Факторизация гамильтонианов в некоторых задачах квантовой механики

Курсовая работа студента 2 курса 213 группы Лысухиной
Анастасии Владимировны
Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
Белокуров Владимир Викторович

13 мая 2015 г.

Гармонический осциллятор

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}\mathrm{P}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Q}^2 = \mathrm{a}^+\mathrm{a}^- + \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{Q} - \mathrm{iP}), \quad \mathrm{a}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{Q} + \mathrm{iP})$$

$$[\mathrm{a}^-, \mathrm{a}^+] = 1, \quad [\mathrm{a}^-, \mathrm{H}] = \mathrm{a}^-, \quad [\mathrm{a}^+, \mathrm{H}] = -\mathrm{a}^+$$

Гармонический осциллятор

$$\mathrm{a}^{-}\psi_0 = 0, \quad \psi_0 = \mathrm{A}_0 \mathrm{exp}\left(-\frac{\mathrm{x}^2}{2}\right)$$

$$\psi_\mathrm{n} = \frac{1}{\sqrt{2^\mathrm{n}\mathrm{n}!\sqrt{\pi}}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}} \mathrm{H}_\mathrm{n}(\mathrm{x})$$

$$\mathrm{E}_\mathrm{n} = \left(\mathrm{n} + \frac{1}{2}\right), \ \mathrm{n} = 0, 1, 2 \ldots$$

Некоторые общие соотношения при факторизации гамильтониана

$$b^+ = -\frac{d}{dx} + f(x), \quad b^- = \frac{d}{dx} + f(x)$$

$$H' = 2H = b^+b^- = -\frac{d^2}{dx^2} + f^2(x) - f'(x), \quad [b^-, b^+] = 2f'(x)$$

$$[b^+, H'] = -2f(x)f'(x) + 2f''(x) + 2f'(x)\frac{d}{dx}$$

$$[b^-, H'] = 2f'(x)\frac{d}{dx} + 2f'(x)f(x)$$

$$[b^-, H'] - [b^+, H'] = 2f''(x) - 2f(x)f'(x) - 2f'(x)f(x)$$

Осциллятор Морса

$$\mathrm{b}^{+} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} - \mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{x}}, \quad \mathrm{b}^{-} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} - \mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{x}}$$

$$\mathrm{H}' = 2\mathrm{H} = \mathrm{b}^{+}\mathrm{b}^{-} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2} + \mathrm{e}^{-2\alpha \mathrm{x}} - \alpha \mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{x}}$$

$$\psi_0 = \mathrm{A}_0 \mathrm{exp}\left(-\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{x}}\right)$$

Осциллятор Морса

$$[\mathrm{b}^-, \mathrm{b}^+] = 2\alpha \mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{x}}, \quad \mathrm{W} = \mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{x}}$$

$$[\mathrm{b}^+, \mathrm{H}'] = 2\alpha \mathrm{e}^{-2\alpha \mathrm{x}} - 2\alpha^2 \mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{x}} + 2\alpha \mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{x}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} = -2\alpha \mathrm{W} \mathrm{b}^+ - 2\alpha^2 \mathrm{W}$$

$$[\mathrm{b}^-, \mathrm{H}'] = 2\alpha \mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{x}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} - 2\alpha \mathrm{e}^{-2\alpha \mathrm{x}} = 2\alpha \mathrm{W} \mathrm{b}^-$$

$$[[\mathrm{b}^-, \mathrm{H}'] - [\mathrm{b}^+, \mathrm{H}'], [\mathrm{b}^-, \mathrm{b}^+]] = [-4\alpha \mathrm{W}^2 + 2\alpha^2 \mathrm{W}, 2\alpha \mathrm{W}] = 0$$

Потенциал Калоджеро

$$\mathrm{b}_\alpha^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{x} + \alpha\mathrm{x}^{-1}\right), \quad \mathrm{b}_\alpha^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{x} + \alpha\mathrm{x}^{-1}\right)$$

$$\mathrm{H} = \mathrm{b}_\alpha^+\mathrm{b}_\alpha^- + \frac{1}{2} - \alpha = \frac{1}{2}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2} + \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x}^{-2}\right)$$

$$\mathrm{B}^+ = \mathrm{b}_\alpha^+\mathrm{b}_{-\alpha}^+ = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2} + \mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x}^{-2} - 2\mathrm{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} - 1\right)$$

$$\mathrm{B}^- = \mathrm{b}_\alpha^-\mathrm{b}_{-\alpha}^- = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2} + \mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x}^{-2} + 2\mathrm{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} + 1\right)$$

Потенциал Калоджеро

$$[\mathrm{B}^{\pm}, \mathrm{H}] = \mp 2\mathrm{B}^{\pm}$$

$$\psi_0^{(-2)}(\mathrm{x}) = \mathrm{P}_{2\mathrm{n}+2}(\mathrm{x})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}}, \quad \mathrm{E}_\mathrm{n} = \frac{5}{2} + 2\mathrm{n}$$

$$\psi_0^{(1)}(\mathrm{x}) = (\mathrm{x}^{-1} + \mathrm{P}_{2\mathrm{n}-1}(\mathrm{x}))\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}}, \quad \mathrm{E}_\mathrm{n} = -\frac{1}{2} + 2\mathrm{n}$$

Осциллятор со степенной ангармоничностью

$$b^{+} = -\frac{d}{dx} + x + x^2, \quad b^{-} = \frac{d}{dx} + x + x^2$$

$$H' = 2H = b^{+}b^{-} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 2x + 2x^3 + x^4 - 1$$

Осциллятор со степенной ангармоничностью

$$[\mathrm{b}^-, \mathrm{b}^+] = 2 + 4\mathrm{x}$$

$$[\mathrm{b}^+, \mathrm{H}'] = -4\mathrm{x}^3 - 6\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} + 4 + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} + 4\mathrm{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} = 4 - 4\mathrm{x}\mathrm{b}^+ - 2\mathrm{b}^+$$

$$[\mathrm{b}^-, \mathrm{H}'] = 4\mathrm{x}^3 + 6\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} + 4\mathrm{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} = 4\mathrm{x}\mathrm{b}^- + 2\mathrm{b}^-$$

$$[[\mathrm{b}^-, \mathrm{H}'] - [\mathrm{b}^+, \mathrm{H}'], [\mathrm{b}^-, \mathrm{b}^+]] = [8\mathrm{x}^3 + 12\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} - 4, 2 + 4\mathrm{x}] = 0$$

Двойственные потенциалы

$$\mathrm{H}_1\psi_0(\mathrm{x}) = -\frac{\mathrm{d}^2\psi_0}{\mathrm{dx}^2} + \mathrm{U}_1(\mathrm{x})\psi_0(\mathrm{x}) = 0$$

$$\mathrm{U}_1(\mathrm{x}) = \frac{\psi_0''(\mathrm{x})}{\psi_0(\mathrm{x})}$$

$$\mathrm{H}_1 = \mathrm{b}^+\mathrm{b}^-, \quad \mathrm{b}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{f}(\mathrm{x}), \quad \mathrm{b}^+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{f}(\mathrm{x})$$

$$\mathrm{U}_1(\mathrm{x}) = \mathrm{f}^2(\mathrm{x}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{f}'(\mathrm{x}), \quad \mathrm{f}(\mathrm{x}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\psi_0'(\mathrm{x})}{\psi_0(\mathrm{x})}$$

Двойственные потенциалы

$$H_2 = b^- b^+ = -\frac{d^2}{dx^2} + U_2(x), \quad U_2(x) = f^2(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} f'(x)$$

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \quad E_0^{(1)} = 0$$

$$psi_n^{(2)} = (E_{n+1}^{(1)})^{-1/2} \ b^- \psi_{n+1}^{(1)}$$

$$\psi_{n+1}^{(1)} = (E_n^{(2)})^{-1/2} \ b^+ \psi_n^{(2)}$$