM}/s)}{(n_{CDM}/s)}. \quad (1)$$

1.3 Первичный спектр

Величина S , определяемая соотношением (1), является случайным гауссовым полем, поэтому имеет место представление

$$\langle S(k)S(k') \rangle = \frac{P_S(k)}{(2\pi)^3} \delta(k + k'),$$

где $P_S(k)$ -спектр мощности. Удобно также ввести величину:

$$P_S(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_s(k).$$

Из наблюдений следует, что начальный спектр скалярных возмущений близок к плоскому. В такой ситуации удобно использовать степенную параметризацию, которую для мод постоянной кривизны записывают следующим образом:

$$P_S(k) = A_S \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1} \quad (2)$$

Где k_* - некоторое фиксированное значение импульса¹,

¹ В обработке данных эксперимента WMAP принят выбор $k_*/a_0 = 0,002 \text{ Мпк}^{-1}$.

$(n_s - 1)$ – наклон спектра ², а величина $A_S = P_S(k_*)$ – это мощность при $k = k_*$.

1.4 Возмущения до рекомбинации

Обсудим поведение CDM-моды постоянной кривизны за горизонтом. В этом режиме постоянные величины ξ_λ равны

$$\xi_{CDM} = -\Phi + \frac{1}{3}\delta_{CDM} = \frac{1}{3}\delta_{CDM(i)}, \quad (3.a)$$

$$\xi_B = -\Phi + \frac{1}{3}\delta_B = 0, \quad \xi_\gamma = -\Phi + \frac{1}{4}\delta_\gamma = 0, \quad (3.b)$$

$$\xi_{rad} = -\Phi + \frac{1}{4}\delta_{rad} = 0.$$

Отметим, что из системы (3) следуют данные равенства:

$$\delta_{CDM(i)} = S_{CDM} = const \text{ и} \quad (4)$$

$$\delta_\gamma = 4\Phi. \quad (5)$$

Найдем гравитационный потенциал для мод за горизонтом. Для этого воспользуемся линеаризованным уравнением Эйнштейна

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi Ga^2 \cdot \sum_\lambda \delta\rho_\lambda \text{ в пределе } k \rightarrow 0.$$

С учетом (3) его можно переписать в виде:

$$3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi + 4\pi Ga^2\rho_{rad} \cdot 4\Phi + 4\pi Ga^2\rho_M \cdot 3\Phi = -4\pi Ga^2\rho_{CDM}\delta_{CDM(i)}. \quad (6)$$

Как показано в [1], с учетом приближений и уравнения Фридмана получим решение этого уравнения для пылевидной стадии:

$$\Phi = -\frac{1}{5} \frac{\rho_{CDM}}{\rho_M} \delta_{CDM(i)}. \quad (7)$$

То есть гравитационный потенциал постоянен. Соотношение (7) и равенство (5) дают гравитационный потенциал и возмущение фотонной компоненты в эпоху рекомбинации для мод, которые тогда еще находятся за горизонтом.

² При $n_s = 1$ спектр является плоским.

Основная часть

2.1 Анизотропия реликтового излучения

После рекомбинации Вселенная становится почти прозрачной для фотонов первичной плазмы. Так происходит потому, что Вселенная расширяется, температура падает, и в какой-то момент не находится достаточно энергичного фотона для того, чтобы «разбить» образовавшийся атом водорода.

Эти фотоны сохранились до наших дней и наблюдаются в виде реликтового излучения. Измерение характеристик реликтового излучения позволяет получить информацию о Вселенной эпохи рекомбинации. Кроме того, эти фотоны несут информацию также и о более поздних этапах развития Вселенной, так как на их распространение влияли процессы, связанные с образованием структур.

В данной работе будет рассматриваться приближение мгновенного отщепления фотонов. С физической точки зрения это означает, что фотоны первичной плазмы описываются в рамках приближения идеальной жидкости вплоть до отщепления от электронов и барионов в самом конце эпохи рекомбинации. Как было показано в [1], в рамках этого приближения выражение для флуктуации измеряемой температуры реликтового излучения имеет вид:

$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}, \eta_0) = \frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta_r) + (\Phi(\eta_r) - \Phi(\eta_0)) + \quad (8.a)$$

$$+ \int_{\eta_r}^{\eta_0} (\Phi' - \Psi') d\eta + \quad (8.б)$$

$$+ \mathbf{n} \mathbf{v}(\eta_r) - \mathbf{n} \mathbf{v}(\eta_0). \quad (8.в)$$

В этой формуле η_r -момент испускания фотона, \mathbf{n} -направление движения фотона, а интеграл берется вдоль мировой линии фотона.

Выражение (8.a) называют эффектом Сакса-Вольфе. Второе слагаемое в нем – это изменение частоты фотона вследствие изменения гравитационного потенциала Φ между точками испускания и поглощения фотона. В дальнейшем примем $\Phi(\eta_0) = 0$.

Вклад (8.б) также обусловлен изменением частоты фотона из-за гравитационных потенциалов, на этот раз изменяющихся со временем. Это можно представить так: если фотон пересекает область с отрицательным гравитационным потенциалом, то вначале он «падает» в меньшую гравитационную яму, чем та, из которой он будет «выбираться». Фотон теряет энергию, а значит, его частота уменьшается. Это явление имеет

название интегрального эффекта Сакса-Вольфе.

Наконец, первое слагаемое в (8.в) обусловлено эффектом Доплера: свободные электроны конца эпохи рекомбинации, на которых происходило последнее рассеяние реликтовых фотонов, движутся относительно конформно-ньютоновой системы отсчета со скоростью $\mathbf{v}(\eta_r)$. Второе слагаемое в (8.в) учитывает аналогичное по физике влияние на анизотропию: появление дипольной компоненты из-за движения наблюдателя со скоростью $\mathbf{v}(\eta_0)$ относительно реликтового излучения. Данный вклад не несет в себе космологически важной информации.

С учетом сделанных замечаний будем использовать формулу:

$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}, \eta_0) = \frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta_r) + \Phi(\eta_r) + \quad (9.a)$$

$$+ \int_{\eta_r}^{\eta_0} (\Phi' - \Psi) d\eta + \quad (9.б)$$

$$+ \mathbf{n} \mathbf{v}(\eta_r). \quad (9.в)$$

Формула (9), однако, не учитывает того, что у фотона есть вероятность рассеяться на ионизованном газе в эпоху образования первых звезд $z \sim 10$.

Из (5) получим, что эффект Сакса-Вольфе для мод постоянной кривизны, загоризонтных в эпоху рекомбинации, дает следующий вклад в анизотропию реликтового излучения:

$$\Theta_0(\mathbf{n}) = \frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta_r) + \Phi(\eta_r) = 2\Phi(\eta_r), \quad (10)$$

где $\Phi(\eta_r)$ выражается через начальное данное S согласно (4) и (7).

2.2 Поляризация реликтового излучения

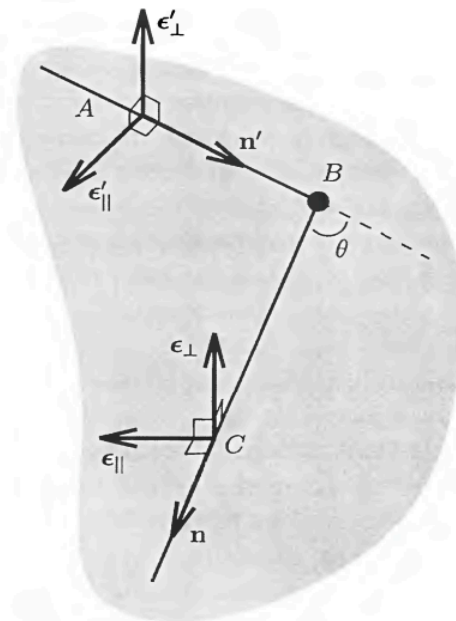


Рис. 1 Схематическое изображение рассеяния фотона на электроне

Последнее рассеяние фотонов на свободных электронах в конце эпохи рекомбинации является комптоновским и приводит к возникновению линейной поляризации. Для такого случая справедливо соотношение (см. Рис.1):

$$\mathbf{E} = C[\mathbf{E}' - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{nE}')] , \quad (11)$$

где в терминах электромагнитного поля \mathbf{E} - электрическое поле рассеянной волны, \mathbf{E}' - поле падающей волны, \mathbf{n} - направление движения рассеянного фотона.

Будем рассматривать неполяризованное излучение, приходящее к месту последнего рассеяния вдоль направления \mathbf{n}' и рассеянное в направлении на наблюдателя \mathbf{n} . Выберем на сфере последнего рассеяния базис, состоящий из векторов \mathbf{e}_a и запишем соотношение (11) в виде $E_a = C\mathbf{e}_a \mathbf{E}'$, где C - константа не зависящая от направления вектора \mathbf{n}' . Для квадратичных по полям выражений, определяющих компоненты поляризационного тензора, в ортонормированном базисе имеем (с учетом $\mathbf{E}' \perp \mathbf{n}'$):

$$\langle E'_i E'_j \rangle = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - n'_i n'_j) \langle \mathbf{E}'^2 \rangle, \quad (12)$$

При этом поляризационные свойства излучения в общем случае характеризуются эрмитовым тензором $I_{ab} = \langle E_a E_b^* \rangle$. Полная интенсивность излучения: $I = \langle E_a E_a^* \rangle = \langle |E_1|^2 \rangle + \langle |E_2|^2 \rangle$. Введем безразмерный тензор поляризации: $\mathbf{P}_{ab} = \frac{I_{ab}}{I}$. Вместо него часто бывает удобно использовать бесследовый тензор:

$$P_{ab} = P_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} = \frac{1}{\langle E_a E_a^* \rangle} \left(\langle E_a E_b \rangle - \frac{1}{2} \langle E_c E_c^* \rangle g_{ab} \right). \quad (13)$$

Здесь считается, что небесная сфера имеет единичный радиус, а также введена метрика g_{ab} на этой сфере.

Как было показано в [1], поляризационный тензор реликтового излучения в современную эпоху может быть представлен в виде:

$$P_{ab}(\eta_0; \mathbf{n}) = \frac{3}{4\pi} \int d\mathbf{n}' \left[\frac{1}{2} (1 - (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2) g_{ab} - \mathbf{n}' \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}' \mathbf{e}_b \right] \int d\eta V(\eta_0, \eta) \frac{\delta T}{T}(\eta, \mathbf{x}; \mathbf{n}'), \quad (14)$$

где η - момент времени последнего рассеяния, η_0 - современное время регистрации фотона; доля фотонов, зарегистрированных в момент η_0 и испытавших рассеяние в интервале $(\eta, \eta + d\eta)$ равна $V(\eta_0, \eta) d\eta$, где $V(\eta_0, \eta)$ -

функция прозрачности, для которой выполняется нормировка $\int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta_0, \eta) = 1$.

Для скалярных возмущений флуктуация температуры фотонов, распространяющихся в направлении \mathbf{n}' в точке \mathbf{x} расположения рассеивающего электрона в момент рассеяния η определяется интегралом

$$\frac{\delta T}{T}(\eta, \mathbf{x}; \mathbf{n}') = \int d\eta' V(\eta, \eta') \int d^3k \left[\Phi(\eta') + \frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta') + i\mathbf{k}\mathbf{n}'v_B(\eta') \right] e^{i[\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathbf{k}\mathbf{n}'(\eta - \eta')]} . \quad (15)$$

Эти фотоны предпоследний раз рассеиваются в разные моменты η' , а доля фотонов, испытавших рассеяние в интервале времени $(\eta', \eta' + d\eta')$ равна, соответственно, $V(\eta, \eta')d\eta'$.

Из (15) видно, что в случае вклада скалярных возмущений, образующегося в эпоху рекомбинации, в (14) входит двойной интеграл

$$\int_0^{\eta_0} d\eta V(\eta_0, \eta) e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}(\eta_0 - \eta)} \int_0^{\eta} d\eta' V(\eta, \eta') e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n}'(\eta - \eta')} f(\eta'), \quad (16)$$

где $f(\eta')$ - медленно меняющаяся функция.

2.3 Эпоха вторичной ионизации

Существенным процессом для формирования картины поляризации реликтового излучения на больших угловых масштабах является рассеяние фотонов в пострекомбинационной Вселенной. Как уже было отмечено в разделе 2.1, сразу после рекомбинации прозрачность Вселенной для фотонов весьма высока. Однако впоследствии водород во Вселенной вновь ионизируется, и прозрачность падает. Ожидается, что такая вторичная ионизация Вселенной происходила на этапе с красным смещением $z = z_{rei} \sim 10$. Часть реликтовых фотонов перерассеялась на свободных электронах, вновь появившихся во Вселенной. Вероятность перерассеяния фотона при этом равна $(1 - e^{-\tau})$, где $\tau = \sigma_T \int dt \cdot n_e$ - оптическая толщина, n_e - плотность свободных электронов, а интегрирование ведется вдоль траектории фотона. Вероятность не рассеяться для фотона в эту эпоху равна $e^{-\tau_{rei}}$, где τ_{rei} имеет смысл оптической толщи фотона во вторично ионизованной Вселенной. При $z = z_{rei}$ рассеяние в конкретном месте во Вселенной испытывают фотоны, которые были испущены в эпоху рекомбинации со сферы размера $(\eta_{rei} - \eta_r) \approx \eta_{rei}$. Из наблюдательных данных [2] оптическая толщина $\tau_{rei} = 0,084 \pm 0,016$, что соответствует $z_{rei} = 10,8 \pm 1,4$. В дальнейшем положим $\tau_{rei} \approx 0,08$ и $z_{rei} \sim 10$. Таким образом, в интеграле (16) будет фигурировать $\eta = \eta_{rei}$, а $\eta' \sim \eta_r$, так что (16) будет равно

$$\tau_{rei} \cdot e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}(\eta_0 - \eta_{rei})} \cdot e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n}'(\eta_{rei} - \eta_r)} f(\eta_r). \quad (17)$$

2.4 Доплеровский вклад на больших угловых масштабах

Отдельно убедимся в том, что вкладом Доплера в (15) можно пренебречь. Как следует из (9.в), соответствующий вклад в анизотропию пропорционален скорости $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_{B\gamma}$ барион-фотонной компоненты. Запишем линеаризованные законы сохранения тензора энергии-импульса:

$$\delta\rho_\lambda' + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) - (\rho_\lambda + p_\lambda)(k^2 v_\lambda + 3\Phi') = 0, \quad (18)$$

$$\left[(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda\right]' + 4\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda + \delta p_\lambda + (\rho_\lambda + p_\lambda)\Phi = 0. \quad (19)$$

Из них и постоянства гравитационного потенциала следует, что скорости для загоризонтных мод малы. Поэтому доплеровским вкладом в анизотропию реликтового излучения действительно можно пренебречь.

Малость доплеровского вклада в анизотропию при малых l показана на Рис.2.

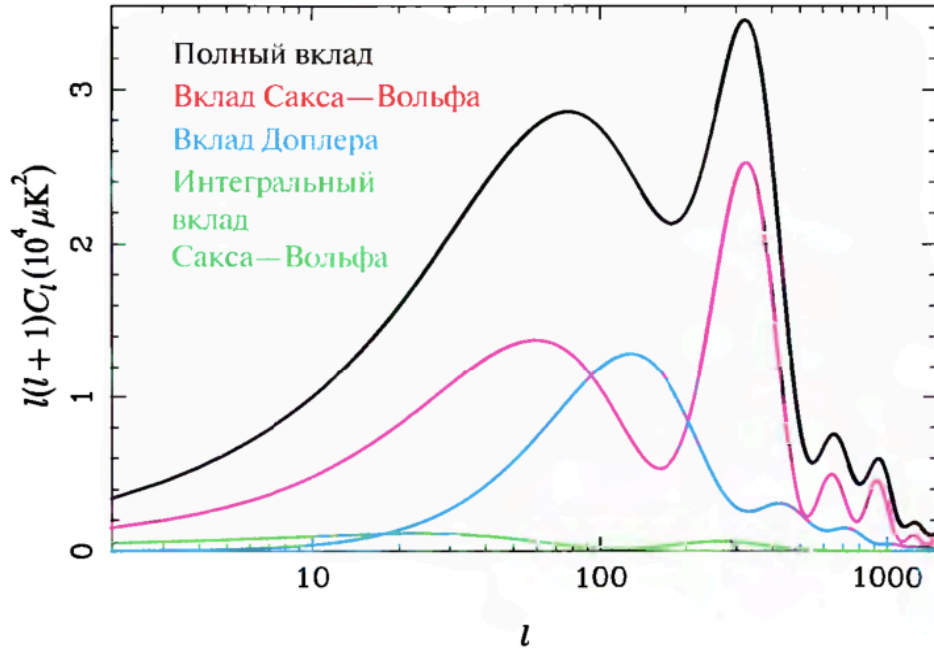


Рис. 2 Картина анизотропии реликтового излучения в модели с возмущениями постоянной кривизны. Спектр первичных возмущений выбран плоским.

2.5 Нахождение спектра Е-моды поляризации

Исходя из (14) и (17) и пренебрегая доплеровским вкладом во флуктуации температуры получим:

$$P_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = \frac{3\tau_{rei}}{4\pi} e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}(\eta_0 - \eta_r)} \int d\mathbf{n}' e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n}'(\eta_{rei} - \eta_r)} \left[\Phi(\eta_r) + \frac{1}{4} \delta_\gamma(\eta_r) \right] \times \\ \times \left[\frac{1}{2} (1 - (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2) g_{ab} - \mathbf{n}' \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}' \mathbf{e}_b \right]. \quad (20)$$

Приближенно можно считать $(\eta_{rei} - \eta_r) \cong \eta_{rei}$.

Таким образом, как показано в [1], получим в сферических координатах:

$$P_{\theta\theta}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = -\frac{P_{\phi\phi}(\mathbf{k}, \mathbf{n})}{\sin^2 \theta} = \frac{3\tau_{rei}}{2} \sin^2 \theta \cdot \left(\Phi + \frac{1}{4} \delta_\gamma \right) j_2[k(\eta_{rei} - \eta_r)] e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}(\eta_0 - \eta_{rei})}. \quad (21)$$

Спектр поляризации реликтового излучения определяется зависимостью мультиполей C_l^{EE} от величины l , где l - гармоники, а индекс EE означает, что мы рассматриваем чистый спектр Е-моды поляризации.

Основной вклад в мультиполи C_l^{EE} дают моды с импульсом $k \sim l/\eta_0$, так что в аргументе сферической функции Бесселя j_2 в (19) будет стоять $k\eta_{rei} \sim l\eta_{rei}/\eta_0$. Эта величина не должна значительно превышать единицу, поскольку в асимптотике большого аргумента сферические функции Бесселя подавлены. Именно поэтому вклад в поляризацию, возникающий в эпоху вторичной ионизации, существенен только для младших гармоник [1] $l < l_{rei} = \pi\eta_0/\eta_{rei} \cong 9$.

Снова воспользуемся результатами, приведенными в [1]. В общем случае выражение для мультиполя будет иметь вид:

$$C_l^{EE} = \frac{1}{2l+1} \int d^3k \sum_m \langle a_{lm}^E(\mathbf{k}) a_{lm}^{E*}(\mathbf{k}) \rangle \quad (22)$$

где коэффициенты выражаются формулой:

$$a_{lm}^E(\mathbf{k}) = -\int d\mathbf{n} Y_{lm}^{(E)ab*} P_{ab}(\mathbf{n}) = -\int d\mathbf{n} \left[Y_{lm,\theta\theta}^{(E)*} P_{\theta\theta}(\mathbf{n}) + Y_{lm,\phi\phi}^{(E)*} \frac{P_{\phi\phi}(\mathbf{n})}{\sin^4 \theta} \right]. \quad (23)$$

Здесь считается, что Е-моды на сфере удобно разложить по сферическим гармоникам, и имеет место соотношение:

$$Y_{lm,ab}^{(E)}(\mathbf{n}) = \sqrt{\frac{(l-2)!}{2(l+2)!}} \begin{pmatrix} W_{lm}(\mathbf{n}) & X_{lm}(\mathbf{n}) \sin \theta \\ X_{lm}(\mathbf{n}) \sin \theta & -W_{lm}(\mathbf{n}) \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (24)$$

С учетом (10), (21) и (24) получим:

$$a_{lm}^E(\mathbf{n}) = 3\tau_{rei} \cdot 2\Phi \cdot j_2(k\eta_{rei}) \cdot \sqrt{\frac{(l-2)!}{2(l+2)!}} \int d\mathbf{n}' e^{i\mathbf{k}(\eta_0 - \eta_{rei})\cos\theta} \sin^2 \theta \left[2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (l+1)l \right] Y_{lm}(\mathbf{n}'). \quad (25)$$

Абсолютно аналогично тому, как это было проделано в [1] получаем:

$$a_{lm}^E(\mathbf{k}) = -\delta_{m,0} \cdot 12\pi \cdot \tau_{rei} \Phi \cdot j_2[k\eta_{rei}] \sqrt{\frac{(l+2)!}{2(l-2)!}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \cdot i^l \cdot \frac{j_l[(\eta_0 - \eta_{rei})k]}{(\eta_0 - \eta_r)^2 k^2}. \quad (26)$$

Перемножив $a_{lm}^E(\mathbf{k})a_{lm}^{E*}(\mathbf{k})$ имеем:

$$a_{lm}^E(\mathbf{k})a_{lm}^{E*}(\mathbf{k}) = (12\pi \cdot \tau_{rei})^2 \Phi^2 \cdot j_2^2[k\eta_{rei}] \frac{(l+2)!}{2(l-2)!} \cdot \frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{j_l^2[(\eta_0 - \eta_{rei})k]}{(\eta_0 - \eta_{rei})^4 k^4} . \quad (27)$$

Тогда, учитывая (4) и (7) запишем результат:

$$C_l^{EE} = 18\pi \cdot \tau_{rei}^2 \frac{(l+2)!}{(l-2)!} \int \frac{dk}{k} P_S \cdot j_2^2(k\eta_{rei}) \cdot \frac{j_l^2[(\eta_0 - \eta_{rei})k]}{(\eta_0 - \eta_{rei})^4 k^4} . \quad (28)$$

При этом в области $l \gg \pi\eta_0/\eta_{rei}$ интеграл можно взять аналитически. Для сферических функций Бесселя можно воспользоваться асимптотиками

$$j_l(x) \approx \frac{\sin(x - \pi l/2)}{x} \text{ и } j_l(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{[x^2 - (l+1/2)^2]} \times \\ \times \cos \left[\sqrt{x^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2} - \left(l + \frac{1}{2}\right) \arccos\left(\frac{l+1/2}{x}\right) - \frac{\pi}{4} \right] ,$$

а также все быстроосциллирующие множители заменить на их средние по периоду, т.е.

$$j_2^2(k\eta_{rei}) \cong \frac{1}{2(k\eta_{rei})^2}, \quad j_l^2[(\eta_0 - \eta_{rei})k] \cong \frac{1}{2(\eta_0 - \eta_{rei})k} \frac{1}{\sqrt{(\eta_0 - \eta_{rei})^2 k^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}} .$$

В случае масштабно-инвариантного спектра, $P_S(k) = A_S$, получим для (28) приближенную оценку.

$$C_l^{EE} = \tau_{rei}^2 \cdot A_S \cdot \frac{18}{4} \pi \cdot \frac{(l+2)!}{(l-2)!} \frac{1}{\left(l + \frac{1}{2}\right)^8} \left(\frac{\eta_0}{\eta_{rei}} - 1\right)^2 \int_1^\infty \frac{du}{u^8 \sqrt{u^2 - 1}} \cong \\ \cong \tau_{rei}^2 \cdot A_S \cdot \frac{72}{35} \pi \left(\frac{\eta_0}{\eta_{rei}} - 1\right)^2 \frac{1}{l^4} \cong 2\pi \cdot \tau_{rei}^2 \cdot A_S \cdot \left(\frac{\eta_0}{\eta_{rei}} - 1\right) \frac{1}{l^4} .$$

Заключение

Из полученной оценки видно, что $C_l^{EE} \propto l^{-4}$, значит, данный вклад падает с ростом l довольно быстро. Значит, вклад вторичной ионизации в поляризацию реликтового излучения имеет место преимущественно на младших гармониках, т.е. довольно больших угловых масштабах.

Список литературы

- [1] *Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков* Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения. Инфляционная теория. –М.:Красанд,2010. -568с.,цв.вкл.
- [2] *Komatsu E et al.* [WMAP Collaboration] // *Astrophys. J. Suppl.* 2009. **180**. 330 (arXiv:0803.0547 [astro-ph]).
- [3] *Challinor A.* Constraining fundamental physics with the cosmic microwave background: Доклад на конференции International Scientific Workshop on Cosmology and Gravitational Physics, Thessaloniki, Greece, 15-16 Dec 2005. [http://www.astro.auth.gr/Cosmology05\(arXiv:astro-ph/0606548\)](http://www.astro.auth.gr/Cosmology05(arXiv:astro-ph/0606548)).