Московский государственный университет
Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

КУРСОВАЯ РАБОТА

«КЛАССИКАЛИЗАЦИЯ В ПРОСТОЙ МОДЕЛИ»

студента 2 курса, 212 группы

Письменного Николая Борисовича

Научный руководитель:
К.ф.-м. н.
Д. Г. Левков

Москва 2015

1. Введение

В работе [1] выдвинуто предположение, что в некотором классе теорий поля рассеяние высокоэнергетических частиц происходит особым образом. Утверждается, что при столкновении рождаются широкие полевые конфигурации состоящие из мягких частиц. Такие конфигурации называют классикалонами. Чем больше энергия E рассеянных частиц, тем больше классикалон. Это явление называется классикализацией. Характерный размер классической конфигурации называется радиусом классикализации $r_\star$.

В данной работе мы рассматриваем конкретную модель, в которой ожидается появление классикалонов. Модель содержит размерную константу в знаменателе, то есть является неперенормируемой.

2. Простая модель

Рассмотрим самый простой случай - одномерное скалярное поле. Рассмотрим задачу, в которой начальный волновой пакет ударяется о стенку. Пусть действие одномерного скалярного поля $\Phi(t,x)$ в $(1+1)$-мерном пространстве задается следующим функционалом:

$$S = \int\limits_{x>0;t>0} \frac{(\partial_\mu \Phi)^2}{2} dxdt + \Lambda \int\limits_{x=0;t>0} f\left(\frac{\partial_t \Phi}{\Lambda}\right) dt,$$

где f - некая нелинейная функция, а Λ - размерная константа.

2.1. Уравнения поля

Применим принцип наименьшего действия. Найдем вариацию действия:

$$\delta S = \int\limits_{x>0;t>0} \Big[\partial_t \Phi \delta(\partial_t \Phi) - \partial_x \Phi \delta(\partial_x \Phi)\Big] dxdt + \int\limits_{x=0;t>0} f'\left(\frac{\partial_t \Phi}{\Lambda}\right) \delta(\partial_t \Phi) dt$$

Интегрируя оба слагаемых по частям, найдем (сразу учтем, что вариация поля на временных границах равна нулю):

$$\delta S = \int\limits_{x>0;t>0} \partial_t^2 \Phi \delta \Phi dxdt \;\; - \int\limits_{t>0} (\partial_x \Phi \delta \Phi)\Big|_0^\infty dx \;\; + \int\limits_{x>0;t>0} \partial_t^2 \Phi \delta \Phi dxdt \;\; - \int\limits_{x=0;t>0} f''\left(\frac{\partial_t \Phi}{\Lambda}\right) \frac{\partial_t^2 \Phi}{\Lambda} \delta \Phi$$

Учтем теперь, что вариация поля на бесконечности также равна 0, и приравняем вариацию действия к нулю. Тогда, из этого следует два уравнения:

$$\partial_t^2 \Phi - \partial_x^2 \Phi = 0, \qquad x > 0,\ t > 0 \tag{1}$$

$$f''\left(\frac{\partial_t \Phi}{\Lambda}\right) \frac{\partial_t^2 \Phi}{\Lambda} = \partial_x \Phi, \quad x = 0,\ y > 0 \tag{2}$$

Решением (1) является:

$$\Phi(t,x) = \Phi_{in}(t+x) + \Phi_{out}(t-x), \tag{3}$$

где Φ_{in} - "входящий"(начальный) волновой пакет, а Φ_{out} - "исходящий"(тот, который образовался после столкновения). Уравнение (2) - это граничное условие для (1). Подставим (3) в (2):

$$f''\left(\frac{\Phi'_{in}(t)+\Phi'_{out}(t)}{\Lambda}\right)\frac{\Phi''_{in}(t)+\Phi''_{out}(t)}{\Lambda}=\Phi'_{in}(t)-\Phi'_{out}(t)$$

2.2. Сохраняющиеся величины

Из функционала действия выразим лагранжиан поля:

$$L=\theta(x)\frac{(\partial_\mu\Phi)^2}{2}+\delta(x)\Lambda f\left(\frac{\partial_t\Phi}{\Lambda}\right), \tag{4}$$

где $\theta(x)$ - функция Хевисайда, а $\delta(x)$ - дельта-функция.

2.2.1. Заряд

Заметим, что в уравнения (1) и (2) входят только первые производные поля. Значит, поле будет определено с точностью до константы, то есть существует глобальное преобразование, относительно которого лагранжиан инвариантен:

$$\Phi\to\Phi+C$$

Поскольку лагранжиан инвариантен относительно таких преобразований, его производная по C будет равна 0. Её можно записать в виде суммы двух производных по $\partial_x\Phi$ и $\partial_t\Phi$. Получим Нётеровский ток:

$$j^x=\frac{\partial L}{\partial(\partial_x\Phi)}=-\theta(x)\partial_x\Phi$$

$$j^t=\frac{\partial L}{\partial(\partial_t\Phi)}=\theta(x)\partial_t\Phi+\delta(x)\Lambda f'\left(\frac{\partial_t\Phi}{\Lambda}\right)$$

Производные тока по соответствующим координатам равны:

$$\partial_x j^x=-\theta(x)\partial_x^2\Phi-\delta(x)\partial_x\Phi$$

$$\partial_t j^t=\theta(x)\partial_t^2\Phi+\delta(x)f''\left(\frac{\partial_t\Phi}{\Lambda}\right)\frac{\partial_t^2\Phi}{\Lambda}$$

Видно, что сумма производных токов равна нулю (это следует из (1) и (2)). Исходя из этого, существует сохраняющийся заряд Q:

$$Q=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx j^t=f'\left(\frac{\partial_t\Phi}{\Lambda}\right)\Big|_{x=0}+\int\limits_0^{\infty}dx\partial_t\Phi$$

Запишем $\int\limits_0^{\infty}dx\partial_t\Phi$ через Φ_{in} и Φ_{out} и проинтегрируем:

$$\int\limits_0^{\infty}dx\partial_t\Phi=\int\limits_0^{\infty}dx\left[\Phi'_{in}(t+x)+\Phi'_{out}(t-x)\right]=\left[\Phi_{in}(t+x)-\Phi_{out}(t-x)\right]\Big|_{x=0}^{x=\infty}=\Phi_{in}(t)-\Phi_{out}(t)$$

Подставляя результат в предыдущее выражение, получим окончательное значение заряда:

$$Q = f'\left(\frac{\Phi'_{in}(t) + \Phi'_{out}(t)}{\Lambda}\right) + \Phi_{in}(t) - \Phi_{out}(t) \tag{5}$$

Если теперь продифференцировать заряд по времени, то получится (2), а это значит, что заряд действительно сохраняется. Из выражения для заряда также следует, что заряд локализованных волновых пакетов будет равен нулю. Предполагая, что функция f' имеющей обратную, запишем:

$$\Phi'_{out}(t) = \Lambda F\left(Q - \Phi_{in}(t) + \Phi_{out}(t)\right) - \Phi'_{in}(t), \tag{6}$$

где $F(f'(x)) = x$. Уравнение (6) - обыкновенное дифференциальное уравнение на $\Phi_{out}(t)$, то есть из него можно находить отраженную волну, зная падающую волну и граничную функцию.

2.2.2. Энергия

Независимость лагранжиана от времени приводит к сохранению энергии. Она, в случае одномерного скалярного поля, может быть подсчитана с помощью известной формулы:

$$E = \int_0^\infty dx\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_t\Phi)}\partial_t\Phi - L\right] = \int_0^\infty dx\left[\frac{(\partial_t\Phi)^2}{2} + \frac{(\partial_x\Phi)^2}{2} - \delta(x)\Lambda f\left(\frac{\partial_t\Phi}{\Lambda}\right) + \delta(x)f'\left(\frac{\partial_t\Phi}{\Lambda}\right)\partial_t\Phi\right]$$

Подставляя в интеграл решение (3) и полагая $t = 0$, получим:

$$E = \int_0^\infty dx\left(\Phi'^2_{in}(x) + \Phi'^2_{out}(-x)\right) + \left[f'\left(\frac{\partial_t\Phi(0)}{\Lambda}\right)\partial_t\Phi(0) - \Lambda f\left(\frac{\partial_t\Phi(0)}{\Lambda}\right)\right]$$

Дифференцируя по времени, получим под интегралом сумму (1) и (2). Значит, энергия действительно сохраняется.

Для дальнейших численных расчетов нам понадобится знание энергии гауссова волнового пакета $\Phi_{in} = Ae^{-\frac{(t-t_0)^2}{b^2}}$. Вычислим ее по выведенной формуле (не интегральный член был отброшен ввиду малости значения $\partial_t\Phi(0)$):

$$E = \frac{4A^2}{b^4}\int_0^\infty dt(t-t_0)^2e^{-\frac{2(t-t_0)^2}{b^2}} = -\frac{A^2}{b^2}t_0e^{-\frac{2t_0^2}{b^2}} + \frac{A^2}{b^2}\int_0^\infty dte^{-\frac{2(t-t_0)^2}{b^2}} \sim \frac{A}{b^2}$$

3. Решение уравнений поля

Мы будем решать уравнение (6) для начального гауссова пакета $\Phi_{in} = Ae^{-\frac{(t-t_0)^2}{b^2}}$. Из выражения (5) следует, что заряд локализованного, далекого от нуля в начальный момент времени волнового пакета равен нулю. В силу этого перепишем (6):

$$\Phi'_{out}(t) = \Lambda F\left(\Phi_{out}(t) - \Phi_{in}(t)\right) - \Phi'_{in}(t)$$

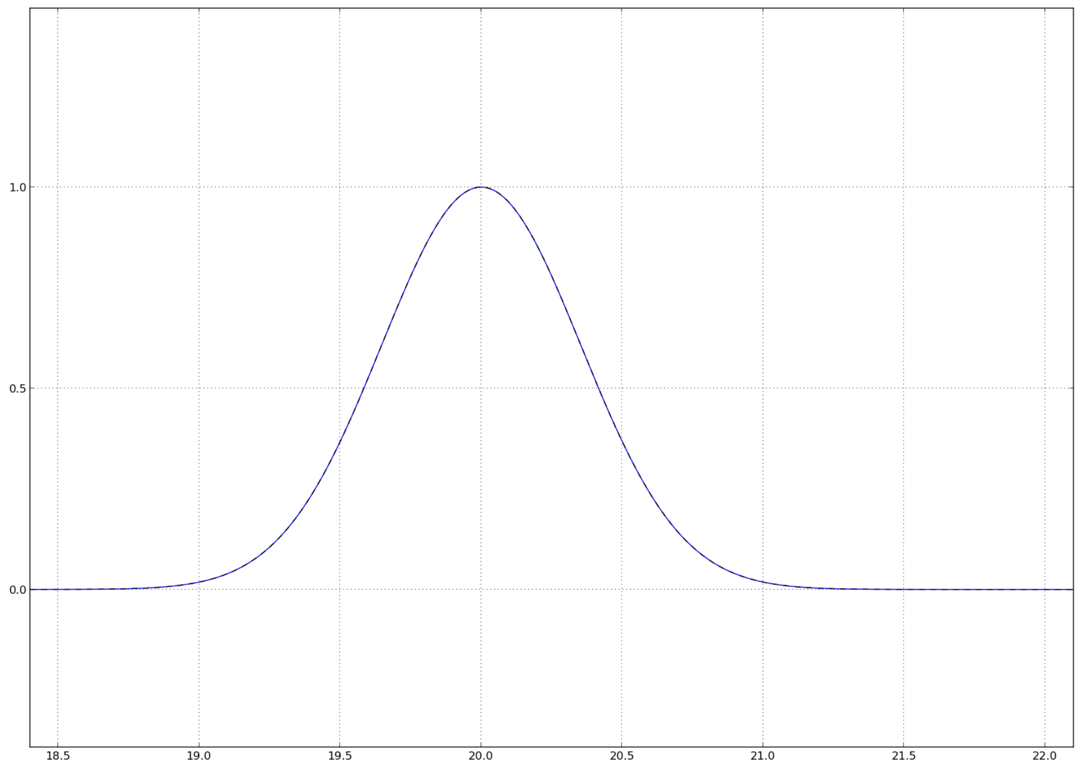

Рис. 1. Аналитическое решение

3.1. Аналитическое решение

Найдем решение для $F(x) = x$ (соответственно, $f(x) = \frac{x^2}{2}$):

$$\Phi'_{out}(t) = \Lambda \left(\Phi_{out}(t) - \Phi_{in}(t) \right) - \Phi'_{in}(t)$$

Решая это линейное неоднородное уравнение, получим:

$$\Phi_{out} = Ae^{-\frac{(t-t_0)^2}{b^2}} + 2A\Lambda e^{\Lambda(t-t_0)+\frac{\Lambda^2}{4b^2}} \left(erf\left(\frac{t-t_0}{b} + \frac{\Lambda b}{2} \right) - 1 \right),$$

где $erf(x) = \int\limits_0^x e^{-s^2} ds$. Проанализируем решение. При $t >> t_0$ второе слагаемое обращается в ноль, а при $t << t_0$ оно приближенно равно минус экспоненте. Радиус классикализации $r_\star$ может быть оценен как Λ. Значит, этот случай не является классикализацией, т.к. размер классикалона не много больше размера пакета, что и видно на рис. 1.

3.2. Численное решение

С помощью компьютерной программы на языке Python были получены численные решения уравнения (6) для многих других функций $F(x)$. Были произведенны серии расчетов для волновых пакетов с фиксированной энергией, но разной шириной. Режим классикализации ожидался при $\frac{A}{b^2} >> \Lambda$ (т.е. когда аргумент $F(x)$ стремился к бесконечности в некоторой точке). Ниже приведены графики для разных $F(x)$ в этом режиме. Значения всех рассчетных параметров указаны на графиках: L - это Λ, A0 - начальная амплитуда, b0 - начальная ширина, % - изменение амплитуды в процентах.

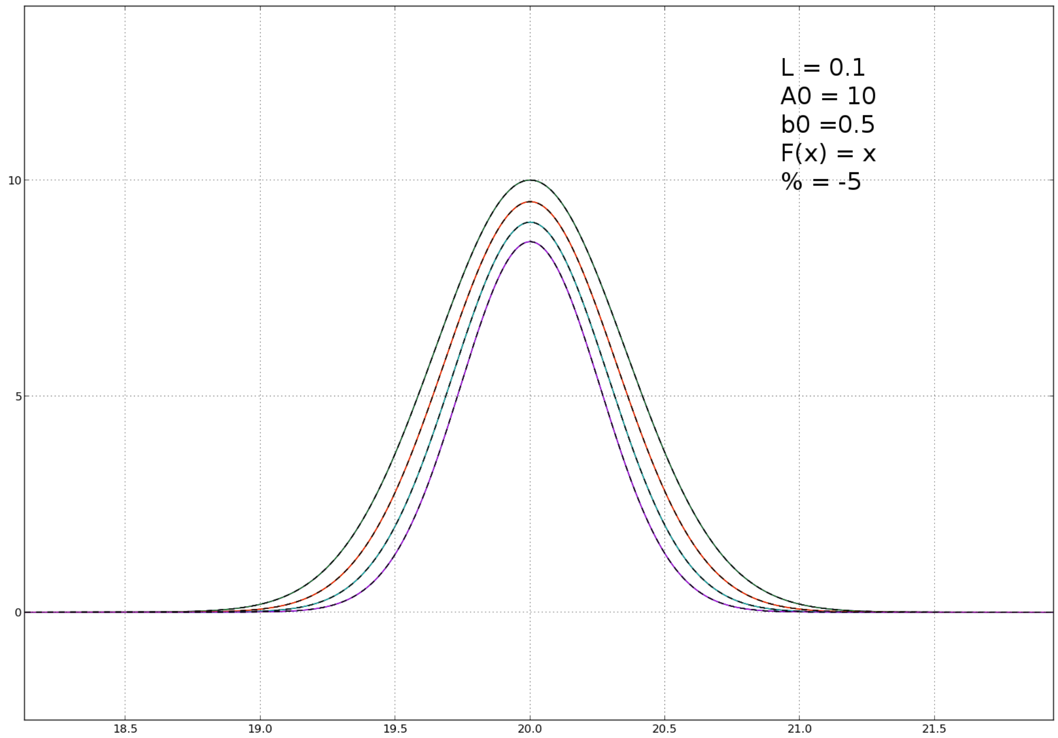

Рис. 2. Численные решения для $F(x) = x$

4. Результаты

1. Получены уравнения поля для задачи, в которой ожидается классикализация.

2. Получены формулы для нётеровского тока, заряда и энергии.

3. Получено решение для простейшего случая и численные для более сложных. Однако, классикализация так и не была найдена ни в одном из случаев.

Список литературы

[1] G. Dvali, D. Pirtskhalava, *Dynamics of unitarization by classicalization*. Physics Letters B, 699:78-86, 2011.

[2] В.А.Рубаков, *Классические калибровочные поля.* М., УРСС, 2005.