

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Курсовая работа  
Сигнал зарождения горячей Вселенной  
в реликторых гравитационных волнах

Автор:  
Студент 207 группы  
Корнеев Д.С.

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н.  
Горбунов Д.С.

Москва 2015

# 1 Введение

По современным представлениям Вселенная после окончания инфляционной эпохи, до разогрева, была заполнена частицами — так называемыми инфлатонами. Как и в любом поле, в поле инфлатона существовали пространственные неоднородности. В областях, где этих частиц чуть больше, гравитационный потенциал также немного больше. Тогда туда из других областей начинают стягиваться частицы, тем самым только увеличивая этот потенциал. Таким образом, неоднородности становятся все больше, и частицы собираются в гало.

Можно рассмотреть модель, в которой пространственные неоднородности объединяются с другими в двойные системы и, вращаясь друг вокруг друга, излучают гравитационные волны. При этом под действием гравитационных сил гало постепенно сближаются и сливаются воедино. Как раз в этот период в виде гравитационных волн излучается наибольшая энергия.

Эту гипотезу можно проверить экспериментально. Излученные гравитационные волны доживают до наших дней и могут быть зарегистрированы в следующем поколении экспериментов. Таким образом, возможны экспериментальные исследования процессов в послеинфляционную эпоху. В данной работе рассматривается модель, описанная выше, и оценивается спектр реликтовых гравитационных волн.

## 2 Определение интенсивности излучения двойной системы неточечных масс

В работе [2] подробно описано нахождение интенсивности излучения гравитационных волн от двойной системы точечных объектов, двигающихся вокруг общего центра масс по эллиптическим орбитам. Расчитаем по аналогии, какой будет интенсивность излучения в случае неточечных объектов с гауссовым распределением плотности массы.

Как известно, тензор квадрупольного момента масс вычисляется по формуле

$$D_{\alpha\beta} = \int_V \rho(r')(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) dV,$$

где  $r$  — расстояние от центра масс системы до точки объема  $dV$ ;  $x_\alpha$ ,  $x_\beta$  — его проекции на оси системы координат.

Учитывая, что система состоит из двух объектов, перепишем формулу для тензора квадрупольного момента в виде:

$$D_{\alpha\beta} = \int_{V_1} \rho(r')[3(d-r')_\alpha (d-r')_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}] dV + \int_{V_2} \rho(r')[3(l-r')_\alpha (l-r')_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}] dV.$$

Выберем систему координат таким образом, чтобы движение объектов происходило только в плоскости  $XY$ . Тогда очевидно, что все компоненты тензора квадрупольного момента, в которых есть хотя бы один индекс  $z$  обнуляются. Найдем остальные компоненты:

$$D_{xx} = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{V_1} \rho_1(r')[3(d+r' \cos \alpha)(d+r' \cos \alpha) - (r'^2 + d^2 + 2dr' \cos \alpha)] dV + \\ + \int_0^{2\pi} d\beta \int_{V_2} \rho_2(r')[3(d+r' \cos \beta)(d+r' \cos \beta) - (r'^2 + d^2 + 2dr' \cos \beta)] dV.$$

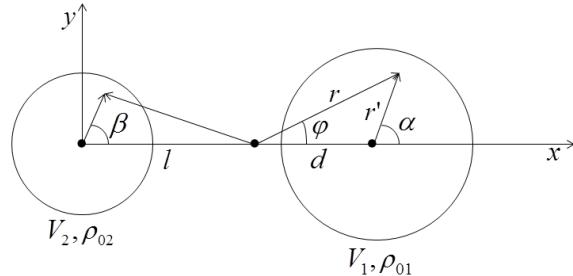


Рис. 1. Двойная система гало

Далее, подставляя  $\rho_i(r') = \rho_{0i} e^{-\frac{r'^2}{r_0^2}}$ , где  $r_0$  — характерный размер системы, получим выражение:

$$D_{xx} = 4\pi \rho_{01} d^2 \int_{V_1} e^{-\frac{r'^2}{r_0^2}} dV - \pi \rho_{01} \int_{V_1} e^{-\frac{r'^2}{r_0^2}} r'^2 dV + 4\pi \rho_{02} l^2 \int_{V_2} e^{-\frac{r'^2}{r_0^2}} dV - \pi \rho_{02} \int_{V_2} e^{-\frac{r'^2}{r_0^2}} r'^2 dV.$$

Замечая, что  $dV = d(\frac{4}{3}\pi r'^3) = 4\pi r'^2 dr'$ , имеем:

$$D_{xx} = 16\pi^2 \rho_{01} d^2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r'^2}{r_0^2}} r'^2 dr' - 4\pi^2 \rho_{01} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r'^2}{r_0^2}} r'^4 dr' + 16\pi^2 \rho_{02} l^2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r'^2}{r_0^2}} r'^2 dr' - 4\pi^2 \rho_{02} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r'^2}{r_0^2}} r'^4 dr'.$$

Далее воспользуемся тем, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^4 dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}.$$

Интегрирование будем вести от 0 до  $+\infty$ , поскольку скорость убывания плотности по мере удаления от центра очень велика, и интегрирование в таких пределах не внесет значительных изменений. В итоге получим:

$$D_{xx} = 4\pi^{5/2} \rho_{01} d^2 r_0^3 - \frac{3}{2} \pi^{5/2} \rho_{01} r_0^5 + 4\pi^{5/2} \rho_{02} l^2 r_0^3 - \frac{3}{2} \pi^{5/2} \rho_{02} r_0^5. \quad (1)$$

Теперь вспомним, что при движении двух массивных объектов вокруг общего центра масс их удаление от центра масс вычисляется по формулам:

$$d = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad l = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Также из законов Кеплера известно, что

$$\dot{\varphi} = \frac{(1 + \varepsilon \cos \varphi) \sqrt{G(m_1 + m_2)a(1 - \varepsilon^2)}}{a^2(1 - \varepsilon^2)^2}, \quad (2)$$

где  $m_{1,2}$  — массы объектов,  $a$  — большая полуось эллипса,  $\varepsilon$  — эксцентриситет,  $\varphi$  — угол между радиус-вектором центра объекта относительно центра масс системы и осью  $0X$  (см. рис.2),  $G$  — гравитационная постоянная.

Подставляя выражения для  $d$  и  $l$  в (1) и дифференцируя получившееся выражение три раза по времени, используя (2), получим:

$$\ddot{D}_{xx} = \frac{8\pi^{5/2} G^{3/2}}{a^{5/2} (1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \cdot \frac{\rho_{01} m_2^2 + \rho_{02} m_1^2}{(m_1 + m_2)^{1/2}} \cdot r_0^3 \varepsilon \sin \varphi (1 + \varepsilon \cos \varphi).$$

Аналогичным образом вычисляются и другие ненулевые компоненты тензора квадрупольного момента масс:  $D_{xy}$ ,  $D_{yx}$ ,  $D_{yy}$ , а также их третьи производные по времени:

$$\ddot{D}_{xy} = \ddot{D}_{yx} = \ddot{D}_{yy} = \frac{4\pi^{5/2} G^{3/2}}{a^{5/2} (1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \cdot \frac{\rho_{01} m_2^2 + \rho_{02} m_1^2}{(m_1 + m_2)^{1/2}} \cdot r_0^3 \varepsilon \sin \varphi (1 + \varepsilon \cos \varphi).$$

Согласно общей теории относительности, интенсивность излучения гравитационных волн можно найти по формуле:

$$I = -\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} D_{\alpha\beta}^2 = \frac{G}{45c^5} [\ddot{D}_{xx}^2 + \ddot{D}_{xy}^2 + \ddot{D}_{yx}^2 + \ddot{D}_{yy}^2].$$

Тогда для интенсивности в зависимости от угла  $\varphi$  имеем:

$$I(\varphi) = \frac{112\pi^5 G^4}{45c^5} \cdot \frac{(\rho_{01}m_2^2 + \rho_{02}m_1^2)^2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{\varepsilon^2 r_0^6}{a^5(1 - \varepsilon^2)^5} \cdot (\sin \varphi + \varepsilon \sin \varphi \cos \varphi)^2. \quad (3)$$

Для нахождения средней интенсивности излучения за один период проинтегрируем (3) по  $\varphi$  в пределах от 0 до  $2\pi$ :

$$\langle I \rangle_T = \frac{112\pi^6 G^4}{45c^5} \cdot \frac{r_0^6 \varepsilon^2 (1 + \frac{\varepsilon^2}{4})}{a^5 (1 - \varepsilon^2)^5} \cdot \frac{(\rho_{01}m_2^2 + \rho_{02}m_1^2)^2}{m_1 + m_2}. \quad (4)$$

Далее будем обозначать  $\langle I \rangle_T$  просто как  $I$ .

Теперь можно найти всю энергию, излученную системой в виде гравитационных волн в течение всей ее эволюции. За время  $dt$  система, очевидно, излучает энергию

$$dE = Idt,$$

Тогда вся энергия

$$E = \int_0^{t_0} I dt,$$

где  $t_0$  — время существования системы.

Для упрощения расчетов будем считать, что  $I(t) = const$ , в таком случае

$$E = I \int_0^{t_0} dt = It_0.$$

Теперь требуется оценить время существования системы.

### 3 Оценка времени существования системы

Вращаясь вокруг общего центра масс, гало постоянно обмениваются массой: маленькая постепенно "перетекает" на большую. Таким образом, система эволюционирует, излучая гравитационные волны, и превращается в один эллипсоидальный объект, не излучающий волн. Посчитаем время этого процесса.

Будем считать, что за один период обращения область пересечения (см. рис.2) переходит полностью к массе  $m_1$ . Это изменение массы

$$\Delta m = \frac{1}{2} \rho_{01} \int_{\frac{OB}{r_0}}^{+\infty} e^{-\frac{r'^2}{r_0^2}} dV + \frac{1}{2} \rho_{01} \int_{\frac{OD}{r_0}}^{+\infty} e^{-\frac{r'^2}{r_0^2}} dV.$$

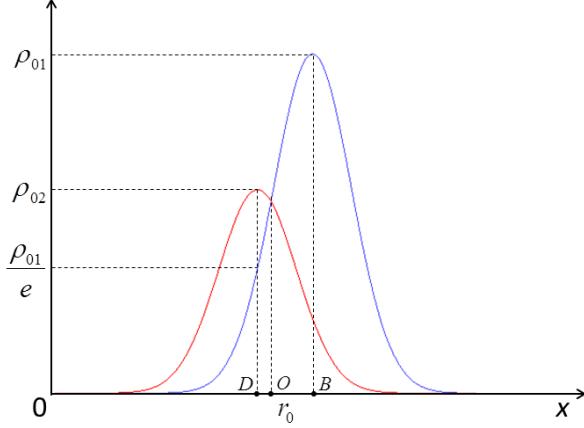


Рис. 2. Пространственное распределение плотности в гало

Очевидно, что плотность первого гало в центре второго составляет  $\frac{\rho_{01}}{e}$ . Поэтому, согласно нашему предположению, если  $\rho_{02} < \frac{\rho_{01}}{e}$ , то вся система просуществует всего один период. Из рисунка видно, что  $\rho_{02} \cdot e^{-\frac{OD^2}{r_0^2}} = \rho_{01} \cdot e^{-\frac{OB^2}{r_0^2}}$ . Кроме того,  $OB + OD = r_0$ . Из этих уравнений находим, что  $OB = \frac{1}{2}r_0 \left(1 + \ln \frac{\rho_{01}}{\rho_{02}}\right)$ . Предполагая, что  $\rho_{02} = \frac{\rho_{01}}{e}$  (если  $\rho_{02}$  еще меньше, что время существования — один период), находим

$$\Delta m \approx 2.26\pi\rho_{01}r_0^3$$

Такая масса перейдет от  $m_2$  к  $m_1$  за один период. Общее же количество периодов, за которые  $m_2$  полностью "перетечет" в  $m_1$ , равно

$$N_T \approx \frac{m_1}{\Delta m} = \frac{\sqrt{\pi}}{2.26}.$$

Тогда время существования системы:

$$t_0 = T \cdot N_T = \frac{S}{\sigma} N_T,$$

где  $\sigma = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi}$  — секторная скорость,  $S$  — площадь эллипса, по которому движутся гало.

$$t_0 = \frac{\pi^{3/2}ab}{1.13\sqrt{G(m_1 + m_2)a(1 - \varepsilon^2)}},$$

где  $b$  — меньшая полуось эллипса.

Тогда легко вычислить энергию, излученную системой в виде гравитационных волн за все время ее существования:

$$E = It_0 \approx \frac{14\pi^{15/2}G^{7/2}}{13c^5} \cdot \frac{r_0^6\varepsilon^2(1 + \frac{\varepsilon^2}{4})b}{a^{9/2}(1 - \varepsilon^2)^{11/2}} \cdot \frac{(\rho_{01}m_2^2 + \rho_{02}m_1^2)^2}{(m_1 + m_2)^{3/2}}.$$

Или, учитывая, что  $m = \rho_0 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r'^2}{r_0^2}} dV = \pi^{3/2} \rho_0 r_0^3$ ,

$$E = \frac{14\pi^{45/4}G^{7/2}}{13c^5} \cdot \frac{r_0^{27/2}\varepsilon^2(1 + \frac{\varepsilon^2}{4})b}{a^{9/2}(1 - \varepsilon^2)^{11/2}} \cdot \rho_{01}^2 \rho_{02}^2 (\rho_{01} + \rho_{02})^{1/2}. \quad (5)$$

## 4 Нахождение объемной плотности энергии гравитационных волн

Мы получили энергию, излученную системой с гало, центральные плотности которых равны  $\rho_{01}$  и  $\rho_{02}$ . Однако, для более точной оценки спектра реликтовых гравитационных волн нам требуется усреднение этой величины по всей Вселенной. Сделаем это следующим образом.

Теория инфляции имеет представление о том, насколько часто встречаются гало различных масс. Они распределены таким образом, что на один сгусток массы 1 приходится десять сгустков массы  $1/10$ , сто сгустков массы  $1/100$  и т.д. То есть вклад в излучение от объектов различной массы одинаков.

Пусть существует функция  $f$ , характеризующая частоту, с которой в Вселенной встречаются гало некоторой массы  $m$ , и пусть функция  $f$  такова, что

$$N = \int f dm = \int f \cdot m \cdot \frac{dm}{m},$$

где  $N$  — общее количество двойных систем, рассматриваемых нами, во Вселенной.

Тогда очевидно, что  $f \sim \frac{1}{m} \Rightarrow f = \frac{C}{m}$ , где  $C$  — некоторая константа.

Таким образом, получаем, что средняя энергия гравитационных волн, излученных одной системой гало, равна

$$\langle E \rangle = C \int E \cdot \frac{1}{m_1} \cdot \frac{1}{m_2} dm_1 dm_2 = C \int E \cdot \frac{1}{\rho_{01}} \cdot \frac{1}{\rho_{02}} d\rho_{01} d\rho_{02}.$$

Подставляя энергию  $E$  из (5), имеем:

$$\langle E \rangle = C \cdot A \int \rho_{01} \rho_{02} \cdot (\rho_{01} + \rho_{02})^{1/2} d\rho_{01} d\rho_{02},$$

где  $A$  — первые две дроби из (5)

После довольно длинных вычислений получим среднюю энергию:

$$\langle E \rangle = \frac{C \cdot A}{195} (\rho_{01} + \rho_{02})^{5/2} \cdot \left( \frac{152}{5} \rho_{02}^2 + 20 \rho_{01} \rho_{02} - 8 \rho_{01}^2 \right). \quad (6)$$

Теперь определим константу  $C$ . Из приведенных выше соотношений следует, что

$$M_{halo} = \int C dm = m \cdot C = C \cdot V_{hor} \cdot \bar{\rho}_{U_n},$$

где  $M_{halo}$  — суммарная масса всех частиц, которые к тому времени собрались в гало,  $V_{hor}$  — объем горизонта,  $\bar{\rho}_{U_n}$  — средняя плотность вещества во Вселенной в послеинфляционную эпоху.

Будем считать, что в гало к тому времени собралось около половины всех частиц, находящихся под горизонтом, то есть  $M_{halo} = \frac{1}{2}M$ , где  $M = V_{hor} \cdot \bar{\rho}_{U_n}$ .

Тогда  $C = \frac{M}{2V_{hor} \cdot \bar{\rho}_{U_n}} = \frac{1}{2}$ .

Подставляя это выражение в (6), получаем среднюю энергию излучения гравитационных волн от одной системы:

$$\langle E \rangle = \frac{14\pi^{45/4} G^{7/2}}{1755c^5} \cdot \frac{r_0^{27/2} \varepsilon^2 (1 + \frac{\varepsilon^2}{4}) b}{a^{9/2} (1 - \varepsilon^2)^{11/2}} \cdot (\rho_{01} + \rho_{02})^{5/2} \cdot \left( \frac{152}{5} \rho_{02}^2 + 20 \rho_{01} \rho_{02} - 8 \rho_{01}^2 \right). \quad (7)$$

Чтобы найти объемную плотность энергии гравитационных волн в послеинфляционную эпоху, достаточно среднюю энергию, определяемую в (7), поделить на объем горизонта, в котором и существуют гало, испускающие гравитационные волны. Получаем, что

$$\rho_{GW}^* = \frac{7\pi^{41/4} G^{7/2}}{1170c^5} \cdot \frac{r_0^{21/2} \varepsilon^2 (1 + \frac{\varepsilon^2}{4}) b}{a^{9/2} (1 - \varepsilon^2)^{11/2}} \cdot (\rho_{01} + \rho_{02})^{5/2} \cdot \left( \frac{152}{5} \rho_{02}^2 + 20 \rho_{01} \rho_{02} - 8 \rho_{01}^2 \right). \quad (8)$$

Итак, мы нашли объемную плотность энергии гравитационных волн в послеинфляционную эпоху. Количество гравитонов с тех пор, разумеется, не изменилось, а размеры Вселенной увеличились. Кроме того, увеличилась и длина гравитационной волны. А поскольку плотность энергии падает пропорционально увеличению объема и увеличению длины волны, то плотность энергии гравитационных волн уменьшилась пропорционально четвертой степени отношения масштабных факторов в рассматриваемые моменты времени. Тогда для плотности энергии в современной Вселенной получаем:

$$\rho_{GW} = \left( \frac{a^*}{a} \right)^4 \rho_{GW}^*,$$

где  $a$  — масштабный фактор, а символ  $^{**}$  означает, что величина рассматривается в послеинфляционную эпоху, то есть в эпоху образования гравитационных волн.

Очевидно также, что отношение масштабных факторов связано с отношением температур соотношением  $\frac{a^*}{a} = \frac{T}{T^*}$ . Таким образом,

$$\rho_{GW} = \left( \frac{T}{T^*} \right)^4 \rho_{GW}^*.$$

Для получения численной оценки длины волны и амплитуды реликтовых гравитационных волн сделаем оценку некоторых величин в (8). Во-первых, отметим, что длина гравитационной волны  $\lambda_{GW}$  должна быть равна характерному размеру двойной системы, то есть  $r_0$ . Далее возьмем плотности  $\rho_{01}$  и  $\rho_{02}$  такими, что  $\rho_{01} = 100 \cdot \sigma_1 \bar{\rho}_{Un}$ ,  $\rho_{02} = 100 \cdot \sigma_2 \bar{\rho}_{Un}$ , где  $\sigma_{1,2}$  — числа, близкие к единице, то есть  $\sigma_1 + \sigma_2 \approx 2$ ,  $\sigma_i \cdot \sigma_j \approx 1$ . Параметры эллиптической орбиты возьмем следующими:  $a = r_0$ ,  $b = \frac{2}{3}r_0$ ,  $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ . Также учтем, что  $\rho_{GW} \sim h^2$ , где  $h$  — амплитуда гравитационной волны.

$$\frac{T}{T^*} = 10^{-5},$$

откуда найдем

$$\rho_{GW} = 10^{-20} \cdot \rho_{GW}^*.$$

Используя все приведенные оценки и приближения, найдем окончательно численную связь частоты реликтовых гравитационных волн  $\nu$  и их амплитуды  $h$ :

$$h_{GW}^2 \nu_{GW}^2 = 4.32 \cdot 10^{-37} s^{-2}.$$

Отметим также, что частота волн должна быть равна характерной частоте вращения гало вокруг общего центра масс. Эту частоту легко оценить, исходя из законов движения гало в двойной системе. Поскольку в различных системах гало имели различные массы, а значит, давали различный вклад в общее излучение, ответ представим в виде зависимости:

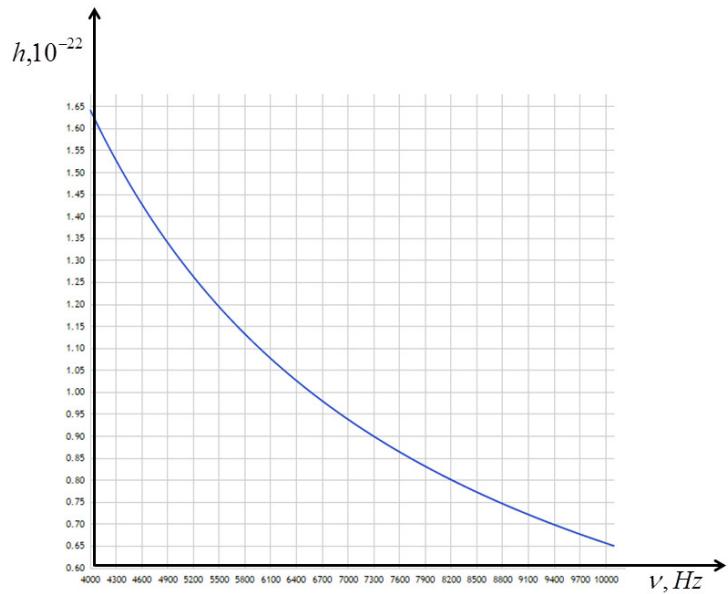


Рис. 3. Итоговый спектр

Современные детекторы гравитационных волн пока еще не способны зарегистрировать волны такой амплитуды. Их чувствительность сейчас достигает порядка  $10^{-21}$ , а этого, как видно, не достаточно для прямой регистрации.

## 5 Выводы

В результате работы была рассмотрена модель двойных систем гало инфлатонов, испускающих в процессе своей эволюции гравитационные волны. Был вычислен спектр этих волн, который приведен в параграфе 4. Полученные значения амплитуды гравитационных волн были сравнены с чувствительностью современных детекторов.

## 6 Список использованной литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. 2006.
- [2] Phys. Rev. 1963. V. 131. P. 435.