Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

Нарушение Лоренц-инвариантности и связанные состояния

Курсовая работа
студента 211 группы
Плотникова Д. В.

Научные руководители:
к.ф-м.н. Г.И. Рубцов
к.ф.-м.н. С.М. Сибиряков

Москва-2015

Содержание

Введение

Общая теория относительности (ОТО) является на данный момент основной теорией гравитации, хорошо подтверждённой наблюдениями. Одним из её базовых принипов является симметрия пространства-времени относительно преобразований Лоренца. Иначе, эквивалентность систем отсчёта представлена Лоренц-инвариантностью (далее ЛИ - Лоренц-инвариантность). Однако имеются предпослыки к отклонениям от ОТО, и в некоторых модификациях теории нарушается именно Лоренц-инвариантность (ЛН - нарушение Лоренц-инвариантности). Некоторые теории предполают, что ЛИ может быть нарушена при высоких энергиях. Такие энергии недоступны современным ускорителям. Но они могут достигаться, например, в ультра-энергетических космических лучах (обо всём выше см. [3]). В ряде подходов ЛН вводится с помощью параметра M, по порядку величины равному Планковской массе $M_P \approx 10^{19}\ GeV$. Исходное дисперсионное соотношение (ДС): $E^2 = p^2 + m^2$, заменяется на соотношение вида: $E^2 = p^2 + m^2 + \frac{p^4}{M^2}$. При низких энергиях происходит подавление последнего слагаемого. Мотивация данной модели также изложена в [3].

Постановка задачи

В работе рассматривается свободная частица с нарушением M с ДС:

$$E^2 = p^2 + m^2 + \frac{p^4}{M^2}, \qquad M \gg m \tag{1}$$

А также модели связанных состояний. Выводятся ограничения на движение такой системы, исследуется вопрос о том, как соотносятся массы и нарушения для результирующей частицы и определяется вид её ДС.

Лагранжиан частицы с ЛН

Гамильтониан свободной частицы с энергией, определяющейся из (1) равен:

$$H = \sqrt{p^2 + m^2 + \frac{p^4}{M^2}} \tag{2}$$

Найдём функцию Лагранжа. Для этого запишем обратное преобразование Лежандра в общем виде [1]:

$$L = \sum_i p_j \dot{q}_j - H \tag{3}$$

С самого начала предположим движение одномерным с обобщённой координатой x, скоростью v и импульсом p. Тогда, используя уравнение Гамильтона:

$$v = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{4}$$

$$v \cdot \sqrt{p^2 + m^2 + \frac{p^4}{M^2}} = p + \frac{p^3}{M^2} \tag{5}$$

Заменяя p^2 на y и возводя обе части в квадрат, получаем кубическое уравнение на y:

$$\frac{4}{M^4} y^3 + \frac{4 - v^2}{M^2} y^2 + (1 - v^2) y - m^2 v^2 = 0 \tag{6}$$

Его решение в пределе $M \to \infty$ должно быть выражением для квадрата импульса ЛИ частицы $\frac{m^2 v^2}{1 - v^2}$, поэтому решение будем искать в виде:

$$y = \frac{m^2 v^2}{1 - v^2} + \frac{\delta}{M^2} \tag{7}$$

Подставляя (6) в (7) и пренебрегая всеми степенями $\frac{1}{M}$ старше квадрата, находим δ и y:

$$\delta = \frac{m^4 v^4 (v^2 - 4)}{(1 - v^2)^3} \Longrightarrow y = p^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - v^2} + \frac{m^2 v^2 (v^2 - 4)}{(1 - v^2)^3} \frac{1}{M^2} \tag{8}$$

Используя (3) и (4):

$$L = pv - \sqrt{p^2 + m^2 + \frac{p^4}{M^2}} = \frac{p + \frac{4p^3}{M^2}}{\sqrt{p^2 + m^2 + \frac{p^4}{M^2}}} - \sqrt{p^2 + m^2 + \frac{p^4}{M^2}} = \frac{\frac{p^4}{M^2} - m^2}{\sqrt{p^2 + m^2 + \frac{p^4}{M^2}}} \tag{9}$$

Подставив p^2 и разложив выражение в ряд Тейлора по степеням $\frac{1}{M}$ с точностью до членов второго порядка включительно, получим окончательно:

$$L = \underbrace{-m\sqrt{1-v^2}}_{\text{лагранжиан релятивистской частицы}} \underbrace{-\frac{m^3v^4}{2(1-v^2)^{3/2}}\frac{1}{M^2}}_{\text{ЛН добавка}} + o\left(\frac{1}{M^3}\right) \tag{10}$$

Связанное состояние ЛИ-ЛН частиц

Был получен лагранжиан свободной частицы с ЛН:

$$L = -m\sqrt{1-v^2} - \frac{m^3v^4}{2M^2(1-v^2)^{3/2}} \tag{11}$$

Рассмотрим одномерную задачу о движении взаимодействующих ЛИ частицы с лагранжианом:

$$L^{li} = -m\sqrt{1-v_1^2} \tag{12}$$

и частицы с ЛН с лагранжианом:

$$L^{ln} = -m\sqrt{1-v_2^2} - \frac{m^3v_2^4}{2M^2(1-v_2^2)^{3/2}} \tag{13}$$

для простоты массы частиц одинаковы

Потенциал взаимодействия равен:

$$U = \frac{k(x_2-x_1)^2}{2} \tag{14}$$

Здесь и далее в данной главе индексы 1 относятся к ЛИ частице, а индекс 2 к частице с нарушением. Дополнительно предположим, что частица 2 заряжена ($e = 1$) и поместим её в электрическое поле E Тогда функция Лагранжа системы частиц будет иметь вид:

$$L = L^{li} + L^{ln} - U + Ex_2 \tag{15}$$

$$L = -m\sqrt{1-v_1^2} - m\sqrt{1-v_2^2} - \frac{m^3v_2^4}{2M^2(1-v_2^2)^{3/2}} - \frac{k(x_2-x_1)^2}{2} + Ex_2 \tag{16}$$

$$v_1 = \dot{x}_1 \qquad v_2 = \dot{x}_2 \tag{17}$$

Зададимся вопросом, можно ли заменить данную систему эквивалентной частицей и найдём её массу.

Запишем уравнения Эйлера-Лагранжа, выбрав за обобщенные координаты x_1 и x_2:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \tag{18}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \tag{19}$$

Дифференцируя, и проводя преобразования, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{m\ddot{x}_1}{(1-\dot{x}_1^2)^{3/2}} + k(x_1 - x_2) = 0 \\ \frac{m\ddot{x}_2}{(1-\dot{x}_2^2)^{3/2}} - \frac{6m^3}{M^2}\frac{\dot{x}_2^2\ddot{x}_2}{(1-\dot{x}_2^2)^{5/2}} - \frac{15m^3}{2M^2}\frac{\dot{x}_2^4\ddot{x}_2}{(1-\dot{x}_2^2)^{7/2}} - k(x_1 - x_2) - E = 0 \end{cases} \tag{20}$$

Введём новые переменные:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad v = \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} \tag{21}$$
$$r = \frac{x_2 - x_1}{2} \qquad u = \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2} \tag{22}$$

Выразим старые переменные через новые:

$$x_1 = x - r \qquad v_1 = v - u \tag{23}$$
$$x_2 = x + r \qquad v_2 = v + u \tag{24}$$

Складывая уравнения системы (20) и заменяя старые координаты новыми, получим:

$$\frac{m(\dot{v} - \dot{u})}{(1-(v-u)^2)^{3/2}} + \frac{m(\dot{v} + \dot{u})}{(1-(v+u)^2)^{3/2}} - \frac{6m^3}{M^2}\frac{(v+u)^2(\dot{v}+\dot{u})}{(1-(v+u)^2)^{5/2}} - \frac{15m^3}{2M^2}\frac{(v+u)^4(\dot{v}+\dot{u})}{(1-(v+u)^2)^{7/2}} = E \tag{25}$$

Пренебрежём относительной скоростью u, считая жёсткость k достаточно большой. (Обоснование данного шага будет приведено ниже при рассмотрении общего случая связанного состояния). Преобразуя (25)

$$\frac{\dot{v}}{(1-v^2)^{3/2}}\left(2m - \frac{3m^3}{2M^2}\frac{v^4 + 4v^2}{(1-v^2)^2}\right) = E \tag{26}$$

Получили равноускоренное движение частицы с эффективной массой $m_{eff} = 2m - \frac{3m^3}{2M^2}\frac{v^4+4v^2}{(1-v^2)^2}$ под действием постоянной силы E. Как видим возникает ЛН "добавка"к массе, которая будет зависеть от системы отсчёта.

Покажем, что такой частице может соответствовать частица с нарушением с лагранжианом типа (11), установим её параметры и ДС. Далее штрихи над символами соответствуют такой частице

Функция Лагранжа "штрихованной"частицы в электрическом поле E

$$\acute{L} = -\acute{m}\sqrt{1-\acute{v}^2} - \frac{\acute{m}^3\acute{v}^4}{2\acute{M}^2(1-\acute{v}^2)^{3/2}} + E\acute{x} \tag{27}$$

Проводя аналогичные проделанным ранее вычисления, получим:

$$\frac{\dot{\acute{v}}}{(1-\acute{v}^2)^{3/2}}\left(\acute{m} - \frac{3\acute{m}^3}{2\acute{M}^2}\frac{\acute{v}^4+4\acute{v}^2}{(1-\acute{v}^2)^2}\right) = E \tag{28}$$

Сравнивая данное уравнение с (26) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях скорости, находим:

$$\acute{m} = 2m \qquad \acute{M} = 2\sqrt{2}M \tag{29}$$

Тогда ДС для "штрихованной"частицы

$$\acute{E}^2 = \acute{p}^2 + \acute{m}^2 + \frac{\acute{p}^4}{\acute{M}^2} \tag{30}$$

запишется в виде:

$$\acute{E}^2 = \acute{p}^2 + 4m^2 + \frac{\acute{p}^4}{8M^2} \tag{31}$$

Общий случай связанного состояния

Обобщим задачу на случай взаимодействия двух частиц m_1 и m_2 с нарушениями M_1 и M_2. Для каждой из них справедливо дисперсионное соотношение вида (30), лагранжиан этих частиц даётся формулой (11). Поле E действует на частицу m_2.

Лагранжиан системы имеет вид:

$$L = -m_1\sqrt{1-v_1^2} - \frac{m_1^3 v_1^4}{2M_1^2(1-v_1^2)^{3/2}} - m_2\sqrt{1-v_2^2} - \frac{m_2^3 v_2^4}{2M_2^2(1-v_2^2)^{3/2}} - \frac{k(x_2-x_1)^2}{2} + Ex_2 \tag{32}$$

Запишем систему уравнений движения:

$$\begin{cases} \frac{m_1\ddot{x}_1}{(1-\dot{x}_1^2)^{3/2}} - \frac{6m_1^3}{M_1^2}\frac{\dot{x}_1^2\ddot{x}_1}{(1-\dot{x}_1^2)^{5/2}} - \frac{15m_1^3}{2M_1^2}\frac{\dot{x}_1^4\ddot{x}_1}{(1-\dot{x}_1^2)^{7/2}} + k(x_1-x_2) = 0 \\ \frac{m_2\ddot{x}_2}{(1-\dot{x}_2^2)^{3/2}} - \frac{6m_2^3}{M_2^2}\frac{\dot{x}_2^2\ddot{x}_2}{(1-\dot{x}_2^2)^{5/2}} - \frac{15m_2^3}{2M_2^2}\frac{\dot{x}_2^4\ddot{x}_2}{(1-\dot{x}_2^2)^{7/2}} - k(x_1-x_2) - E = 0 \end{cases} \tag{33}$$

Выберем координаты:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2} \qquad v = \frac{m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2}{m_1+m_2} \tag{34}$$

$$r = \frac{x_2 - x_1}{2} \qquad u = \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2} \tag{35}$$

Выражаем через них координаты и скорости частиц:

$$x_1 = x - \frac{m_2}{m_1+m_2}r \tag{36}$$

$$x_2 = x + \frac{m_1}{m_1+m_2}r \tag{37}$$

Заменяя переменные в уравнениях системы (33), сложим их, пренебрегая относительной скоростью u.

$$\frac{m_1\dot{v}}{(1-v^2)^{3/2}} + \frac{m_2\dot{v}}{(1-v^2)^{3/2}} - \frac{6m_1^3}{M_1^2}\frac{\dot{v}v^2}{(1-v^2)^{5/2}} - \frac{6m_2^3}{M_2^2}\frac{\dot{v}v^2}{(1-v^2)^{5/2}} - \\ - \frac{15m_1^3}{2M_1^2}\frac{\dot{v}v^4}{(1-v^2)^{7/2}} - \frac{15m_2^3}{2M_2^2}\frac{\dot{v}v^4}{(1-v^2)^{7/2}} = E \tag{38}$$

$$\frac{\dot{v}}{(1-v^2)^{3/2}}\left(m_1 + m_2 - \frac{6\dot{v}v^2}{1-v^2}\left(\frac{m_1^3}{M_1^2} + \frac{m_2^3}{M_2^2}\right) - \frac{15\dot{v}v^4}{2(1-v^2)^2}\left(\frac{m_1^3}{M_1^2} + \frac{m_2^3}{M_2^2}\right)\right) = E \tag{39}$$

$$\frac{\dot{v}}{(1-v^2)^{3/2}}\left(m_1 + m_2 - \frac{3}{2}\left(\frac{m_1^3}{M_1^2} + \frac{m_2^3}{M_2^2}\right)\frac{v^4+4v^2}{(1-v^2)^2}\right) = E \tag{40}$$

Сравнивая данное уравнение с (28), убеждаемся, что оно описывает движение частицы с нарушением в поле E, параметры которой будут определяться из системы уравнений:

$$\acute{m} = m_1 + m_2 \qquad \frac{\acute{m}^3}{\acute{M}^2} = \frac{m_1^3}{M_1^2} + \frac{m_2^3}{M_2^2} \tag{41}$$

В случае частиц с равными массами $m_1 = m_2 = m$ и нарушениями $M_1 = M_2 = M$:

$$\acute{m} = 2m \qquad \acute{M} = 2M \tag{42}$$

Эквивалентная штрихованная частица будет иметь дисперсионное соотношение:

$$\acute{E}^2 = 4\acute{m}^2 + \acute{p}^2 + \frac{\acute{p}^4}{4\acute{M}^2} \tag{43}$$

Данный результат согласуется со статьёй [2], в которой дается ДС для A одинаковых взаимодействующих частиц.

При получении ответа в задаче мы принебрегли членами $\frac{m2}{m1+m2}u$ и $\frac{m_1}{m_1+m_2}u$ перед v. То есть должны выполняться соотношения:

$$u \ll \frac{m_1 + m_2}{m_2} \cdot v, \qquad u \ll \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot v \tag{44}$$

Преобразуем систему (33) к виду:

$$\begin{cases} \frac{\dot{v}_1}{(1-v_1^2)^{3/2}} \left(m_1 - \frac{3m_1^3}{2M_1^2} \frac{v_1^4 + 2v_1^2}{(1-v_1)^2} \right) + k(x_1 - x_2) = 0 \\ \frac{\dot{v}_2}{(1-v_2^2)^{3/2}} \left(m_2 - \frac{3m_2^3}{2M_2^2} \frac{v_2^4 + 2v_2^2}{(1-v_2)^2} \right) - k(x_1 - x_2) - E = 0 \end{cases} \tag{45}$$

Вычтем из первого уравнения системы (45) второе и заменим старые переменные новыми, получим громоздкое выражение вида:

$$F(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = 2kr - E \tag{46}$$

Введём $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, $m = m_1 + m_2$. Устремим $u \to 0$. Так как в ограничения (44) не входят нарушения M_1 и M_2, опустим все члены, содержащие $\frac{1}{M_1^1}$ и $\frac{1}{M_2^2}$, считая $M_1 \gg m_1, M_2 \gg m_2$. Проводя преобразования:

$$F(u, v, \dot{u}, \dot{v}) \to -\frac{m(m_2 - m_1)\dot{v} + 2m_1 m_2 \ddot{r}}{m} \gamma^3 \tag{47}$$

Считаем теперь, что скорость v медленно стремится к 1. Из уравнения (46):

$$\ddot{r} + \frac{k}{\mu\gamma^3} \cdot r = \frac{E}{2} \tag{48}$$

Добавим начальные условия:

$$r(0) = 0 \qquad \dot{r}(0) = 0 \tag{49}$$

Оценим амплитуду колебаний скорости частицы. Общее решение уравнения:

$$r(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{E}{2k}\mu\gamma^3, \qquad \omega^2 = \frac{k}{\mu\gamma^3} \tag{50}$$

Учитывая начальные условия, находим:

$$B = -\frac{E}{2k}\mu\gamma^3 \qquad A = 0 \tag{51}$$

Тогда

$$u(t) = -\frac{E}{2k}\mu\gamma^3\omega \sin \omega t + \frac{E}{2k}\mu\gamma^3 \tag{52}$$

Так, приходим к неравенству:

$$v \leq \frac{E}{2}\sqrt{\frac{\mu\gamma^3}{k}} = \frac{E}{2}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}\frac{\gamma^{3/2}}{k^{1/2}} \tag{53}$$

Как видим при $k \to \infty$, условие (53) гарантирует выполнение (44).

Заключение

Модифицированное ДС можно представить в виде:

$$E^2 = p^2 + m_{eff}^2 \tag{54}$$

Где m_{eff} - не являеся инвариантом, что приводит к появлению выделенных систем отсчёта. В работе был определён вид m_{eff} для частного случая ЛИ-ЛН связи частиц, который даётся формулой (26), а также для общего случая (см. формулу (53)). Из неё следует закон преобразования масс и нарушений частиц (41), который находится в согласии с [2]. В ходе решения задачи, мы пренебрегали относительным движением частиц по сравнению с их общим поступательным. Ограничения на относительную скорость (44) обеспечиваются выполнением условия (53) при достаточно больших k.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоритическая физика. Механика. Издание 3-е, "Наука". 1973.

2. A. Saveliev, L. Maccione, G. Sigl. "Lorentz Invariance Violation and Chemical Composition of Ultra High Energy Cosmic Rays".
arXiv:1101.2903

3. Grigory Rubtsov, Petr Satunin, Sergey Sibiryakov "On calculation of cross sections in Lorentz violating theories".
arXiv:1204.5782