ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

Кафедра физики частиц и космологии

Модели генерации векторных мод в космологии.

Дипломная работа
студентки 643 группы
Волковой В.Е.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Рубаков В.А.

Москва
2014

Содержание.

1 Введение.

Неоднородности плотности вещества и метрики играют значительную роль в космологии. Если бы первичные возмущения отсутствовали, то Вселенная оставалась бы абсолютно однородной и изотропной, в ней никогда не появились бы структуры (галактики, скопления галактик и т.д.). Характер эволюции возмущений зависит от их начального спектра, а так же зависит от свойст среды и темпа расширения Вселенной на различных космологических этапах. Наличие первичных возмущений во Вселенной хорошо объясняет теория инфляции, в рамках которой неоднородности развиваются из квантовых флуктуаций инфлатонного поля. Обычно возмущения раскладывают на скалярные (нулевая спиральность), векторные (спиральность 1) и тензорные (спиральность 2). Некоторые инфляционные теории дают характеристики скалярных и тензорных возмущений, которые хорошо согласуются с современными результатами эксперимента [1]. Что касается векторных возмущений, то практически во всех моделях они убывают и достаточно быстро становятся пренебрежимо малыми. Такое поведение векторных мод носит общий характер для инфляционных моделей. Однако, есть целый класс моделей, для которых отличительной чертой является заметный вклад векторных мод [2, 3, 4, 5].

2 Модели с космологическими дефектами.

Естественно предположить, что в результате расширения и остывания Вселенной, на различных этапах в результате фазовых переходов формировались космологические дефекты, которые наравне с квантовыми флуктуациями инфлатонного поля могли служить источниками неоднородностей [2, 6]. Модели с космологическими дефектами, так же как и инфляционные, предсказывают практически плоский спектр возмущений, что хорошо согласуется с современными экспериментальными данными [1]. Однако, спектры реликтового излучения для случая моделей с дефектами отличаются от полученных в моделях инфляции в области акустических пиков. Пики оказываются сдвинутыми в область больших мультиполей и имеют меньшую амплитуду, что является признаком мод постоянной кривизны [7, 8]. Однако, поскольку допустимо присутствие небольшой доли мод постоянной кривизны ($\sim 4\%$) [1], дефекты могут рассматриваться в качестве дополнительных источников возмущений. Другим отличием моделей с космологическими дефектами от инфляционных является непрерывная генерация возмущений на всех этапах развития Вселенной. Согласно инфляционному механизму, квантовые флуктуации инфлатонного поля усиливаются за счет ускоренного расширения Вселенной и подчиняются однородным уравнениям, линейным по возмущениям. В моделях с космологическими дефектами возмущения генерируются на всех стадиях и подчиняются неоднородным уравнениям. Как правило, дефекты описываются нелинейными уравнениями, что затрудняет аналитическое решение задачи. Следует отметить, что в моделях с постоянной генерацией возмущений все три типа возмущений вносят заметный вклад. Наличие неубывающих векторных мод является отличительной чертой моделей с дефектами.

В качестве дополнительных источников можно рассматривать любую неоднородно распределенную форму энергии, которая дает небольшой вклад в суммарную плотность энергии вещества во Вселенной. Самоорганизующееся многокомпонентное скалярное поле является одним из примеров космологических дефектов. Привлекательность этой модели в том, что, в зависимости от количества компонент у скалярного поля, в результате спонтанного нарушения симметрии модели будут формироваться топологические ($N \leq 4$) или нетопологические ($N > 4$) дефекты. Случай $N > 4$ хорош тем, что уравнения движения для скалярного поля решаются аналитически, в отличие от случая топологических дефектов. Данный вид дополнительных источников возмущения хорошо вписывается в инфляционную концепцию. Например, результаты коллаборации BICEP2 для B-моды поляризации реликтового излучения [9] лучше объясняются с точки зрения модели, где на фоне инфляции присутствует дополнительное самоорганизующееся скалярное поле, также выступающее источником возмущений [10], чем если описывать результаты чисто инфляционной теорией. Другим примером необходимости учета возможного наличия космологических дефектов является генерация гравитационных волн. Было показано, что в рамках модели самоорганизующегося скалярного поля генерируются гравитационные волны с плоским спектром [11, 12]. Поскольку экспериментальное обнаружение гравитационных волн было бы серьезным аргументом в пользу теории инфляции, необходимо учитывать, что посторонние источники могут давать свой вклад в спектр мощности, который необходимо будет выделить из общего результата. Подобный анализ проведен для самоорганизующегося скалярного поля, например, в [13].

Рассмотрим безмассовое N–компонентное скалярное поле Φ с потенциалом $V(\Phi) = \lambda/4 \cdot (\Phi^2 - v^2)^2$, где v - вакуумное значение поля Φ. Пусть в некоторый момент времени ($T \ll v$) происходит фазовый переход, в результате которого $O(N)$-симметрия системы спонтанно нарушается до $O(N-1)$. Будем считать, что фазовый переход происходит после окончания инфляции. Это равносильно условию $H \gg v$. Скалярное поле фиксируется на вакуумном многообразии с помощью условия $\Phi^\dagger\Phi = v^2$. Поскольку фазовый переход происходит после окончания инфляции, до фазового перехода направление поля произвольно меняется от точки к точке. После нарушения симметрии системы, поле в причинно-связанных областях переориентируется, так чтобы система обладала минимальной энергией. При этом направления $\Phi(\mathbf{x}, \eta)$ и $\Phi(\mathbf{x}', \eta)$ в точках вакуумного многообразия, расстояние между которыми превышает размер горизонта $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| > H^{-1}$, не скоррелированы вследствие причинной несвязанности. Иными словами, за горизонтом направление поля изменяется случайным образом от точки к точке, а под горизонтом поле полностью упорядочено. С образовавшимися в результате спонтанного нарушения симметрии $N-1$ голдстоуновскими бозонами связана энергия $\rho \sim (\nabla\Phi)^2$. По мере того как Вселенная расширяется, под горизонт входят новые области, где поле может быть направлено произвольным образом. Стремясь к минимуму энергии, поле переориентируется так, чтобы в рамках причинно-связанной области оно было упорядочено. Вследствие такой перестройки выделяется энергия и образуются неоднородности плотности энергии фонового вещества. Также генерируются возмущения метрики, где векторные возмущения оказываются существенными. Их вклад в B-моду поляризации фотонов оказывается больше вклада от тензорных возмущений [10] (то же оказывается справедливым для вклада в анизотропию температуры [14]).

3 Анизотропия реликтового излучения.

Современная Вселенная заполнена газом невзаимодействующих фотонов – реликтовым излучением. Реликтовое излучение является одним из ценнейших источников данных в космологии. С одной стороны, неоднородности температуры и поляризации фотонов малы, что позволяет описывать их в рамках линейной теории возмущений. С другой стороны, анизотропии фотонного газа были с высокой степенью точности измерены целым рядом различных экспериментов [1, 15, 16]. Самые актуальные результаты опубликованы коллаборацией Planck [16]. Анизотропия реликтового излучения содержит важную информацию о состоянии Вселенной эпохи рекомбинации и последующих этапах развития. После рекомбинации, происходящей при температуре $T \simeq 0,25$, Вселенная становится практически прозрачной для фотонов первичной плазмы. С этого момента и до сегодняшнего дня эти фотоны распространяются во Вселенной практически свободно (их длина свободного пробега велика по сравнению с размером горизонта H_0^{-1}). Распределение фотонов по энергиям имеет тепловой планковский спектр, характеризуемый средней температурой фотонов

$$T_0 = 2,725 \pm 0,001 K.$$

Экспериментально установлено, что средняя температура и поляризация зависят от направления прихода фотонов. Наибольшая угловая вариация температуры $\delta T/T \sim 10^{-3}$ имеет дипольный характер и связана с движением Земли. Более мелкая структура вариации имеет амплитуду $\delta T/T \sim 10^{-5}$ и является основным объектом исследования.

Данные по изучению зависимости температуры реликтового излучения от направления прихода фотона $\mathbf{n}$ представляют в виде зависимости $T_0(\mathbf{n})$, а также вводят отклонение $T_0(\mathbf{n})$ от среднего значения $\delta T_0(\mathbf{n}) \equiv T_0(\mathbf{n}) - T_0$. Относительную флуктуацию температуры раскладывают по сферическим гармоникам $Y_{lm}(\mathbf{n})$, которые образуют полную систему на сфере,

$$\frac{\delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}), \tag{1}$$

где коэффициенты разложения a_{lm} удовлетворяют условию действительности $a^*_{l,m} = (-1)^m a_{l,-m}$ и статистической независимости для различных l и m $\langle a_{lm} a^*_{l'm'} \rangle = C_l \cdot \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ (следствие гауссовости флуктуаций температуры). Предположение, что флуктуации температуры $\delta T(\mathbf{n})$ являются случайным гауссовым полем, согласуется с наблюдательными данными. Сами коэффициенты a_{lm} дают представление об амплитуде флуктуаций на угловых размерах $\sim \pi/l$. Для коэффициентов C_l справедливо выражение

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \int d^3k \sum_{m=-l}^{m=l} \left\langle |a_{lm}(\mathbf{k})|^2 \right\rangle . \tag{2}$$

Они определяют корреляцию между флуктуациями температуры в разных направлениях

$$\langle \delta T(\mathbf{n}') \delta T(\mathbf{n}'') \rangle = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l \, P_l(\cos\theta), \tag{3}$$

где P_l – полиномы Лежандра, θ – угол между направлениями $\mathbf{n}'$ и $\mathbf{n}''$. Получение результатов рассчета для флуктуации температуры фотонов в терминах C_l удобно, поскольку экспериментальные данные, как правило, представлены в виде зависимости величины $l(l+1)C_l$ от l. Характер зависимости C_l от мультиполей l, определяется рядом параметров ранней Вселенной, поэтому измерение спектра анизотропии несет космологически важную информацию.

В работе основное внимание будет уделено вкладу в анизотропию температуры реликтового излучения от эффекта Доплера, вычисленного для векторных возмущений в рамках модели с самоорганизующимся скалярным полем на фоне инфляции. Вклад векторных возмущений в эффект Доплера для малых l будет вычислен для двух сценариев с различным временем фазового перехода (после окончания инфляции и во время инфляции). Это позволит, исходя из вычисленных спектров мощности флуктуации температуры, получить ограничение для вакуумного среднего скалярного поля v и параметра Хаббла H в конце эпохи инфляции.

Мы будем рассматривать плоскую Вселенную с метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера $ds^2 = a^2(\eta)\cdot\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$, где $\eta_{\mu\nu} = diag(+1, -1, -1, -1)$, η – конформное время. Параметр Хаббла в терминах конформного времени: $H = a'/a^2$, где штрих обозначает производную по конформному времени.

4 Модель со скалярным полем с нарушенной симметрией $O(N)$.

4.1 Решение уравнения движения.

Лагранжиан теории $N-$компонентного безмассового скалярного поля $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N)$, обладающего $O(N)$–симметрией

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} \partial_\mu\phi_\alpha\partial^\mu\phi_\alpha - \frac{\lambda}{4}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\phi_\alpha\phi_\alpha - v^2\right)^2 . \tag{4}$$

Будем рассматривать случай $N > 4$, когда в пространстве размерности $3+1$ не возникает топологических дефектов. Также будем считать, что фазовый переход со спонтанным нарушением $O(N)$-симметрии до $O(N-1)$ происходит после окончания инфляции. Образовавшиеся голдстоуновские бозоны описываются нелинейной сигма-моделью, где условие фиксации поля на вакуумном многообразии ($(N-1)$–мерной сфере)

$\sum\limits_{\alpha=1}^{N} \phi_\alpha^2 = v^2$ вводится с помощью множителя Лагранжа [17]

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} \partial_\mu\phi_\alpha\partial^\mu\phi_\alpha + \frac{\lambda}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\phi_\alpha^2 - v^2\right). \tag{5}$$

Варьируя (5) по ϕ и λ и вводя обозначение $\beta_\alpha \equiv \phi_\alpha/v$, получим уравнение для нормированных компонент поля Φ

$$\Box\beta_\alpha + (\partial_\mu\beta\cdot\partial^\mu\beta)\beta_\alpha = 0, \tag{6}$$

где

$$(\partial_\mu\beta\cdot\partial^\mu\beta) = \sum_\alpha g^{\mu\nu}\partial_\mu\beta^\alpha(\mathbf{x},\eta)\partial_\nu\beta^\alpha(\mathbf{x},\eta), \tag{7}$$

$$\sum_\alpha \beta^\alpha(\mathbf{x},\eta)\beta^\alpha(\mathbf{x},\eta) = 1. \tag{8}$$

Полученное уравнение нелинейно, но в пределе больших N нелинейный член можно заменить его средним по ансамблю от одной из компонент поля [18]

$$\sum_\alpha g^{\mu\nu}\partial_\mu\beta^\alpha(\mathbf{x},\eta)\partial_\nu\beta^\alpha(\mathbf{x},\eta) = N\left\langle g^{\mu\nu}\partial_\mu\beta^1(\mathbf{x},\eta)\partial_\nu\beta^1(\mathbf{x},\eta)\right\rangle = w^2(\eta). \tag{9}$$

В последнем равенстве (9) среднее по ансамблю заменено пространственным средним (эргодическая гипотеза). Т.к. из размерных соображений $w^2(\eta)$ может быть пропорционально $a\cdot H^2$ и $a\cdot H'$, то

$$w^2(\eta) = w_0^2\,\eta^{-2}, \tag{10}$$

где w_0^2 – действительная положительная константа, которая находится самосогласованно.

Заменяя нелинейный член в (6) и переходя к Фурье-представлениям, получим

$$\eta^2\beta_\alpha'' + 2\gamma\eta\beta_\alpha' + (k^2\eta^2 - w_0^2)\beta_\alpha = 0, \tag{11}$$

где штрихи обозначают производную по конформному времени, а $\gamma = \frac{d\log a}{d\log\eta}$. На радиационно-доминированной стадии $\gamma_{RD} = 1$, а на пылевидной стадии $\gamma_{MD} = 2$. В результате применения приближения (9), полученное уравнение движения для нормированного поля β можно решить точно. Общий вид решения уравнения (11)

$$\beta_\alpha(\mathbf{k}, \eta) = (k\eta)^{\frac{1}{2}-\gamma} \left[C_1 J_\nu(k\eta) + C_2 Y_\nu(k\eta)\right], \tag{12}$$

где

$$\nu^2 = \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)^2 + w_0^2. \tag{13}$$

Выбирая $\nu > 0$ и учитывая, что в таком случае $Y_\nu(k\eta)$ расходится при малых значениях аргумента, получим

$$\beta_\alpha(\mathbf{k}, \eta) = (k\eta)^{\frac{1}{2}-\gamma} C_k J_\nu(k\eta), \tag{14}$$

где $C_k = C_k(k)$ находится из начальных условий и не зависит от η.

Как отмечалось выше, в случае фазового перехода после окончания инфляции, поле β_α под горизонтом упорядочено, а за горизонтом имеет произвольное направление в различных точках. Это соответствует начальным условиям

$$\langle \beta_a(\mathbf{k}, \eta_*) \beta_b(\mathbf{k}', \eta_*) \rangle = \begin{cases} \frac{C}{(2\pi)^3}\, \delta_{ab}\, \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') & , k\eta_* \le 1 \\ 0 & , k\eta_* > 1, \end{cases} \tag{15}$$

где η_* – начальный момент времени сразу после фазового перехода, а константа C находится из условия $\beta^2 = 1$. Вообще говоря, условие (5) накладывает связь между различными компонентами β_α, но это вносит малые поправки, которыми мы будем пренебрегать. Будем считать, что поле β является гауссовым [19]. Это позволит вычислять корреляторы более высоких порядков с помощью теоремы Вика.

Из условия нормировки $\beta^2 = 1$ получаем выражение для C

$$\beta^2(\mathbf{x},\eta_*) \equiv \left\langle \beta^2(\mathbf{x},\eta_*) \right\rangle \simeq \int d^3k\, d^3k' \,\langle \beta_\alpha(\mathbf{k},\eta_*)\beta_\alpha(\mathbf{k'},\eta_*)\rangle \; e^{i\mathbf{x}(\mathbf{k}+\mathbf{k'})} =$$

$$= \frac{C}{6\pi^2\eta_*^3} = 1, \quad (16)$$

откуда $C = 6\pi^2\eta_*^3$.

Величины C_k, входящие в (14), имеют явный вид

$$C_k(k) = \frac{\beta_\alpha(\mathbf{k},\eta_*)}{(k\eta_*)^{\frac{1}{2}-\gamma}\, J_\nu(k\eta_*)} \simeq \frac{\beta_\alpha(\mathbf{k},\eta_*)}{(k\eta_*)^{\frac{1}{2}-\gamma}\,(k\eta_*)^\nu}. \quad (17)$$

Чтобы вакуумное среднее v не зависело от времени и решение (14) было нормировано на 1, $\langle \beta^2(\mathbf{k},\eta)\rangle = 1$, необходимо потребовать:

$$\left\langle \beta^2(\mathbf{k},\eta) \right\rangle = 6\pi^2\eta_*^3\, A \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{\eta}{\eta_*}\right)^{(1-2\gamma)} \frac{J_\nu^2(k\eta)}{(k\eta_*)^{2\nu}} \simeq$$

$$\simeq 3A\left(\frac{\eta}{\eta_*}\right)^{2(1+\gamma-\nu)} \int\limits_0^\infty dy y^{2(1-\nu)} J_\nu^2(y) = 1, \quad (18)$$

где добавлен нормировочный множитель A. Из условия (18) получаем

$$\nu = \gamma + 1, \quad (19)$$

$$A = \frac{4\Gamma(2\nu - 1/2)\,\Gamma(\nu - 1/2)}{3\Gamma(\nu - 1)}. \quad (20)$$

Учитывая (13), находим явный вид константы w_0^2

$$w_0^2 = 3(\gamma + 1/4). \quad (21)$$

Из начального условия для $\beta_\alpha(\mathbf{k},\eta)$, (16) и (17), следует начальное условие на C_k

$$\langle C_k\, C_{k'}\rangle = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{6\pi^2}{k^3}\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k'}) & , k\eta_* \le 1 \\ 0 & , k\eta_* > 1. \end{cases} \quad (22)$$

В результате, решение (14) можно представить в виде

$$\beta_\alpha(\mathbf{k},\eta) = \sqrt{A}(k\eta)^{\frac{1}{2}-\gamma} C_k J_\nu(k\eta). \quad (23)$$

4.2 Тензор энергии-импульса скалярного поля ϕ_α.

В терминах нормированного поля β_α тензор-энергии импульса имеет вид

$$\Theta_{\mu\nu}(\beta) = v^2 \left[\partial_\mu \beta^\alpha \partial_\nu \beta^\alpha - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\lambda \beta^\alpha \partial^\lambda \beta^\alpha\right] \tag{24}$$

Разложим тензор энергии-импульса по спиральным компонентам космологических возмущений. В рамках линейной по возмущениям теории уравнения для различных спиральностей разделяются на независимые и могут быть решены поотдельности. Везде далее, если не оговорено обратное, выражения записаны в Фурье-представлении, $\mathbf{k}$ – конформный импульс, $k = |\mathbf{k}|$.

В векторном секторе компоненты $\Theta_{\mu\nu}(\beta)$ имеют вид

$$\Theta^{(V)}_{00}(\beta) = 0\,, \qquad \Theta^{(V)}_{0i}(\beta) = -\frac{v^2}{a^2} w^{(v)}_i\,,$$

$$\Theta^{(V)}_{ij}(\beta) = -v^2 \frac{i}{2}\left(w^{(\pi)}_i k_j + w^{(\pi)}_j k_i\right), \tag{25}$$

где $w^{(v)}_i$ и $w^{(\pi)}_i$ – поперечные векторы ($k^j w^{(v)}_j = k^j w^{(\pi)}_j = 0$), соответствующие вкладам векторных возмущений в скорость потока частиц и тензор анизотропных натяжений.

Найдем как ведут себя векторные возмущения метрики в присутствии источников в виде скалярного поля β_α. Запишем явный вид возмущенной метрики Фридмана–Робертсона–Уокера в конформной ньютоновой калибровке

$$ds^2 = a^2[(1 + 2(\Psi_s + \Psi_f))d\eta^2 - \\ - (1 - 2(\Phi_s + \Phi_f))\delta_{ij} dx^i dx^j - 2\Sigma_i dt dx^i + 2h_{ij} dx^i dx^j]. \tag{26}$$

В (26) величины Φ_s и Ψ_s относятся к вкладу в гравитационные потенциалы от скалярного поля, а Φ_f и Ψ_f описывают вклад в возмущения от доминирующего вещества и других типов материи (радиации и пыли); Σ_i и h_{ij} описывают векторные и тензорные возмущения метрики, которые также являются суммой двух компонент от разных источников. Т.к. нас интересуют только векторные возмущения, выпишем возмущения метрики в векторном секторе:

$$h_{00}^{(V)} = 0, \quad h_{0i}^{(V)} = -\Sigma_i, \quad h_{ij}^{(V)} = 0. \tag{27}$$

Уравнения Эйнштейна, записанные в линейном порядке по возмущениям, для векторных мод $\Sigma_i^{(s)}(k,\eta)$

$$(0i): \qquad -k^2\Sigma_i^{(s)} = 4\epsilon w_i^{(v)}, \tag{28}$$

$$(ij): \qquad \partial_0\Sigma_i^{(s)} + 2\frac{a'}{a}\Sigma_i^{(s)} = -2\epsilon a^2 w_i^{(\pi)}, \tag{29}$$

где ∂_0 означает производную по конформному времени и введен малый параметр $\epsilon = 4\pi\, G\, v^2$. Уравнение (28) следует рассматривать как определение $\Sigma_i^{(s)}(k,\eta)$, поскольку, вообще говоря, уравнения Эйнштейна должны записываться для суммы вкладов от доминирующего вещества и дополнительных источников.

Для получения выражения для $\Sigma_i^{(s)}$ достаточно получить явный вид источников в правой части уравнений (28). Поскольку $\Theta_{\mu\nu}(\beta)$ не содержит фоновой составляющей, тензор энергии-импульса поля β в линейном порядке по возмущениям удовлетворяет невозмущенному закону ковариантного сохранения. Выразим $w_i^{(v)}$ из (25):

$$w_i^{(v)} = -\frac{a^2}{v^2}\Theta_{0i}(\beta) \tag{30}$$

Из (24) следует

$$w_i^{(v)}(\mathbf{k},\eta) = -\int d^3q(-iq_i)\partial_0\beta(\mathbf{k}-\mathbf{q},\eta)\cdot\beta(\mathbf{q},\eta), \tag{31}$$

поскольку при переходе к Фурье-представлению, произведение полей, входящее в тензор-энергии, превращается в свертку. Зная $w_i^{(v)}$, с помощью ковариантного сохранения $\Theta_{\mu\nu}$ можно найти выражение $w_i^{(\pi)}$. Приведем здесь только закон сохранения, связывающий $w_i^{(\pi)}$ и $w_i^{(v)}$:

$$\partial_0 w_i^{(v)} + 4\frac{a'}{a} w_i^{(v)} - \frac{1}{2} \triangle w_i^{(\pi)} = 0. \tag{32}$$

Явное выражения для $w_i^{(\pi)}$ нам не понадобится.

5 Вклад в анизотропию температуры реликтового излучения от векторных возмущений.

В этом разделе будет получен вклад от векторных возмущений метрики Σ_i в выражение для относительного отклонения температуры реликтового излучения от среднего значения. При вычислении отклонения температуры будет использовано приближение мгновенного отщепления фотонов, в рамках которого фотоны первичной плазмы описываются приближением идеальной жидкости вплоть до момента рекомбинации. После отщепления фотоны движутся по геодезическим. Взаимодействиями фотонов в пострекомбинационной Вселенной мы будем пренебрегать. Вычисления аналогичны проделанным в [20].

В силу инвариантности действия для безмассовых частиц относительно преобразований $g_{\mu\nu} \to a^2 g_{\mu\nu}$, $ds \to a^2 ds$, геодезические $x^\mu(\tau)$, вычисленные в конформных координатах, совпадают с геодезическими $x^\mu(\lambda)$, вычисленными в пространстве-времени с метрикой $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}/a^2$. Поэтому для удобства дальнейшие вычисления будут проводиться в метрике

$\gamma_{\mu\nu}$, при этом в качестве времени, координат и импульсов будут пониматься конформные величины.

Траектория движения фотона является решением уравнения геодезической

$$\frac{d^2x}{d\lambda^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\frac{dx^{\rho}}{d\lambda} = 0, \tag{33}$$

где λ – параметр вдоль мировой линии, а символы Кристоффеля $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$ вычисляются по метрике $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$.

С учетом определения импульса фотона

$$P_{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}, \tag{34}$$

получим из (33) уравнения для нулевой компоненты импульса:

$$\frac{dP^0}{d\eta} + \Gamma^{0}_{\nu\rho}\frac{P^{\nu}}{P^0}\frac{P^{\rho}}{P^0} = 0\,, \tag{35}$$

где P_{μ} зависит от конформного времени, а не от параметра λ вдоль траектории

$$\frac{dP_{\mu}}{d\lambda} = \frac{dx^0}{d\lambda}\frac{dP_{\mu}}{dx^0} = P_0\frac{dP_{\mu}}{d\eta}. \tag{36}$$

Символы Кристоффеля, вычисленные по метрике $\gamma_{\mu\nu}$, в линейном порядке по возмущениям с учетом (27):

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}\partial_0 h_{00} = 0, \quad \Gamma^0_{0i} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00} = 0,\\
&\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}[\partial_i h_{0j} + \partial_j h_{0i} - \partial^0 h_{ij}] = -\frac{1}{2}[\partial_i \Sigma_j + \partial_j \Sigma_i]\,.
\end{aligned} \tag{37}$$

Из (33) следует, что в нулевом порядке по возмущениям $P_0 = const$ и $P_i = const$, а $n_i = P_i/P_0$ соответствует единичному вектору в направлении движения фотона. Тогда (35) принимает вид:

$$\frac{dP^0}{d\eta} - \frac{1}{2}[\partial_i \Sigma_j + \partial_j \Sigma_i] n^i n^j P_0 = 0\,. \tag{38}$$

Проинтегрируем (38) вдоль траектории фотона:

$$\frac{P^0(\eta_0) - P^0(\eta_r)}{P^0(\eta_r)} = \int\limits_{\eta_r}^{\eta_0} \frac{1}{2} n^i [\partial_i \Sigma_j + \partial_j \Sigma_i] n^j d\eta \tag{39}$$

Связь частоты фотона, его 4-импульса и скорости, справедливая в произвольной системе отсчета [20]:

$$\Omega = U_\mu P^\mu. \tag{40}$$

В линейном порядке по возмущениям $U_0^{(V)} = 1$, $U_i^{(V)} = -v^i$, где v^i - возмущение скорости. Тогда

$$\Omega = P^0(1 - v^i n^i). \tag{41}$$

Относительная разность частот фотона, испущенного в направлении $\mathbf{n}$ в момент времени η_r и поглощенного в момент времени η_0:

$$\frac{\Omega(\mathbf{n}, \eta_0) - \Omega(\mathbf{n}, \eta_r)}{\Omega(\mathbf{n}, \eta_r)} = \frac{1}{2} \int\limits_{\eta_r}^{\eta_0} n^i [\partial_i \Sigma_j + \partial_j \Sigma_i] n^j d\eta + \mathbf{nv}(\eta_r) - \mathbf{nv}(\eta_0). \tag{42}$$

Относительный сдвиг конформной частоты оказался пропорциональным самой частоте, поэтому форма спектра фотонов после отщепления останется неизменной. Следовательно, в расширяющейся Вселенной физический спектр фотонов - планковский с $T \propto 1/a$. Формула для относительного изменения температуры имеет такой же вид, как и (42). С учетом

$$n_i = \frac{P^i}{P^0} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dx^0} = \frac{dx^i}{dx^0}\,, \tag{43}$$

выражение для относительной флуктуации температуры в случае векторных возмущений принимает вид:

$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}, \eta_0) = \mathbf{nv}(\eta_r) + \int\limits_{\eta_r}^{\eta_0} \partial_0 \Sigma_j n^j d\eta. \tag{44}$$

Первое слагаемое в (44) соответствует эффекту Доплера, второе слагаемое является аналогом интегрального эффекта Сакса-Вольфа для векторных мод. В выражении (44) опущено слагаемое $\mathbf{nv}(\eta_0)$, которое также обусловлено эффектом Доплера и возникает из-за движения Земли относительно реликтового излучения. Этот вклад не несет космологически интересной информации и вычитается при анализе анизотропии температуры. Скорость $\mathbf{v}$, входящюю в (44), можно вычислить из закона ковариантного сохранения тензора энергии-импульса, включающего в себя вклады от скалярного поля β и барион-фотонной плазмы.

5.1 Вычисление скорости фотонов в момент рекомбинации.

Отщепление фотонов происходит на материально-доминированной стадии, когда поведение масштабного фактора определяется доминирующим веществом – пылью, а скалярное поле β и барион-фотонная плазма считаются субдоминантными компонентами. До рекомбинации фотоны, электроны и барионы активно взаимодействуют, вследствие чего можно считать барион-фотонную плазму единой средой в том смысле, что скорости барионной (B) и фотонной (γ) компонент совпадают: $v_B = v_\gamma = v_{(B\gamma)}$. Такое приближение справедливо до момента рекомбинации для мод с достаточно большой длиной волны ($k \geq 30/\eta_r$) [20]. Таким образом, до момента рекомбинации можно описывать барион фотонную плазму в рамках приближения идеальной жидкости, с учетом равенства скоростей двух компонент.

Для барион-фотонной плазмы на пылевидной стадии справедливы законы ковариантного сохранения как для суммы вкладов барионов и фотонов, так и по отдельности. Последнее является следствием того, что барионы на интересующей нас стадии являются нерелятивистскими. Поэтому перенос энергии от фотонов к барионам и наоборот отсутствует, а следовательно ковариантный закон сохранения энергии выполняется по отдельности для барионов и фотонов.

Записывая закон сохранения тензора энергии-импульса, включающего в себя вклады от барион-фотонной компоненты и скалярного поля β, можно выразить возмущения скорости фотонов в момент рекомбинации - $\mathbf{v}(\eta_r)$.

Ковариантное сохранение тензора энергии-импульса (пространственная компонента):

$$\nabla_\mu T^\mu_i = \partial_\mu T^\mu_i + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_i - \Gamma^\lambda_{\mu i} T^\mu_\lambda, \tag{45}$$

$$T^\mu_i = \Theta^i_\mu(\beta) + T^\mu_{i\,(B)} + T^\mu_{i\,(\gamma)}. \tag{46}$$

Символы Кристоффеля для метрики $g_{\mu\nu} = a^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$:

$$\Gamma^0_{0i} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00} - \frac{a'}{a} h_{0i}\,, \quad \Gamma^k_{0i} = \frac{a'}{a}\delta^k_i - \frac{1}{2}h'_{ik} + \frac{1}{2}(\partial_k h_{0i} - \partial_i h_{0k})\,, \tag{47}$$

$$\Gamma^0_{ji} = \frac{a'}{a}(1 - h_{00})\delta^i_j - \frac{a'}{a}h_{ij} - \frac{1}{2}h'_{ij} + \frac{1}{2}(\partial_i h_{0j} + \partial_j h_{0i})\,, \tag{48}$$

$$\Gamma^k_{ji} = -\frac{1}{2}(\partial_j h_{ki} + \partial_i h_{kj} - \partial_k h_{ij}) + \frac{a'}{a}h_{k0}\,\delta^i_j\,, \tag{49}$$

$$\Gamma^\mu_{\mu 0} = 4\frac{a'}{a} + \frac{1}{2}h'_{00} - \frac{1}{2}h'_{ii}\,, \quad \Gamma^\mu_{\mu j} = \frac{1}{2}\partial_j h_{00} - \frac{1}{2}\partial_j h_{ii}\,. \tag{50}$$

Здесь учтены члены нулевого и первого порядка малости.

Для векторного сектора сумма тензоров энергии-импульса барион-фотонной плазмы и скалярного поля β имеет вид:

$$\begin{aligned} T^{(V)}_{00} &= \rho, \quad T^{(V)}_{0i} = -(\rho + p)v_i - M^2\omega^{(v)}_i, \\ T^{(V)}_{ij} &= -p\,\delta^i_j - \frac{M^2}{2}[\partial_i \omega^{(\pi)}_j + \partial_j \omega^{(\pi)}_i]\,, \end{aligned} \tag{51}$$

где $\rho = \rho_B + \rho_\gamma, \quad p = p_\gamma = \frac{1}{3}\rho_\gamma$.

Подставляя (47)-(50) и (51) в (45), а также используя закон ковариантного сохранения (32) для $\omega_i^{(\pi)}$, получим:

$$\partial_0((\rho+p)v_i) + 4\frac{a'}{a}(\rho+p)v_i = -\frac{a'}{a}(\rho+p)\Sigma_i \tag{52}$$

Учитывая законы сохранения энергии для барионов $\rho'_B = -3\frac{a'}{a}\rho_B$ и фотонов $\rho'_\gamma = -4\frac{a'}{a}\rho_\gamma$, преобразуем (52) к виду

$$v'_{i(B\gamma)} + \frac{a'}{a}\frac{R_B}{1+R_B}v_{i(B\gamma)} = -\frac{a'}{a}\Sigma_i\,, \tag{53}$$

где введено обозначение $R_B(\eta) = \frac{3\rho_B}{4\rho_\gamma}$. Оценка численного значения величины R_B на момент последнего рассеяния фотонов [20]: $R_B(\eta_r) = 0,48$. Совершая замену $R_B(\eta) = R_B(\eta_r)\frac{a(\eta)}{a(\eta_r)}$, где η_r – момент рекомбинации, находим решение уравнения (53)

$$v_i^{B\gamma}(\mathbf{k},\eta) = -\frac{2}{\left(R_B(\eta_r)\left(\frac{\eta}{\eta_r}\right)^2+1\right)}\int\limits_0^\eta \frac{d\eta'}{\eta'}\left(R_B(\eta_r)\left(\frac{\eta'}{\eta_r}\right)^2+1\right)\Sigma_i(\mathbf{k},\eta'), \tag{54}$$

где мы воспользовались известным поведением масштабного фактора на пылевидной стадии: $a = const\cdot\eta^2$. Скорость фотонов в момент рекомбинации дается выражением

$$v_i^{B\gamma}(\mathbf{k},\eta_r) = -\frac{2}{(R_B(\eta_r)+1)}\int\limits_0^{\eta_r}\frac{d\eta}{\eta}\left(R_B(\eta_r)\left(\frac{\eta}{\eta_r}\right)^2+1\right)\Sigma_i(\mathbf{k},\eta), \tag{55}$$

Интеграл по конформному времени в $v_i^{B\gamma}$ можно вычислить аналитически. Для это нужно выразить $\Sigma_i(\mathbf{k},\eta)$ в терминах поля β. Используя (28), (31) и (23), перепишем $\Sigma_i(\mathbf{k},\eta)$ в виде

$$\Sigma_i(\mathbf{k},\eta) = -\frac{4\epsilon}{k^2}A\int d^3q(-iq_i)C_qC_{k-q}q^{1/2-\gamma}|\mathbf{k}-\mathbf{q}|^{3/2-\gamma}\eta^{1-2\gamma}\times$$
$$\times J_\nu(q\eta)\left[\frac{3}{2}\frac{J_\nu(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|\eta)}{(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|\eta)} - J_{\nu+1}(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|\eta)\right], \tag{56}$$

где использовались (19) и рекуррентное соотношения для производной функции Бесселя $\frac{d}{dx}J_\nu(x) = \frac{\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$. В результате из (55) получим выражение для скорости $v_i^{B\gamma}$

$$v_i^{B\gamma}(\mathbf{k},\eta_r) = \frac{8A\epsilon}{(R_B(\eta_r)+1)}\,\frac{1}{k^2}\int d^3q(-iq_i)C_qC_{k-q}q^{1/2-\gamma}|\mathbf{k}-\mathbf{q}|^{3/2-\gamma}\times$$
$$\times\int_0^{\eta_r}\frac{d\eta}{\eta^{2\gamma}}\left(R_B(\eta_r)\left(\frac{\eta}{\eta_r}\right)^2+1\right)\left[\frac{3}{2}\frac{J_\nu(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|\eta)}{(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|\eta)}\,J_\nu(q\eta) - J_{\nu+1}(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|\eta)\,J_\nu(q\eta)\right]. \tag{57}$$

Рассмотрим большие угловые масштабы, когда $l\eta_r/\eta_0 \leq 1$. Поскольку сферическая функция Бесселя $j_l(k\eta_0)$ близка к нулю при $k\eta_0 < l$ и убывает при $k\eta_0 \gg l$, то основной вклад возмущений с длинами волн $2\pi/k$ приходится на угловые гармоники $l \sim k\eta_0$. Тогда для больших угловых масштабов $k\eta_r \leq 1$. Моды с соответствующими k входят под горизонт на пылевидной стадии ($\gamma = 2$, $\nu = 3$). Поскольку в (57) $k\eta < k\eta_r \leq 1$, то для функций Бесселя справедлива асимптотика при малых значениях аргумента

$$J_\nu(x) \to \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu. \tag{58}$$

Тогда в приближении $l \leq 50$, заменяя функции Бесселя степенными функциями,

$$v_i^{B\gamma}(\mathbf{k},\eta_r) = \frac{8A\epsilon}{(R_B(\eta_r)+1)}\,\frac{1}{k^2}\int d^3q(-iq_i)C_qC_{k-q}q^{-3/2}|\mathbf{k}-\mathbf{q}|^{-1/2}\times$$
$$\times\int_0^{\eta_r}\frac{d\eta}{\eta^4}\left(R_B(\eta_r)\left(\frac{\eta}{\eta_r}\right)^2+1\right)\left[\frac{3}{2}\frac{|\mathbf{k}-\mathbf{q}|^2\eta^2}{3!2^3}\frac{q^3\eta^3}{3!2^3} - \frac{|\mathbf{k}-\mathbf{q}|^4\eta^4}{4!2^4}\frac{q^3\eta^3}{3!2^2}\right]. \tag{59}$$

Интеграл по конформному времени теперь можно вычислить аналитически

$$v_i^{B\gamma}(\mathbf{k},\eta_r)=\frac{A\epsilon}{3(R_B(\eta_r)+1)}\,\frac{1}{2^7\,k^2}\int d^3q(-iq_i)C_qC_{k-q}(q\,|\mathbf{k}-\mathbf{q}|)^{3/2}\eta_r^2\times$$
$$\times\left[\frac{R_B(\eta_r)}{2}+1-\frac{|\mathbf{k}-\mathbf{q}|^2\eta_r^2}{12}\left(\frac{R_B(\eta_r)}{3}+\frac{1}{2}\right)\right] \quad (60)$$

5.2 Вклад эффекта Доплера в спектр анизотропии температуры реликтового излучения.

Вычислим вклад в коэффициенты C_l от эффекта Доплера (44) на больших угловых масштабах. Выберем систему отсчета с центром в точке наблюдения и обозначим за $\mathbf{n}$ вектор в направлении наблюдения. Поскольку до этого $\mathbf{n}$ обозначал направление движения фотона, введем обозначение

$$\Theta_0(\mathbf{n})\equiv\frac{\delta T}{T}(-\mathbf{n},\eta_0). \quad (61)$$

Совершая Фурье-преобразование и используя новое обозначение (61), эффект Доплера в (44) примет вид

$$\Theta_0(\mathbf{n})=\int d^3k e^{i(\eta_0-\eta_r)\mathbf{nk}}n^i v_i^{B\gamma}(\mathbf{k},\eta_r)\,, \quad (62)$$

где учтено, что в правой части (44) $v_i^{B\gamma}=v_i^{B\gamma}(\eta_r,(\eta_0-\eta_r)\mathbf{n})$. Для плоской волны справедливо представление в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$e^{i(\eta_0-\eta)k\mathbf{n_k}\mathbf{n}}=\sum_{l=0}^{\infty}i^l(2l+1)j_l((\eta_0-\eta)k)P_l(\mathbf{n}\mathbf{n_k})\,, \quad (63)$$

где $\mathbf{n_k}=\mathbf{k}/k,\ j_l(x)$ - сферическая функция Бесселя порядка l.

Из (1) и (62) получим выражение для коэффициентов $a_{lm}(\mathbf{k})$

$$a_{lm}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{n}\, Y^*_{lm}(\mathbf{n}) \sum_{l'=0}^{\infty} i^{l'}(2l'+1)P_{l'}(\mathbf{n}\mathbf{n_k})j_{l'}((\eta_0-\eta_r)k)\, n^i\, v_i^{B\gamma}(\mathbf{k},\eta_r)\,. \tag{64}$$

Введем помимо заданного вектора $\mathbf{k}$ два единичных вектора $\mathbf{e^{(1)}}$ и $\mathbf{e^{(2)}}$, которые ортогональны $\mathbf{k}$, друг другу и образуют правую тройку. Поперечный вектор Σ_i можно представить в виде разложения по поляризациям

$$\Sigma_i = \Sigma_+ e_i^+ + \Sigma_- e_i^-\,, \tag{65}$$

где $\mathbf{e}^{\pm} = \mathbf{e^{(1)}} \pm i\mathbf{e^{(2)}}$. Поскольку Σ_i и $v_i^{B\gamma}$ связаны уравнением (55), то раскладывая Σ_i по поляризациям, мы автоматически раскладываем по поляризациям $v_i^{B\gamma}$:

$$v_i^{B\gamma} = v_+^{B\gamma}\, e_i^+ + v_-^{B\gamma}\, e_i^-\,. \tag{66}$$

Подставляя в (64) разложение (66), получим

$$a_{lm}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{n}\, Y^*_{lm}(\mathbf{n}) \sum_{p=0}^{\infty} i^p(2p+1)P_p(\mathbf{n}\mathbf{n_k})j_p((\eta_0-\eta_r)k)\,(v_+^{B\gamma}\, e_i^+\, n_i + v_-^{B\gamma}\, e_i^-\, n_i). \tag{67}$$

Подынтегральное выражение в (2) не зависит от направления вектора $\mathbf{k}$, поэтому вычисления в (67) можно проводить в произвольной системе координат. Выберем сферическую систему координат (θ,φ), с осью направленной вдоль $\mathbf{n_k}$. Тогда $\mathbf{k} = (0,0,k)$, $\mathbf{n}\mathbf{n_k} = \cos\theta$, а свертки с векторами поляризации принимают вид

$$n_i\, e_i^+ = \sin\theta\, e^{i\varphi}\,, \quad n_i\, e_i^- = \sin\theta\, e^{-i\varphi}\,. \tag{68}$$

Сферические гармоники можно записать через полиномы Лежандра:

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\, \sin^{|m|}\theta \cdot \frac{d^{|m|}P_l(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^{|m|}} \cdot e^{im\varphi}. \tag{69}$$

Подставляя (68), (69) в (67) и переходя к интегрированию по (θ, φ), выпишем получившиеся интегралы по угловым координатам

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi e^{-im\varphi}\, e^{\pm i\varphi} = -\frac{1}{i(m\pm 1)} \left(e^{-i(m\pm1)\,2\pi} - e^{-i(m\pm1)\,0}\right), \tag{70}$$

$$\int\limits_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta \sin^2\theta \frac{dP_l(\cos\theta)}{d(\cos\theta)}\, P_{l'}(\cos\theta) =$$
$$= \delta_{l-1,l'} \frac{2l(l+1)}{(2l+1)(2l-1)} \;-\; \delta_{l+1,l'} \frac{2l(l+1)}{(2l+1)(2l+3)}. \tag{71}$$

Из (70) следует, что интеграл по φ отличен от нуля только при $m = \pm 1$. Из (71) получаем связь между l' и l. С учетом ограничений на l, m и известных рекуррентных соотношений для сферических функций Бесселя

$$j_{l-1}(x) \;+\; j_{l+1}(x) = \frac{2l+1}{x}\, j_l(x),$$

коэффициенты a_{lm} принимают вид

$$a_{l,\pm 1}(\mathbf{k}) = i^{l+1}\, 4\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+1)!}{(l-1)!}} \frac{j_l((\eta_0-\eta_r)k)}{(\eta_0-\eta_r)k} \left[(m+1)v_+ - (m-1)v_-\right]. \tag{72}$$

Подставляя (72) в (2),

$$l(l+1)C_l = l^2(l+1)^2 \int\limits_0^{\infty} dk\, k^2\, 2^6\pi^2 \left(\frac{j_l((\eta_0-\eta_r)k)}{(\eta_0-\eta_r)k}\right)^2 \sum_{A=+,-} \langle v_A v_A^* \rangle\,. \tag{73}$$

Используя найденное решение для $v_i^{B\gamma}$ (60) в (73) и снимая суммирование по поляризациям,

$$l(l+1)C_l = l^2(l+1)^2 \frac{A^2\epsilon^2\pi^2}{9(R_B(\eta_r)+1)^2}\frac{\eta_r^4}{2^7}\int\limits_0^\infty \frac{dk}{k^2}\left(\frac{j_l((\eta_0-\eta_r)k)}{(\eta_0-\eta_r)k}\right)^2 \times$$
$$\times \int d^3q(-iq_1)(q\,|\mathbf{k}-\mathbf{q}|)^{3/2}\left[\frac{R_B(\eta_r)}{2}+1-\frac{|\mathbf{k}-\mathbf{q}|^2\eta_r^2}{12}\left(\frac{R_B(\eta_r)}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]\times$$
$$\times \int d^3p(-ip_1)(p\,|{-\mathbf{k}}{-\mathbf{p}}|)^{3/2}\left[\frac{R_B(\eta_r)}{2}+1-\frac{|-\mathbf{k}-\mathbf{p}|^2\eta_r^2}{12}\left(\frac{R_B(\eta_r)}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]\times$$
$$\times \left\langle C_q C_{k-q} C_p C_{-k-p}\right\rangle. \quad (74)$$

Поскольку поле β является случайной гауссовой величиной, то четырехточечный коррелятор вычисляется с помощью теоремы Вика (то же справедливо для коэффициентов C_k (17)). Тогда

$$\left\langle C_q C_{k-q} C_p C_{-k'-p}\right\rangle = \frac{36\pi^2}{(2\pi)^3}\frac{\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')}{q^3|\mathbf{k}-\mathbf{q}|^3}[\delta(\mathbf{q}+\mathbf{p})+\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}+\mathbf{p})]. \quad (75)$$

Представляя $|\mathbf{k}-\mathbf{q}| = \sqrt{k^2+q^2-2kq\mu}$, где $\mu=\cos\theta$, имеем

$$l(l+1)C_l = \frac{\epsilon^2 A^2\pi}{3(R_B(\eta_r)+1)^2}\frac{\eta_r^6}{2^{13}} l^2(l+1)^2 \int\limits_0^\infty \frac{dk}{k^2}\left(\frac{j_l((\eta_0-\eta_r)k)}{(\eta_0-\eta_r)k}\right)^2 \times$$
$$\times \int\limits_{-1}^{1} d\mu \int\limits_0^\infty dq q^4(1-\mu^2)\left[\frac{R_B(\eta_r)}{2}+1-\frac{(k^2+q^2-2kq\mu)\eta_r^2}{12}\left(\frac{R_B(\eta_r)}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]\times$$
$$\times \left(\frac{R_B(\eta_r)}{3}+\frac{1}{2}\right)(2kq\mu-k^2) \quad (76)$$

Переходя в (76) к интегрированию по $q_r \equiv q\eta_r$, необходимо учесть, что на импульсы q в (59) также было наложено условие $q\eta_r \le 1$. Интегралы по q_r и μ берутся аналитически:

$$l(l+1)C_l = \frac{\epsilon^2 A^2\pi}{3(R_B(\eta_r)+1)^2}\frac{\eta_r}{2^{13}} l^2(l+1)^2 \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty dk \left(\frac{j_l((\eta_0-\eta_r)k)}{(\eta_0-\eta_r)k}\right)^2\left[B+\frac{1}{45}\left(\frac{R_B(\eta_r)}{3}+\frac{1}{2}\right)^2 k^2\eta_r^2\right], \quad (77)$$

где $B = \left(\frac{1}{63} + \frac{4}{315}\right)\left(\frac{R_B(\eta_r)}{3} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4}{15}\left(\frac{R_B(\eta_r)}{3} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{R_B(\eta_r)}{1} + 1\right)$.

В оставшемся интеграле по k сделаем замену $u = \frac{k\eta_0}{l}$ и воспользуемся асимптотическим представлением сферической функции Бесселя $j_l((\eta_0 - \eta_r)k)$, справедливым для $l \geq 5$

$$j_l((\eta_0 - \eta_r)k) = \frac{1}{l\sqrt{u}(u^2-1)^{1/4}} \cos\left\{\left(l + \frac{1}{2}\right)\Phi\left[u\left(1 - \frac{\eta_r}{\eta_0}\right)\right]\right\}, \quad (78)$$

где

$$u = \frac{k\eta_0}{l + 1/2}, \qquad \Phi(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \arccos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4}.$$

При интегрировании по u быстро осциллирующие функции усредняются:

$$\cos^2\left\{\left(l + \frac{1}{2}\right)\Phi\left[u\left(1 - \frac{\eta_r}{\eta_0}\right)\right]\right\} \to \frac{1}{2}.$$

Совершив все перечисленные замены в (77), интеграл сведется к виду

$$l(l+1)C_l = \frac{\epsilon^2 A^2 \pi}{3(R_B(\eta_r)+1)^2} \frac{1}{2^{14}} \frac{(l+1)^2}{l} \frac{\eta_r}{\eta_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{\eta_r}{\eta_0}\right)^2} \int\limits_1^\infty \frac{du}{u^3\sqrt{u^2-1}} \times$$
$$\times \left[B + \frac{l^2}{45}\left(\frac{R_B(\eta_r)}{3} + \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\eta_r}{\eta_0}\right)^2 \cdot u^2\right]. \quad (79)$$

Интегрирование по k ведется по области $k\eta_0 > l$. Окончательно получаем для $l(l+1)C_l$

$$l(l+1)C_l = \frac{(4\pi G v^2)^2 A^2 \pi}{3(R_B(\eta_r)+1)^2} \frac{1}{2^{14}} \frac{(l+1)^2}{l} \frac{\eta_r}{\eta_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{\eta_r}{\eta_0}\right)^2} \times$$
$$\times \left[B\frac{\pi}{4} + \frac{l^2}{45}\left(\frac{R_B(\eta_r)}{3} + \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\eta_r}{\eta_0}\right)^2 \frac{\pi}{2}\right]. \quad (80)$$

Входящее в (80) отношение η_0/η_r известно [20] (значение получено при определенном выборе параметров):

$$\frac{\eta_0}{\eta_r} = 49,5. \quad (81)$$

В (80) в явном виде присутствует вакуумное значение скалярного поля ϕ_α, для которого было получено ограничение [12, 18, 22]. Однако, оценка является достаточно грубой, поскольку в выражении для v фигурирует параметр, значение которого может меняться на несколько порядков. Это не позволяет сделать вывод о действительном масштабе v.

Получим ограничение на v из условия, что полученный вклад в анизотропию от векторных возмущений должен быть меньше вклада от скалярных возмущений. Для больших угловых масштабов известно аналитическое выражение для вклада скалярных возмущений в спектр анизотропии температуры [20], при условии плоского спектра мощности первичных возмущений:

$$l(l+1)C_l = \frac{18\pi}{100} A_\Phi, \qquad A_\Phi \equiv \mathcal{P}_\Phi = 1,1 \cdot 10^{-9}. \tag{82}$$

Налагая условие $(l(l+1)C_l)_V < (l(l+1)C_l)_S$, имеем численную оценку вакуумного среднего поля ϕ_α

$$v < 8 \cdot 10^{16} \quad \text{ГэВ}. \tag{83}$$

В результате, ограничение совпадает по порядку с оценкой, приведенной в [12].

6 Оценка параметра Хаббла в конце инфляции.

В предыдущих разделах был рассмотрен случай, когда спонтанное нарушение глобальной симметрии происходит после окончания инфляции. В этом случае к моменту фазового перехода направления поля в различных точках могут сильно отличаться друг от друга ($H \gg v$). Случай, когда $H \ll v$, соответствует фазовому переходу во время эпохи инфляции. На ранних стадиях размер горизонта мал и в рамках небольшой причинно-связанной области отклонения направления поля ϕ_a от некоторого усредненного направления в различных точках будут малы. Т.е. направление поля будет флуктуировать около фиксированного направления. Таким образом, поле, находясь на $(N-1)$–мерной сфере после нарушения симметрии, полностью упорядочено под горизонтом и испытывает небольшие флуктуации для причинно-несвязанных точек.

Определим для этого случая величины β_α как

$$\beta_\alpha = \frac{\phi_\alpha - \phi_0}{v}, \tag{84}$$

где $\phi_0^\dagger = (0, 0, \ldots, v)$ характеризует зафиксированное направление поля. Величины β_α по определению малы. В качестве спектра мощности первичных возмущений β_α можно взять спектр скалярного поля на стадии инфляции в режиме медленного скатывания [20]

$$\mathcal{P}_\varphi(k) = \frac{H_k^2}{(2\pi)^2}, \tag{85}$$

где мы будем пренебрегать зависимостью параметра Хаббла от импульса, т.е. $H_k = H = const$. В результате, начальные условия в виде двухточечного коррелятора для β имеют вид

$$\langle \beta_a(\mathbf{k}, \eta_*) \beta_b(\mathbf{k}', \eta_*) \rangle = \begin{cases} \frac{H^2}{2(2\pi)^3 v^2} \frac{1}{k^3}\, \delta_{ab}\, \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') & , k\eta_* \leq 1 \\ 0 & , k\eta_* > 1. \end{cases} \tag{86}$$

Для такого выбора величин β нелинейный по полю член в уравнении движения становится пренебрежимо малым. Уравнение движения для β сводится к

$$\eta^2 \beta_\alpha'' + 2\gamma\eta\beta_\alpha' + k^2\eta^2\beta_\alpha = 0. \tag{87}$$

Решение (87)

$$\beta_\alpha(\mathbf{k},\eta) = (k\eta)^{\frac{1}{2}-\gamma} D_k J_n(k\eta), \quad n = \gamma - \frac{1}{2}, \tag{88}$$

где аналогично (17)

$$D_k(k) = \frac{\beta_\alpha(k,\eta_*)}{(k\eta_*)^{\frac{1}{2}-\gamma}\,(k\eta_*)^n}, \tag{89}$$

$$\langle D_k\, D_{k'}\rangle = \begin{cases} \frac{H^2}{2(2\pi)^3 v^2}\frac{1}{k^3}\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') & , k\eta_* \le 1 \\ 0 & , k\eta_* > 1. \end{cases} \tag{90}$$

Начальные условия соответствуют полю, упорядоченному под горизонтом и слабо флуктуирующему за горизонтом ($H \ll v$).

Аналогично уже приведенным расчетам, вычислим вклад векторных возмущений метрики в анизотропию температуры. Для этого необходимо вычислить скорость фотонного газа $v_i^{B\gamma}$ (55) для нового определения β (84). Совершая вычисления, аналогичные (56), получим выражение для скорости

$$v_i^{b\gamma}(\mathbf{k},\eta_r) = -\frac{8\epsilon}{(R_B(\eta_r)+1)}\frac{1}{k^2}\int d^3q(-iq_i)D_q D_{k-q}\times$$
$$\times\int\limits_0^{\eta_r}\frac{d\eta}{\eta^{1+2n}}\left(R_B\frac{\eta^2}{\eta_r^2}+1\right)q^{-n}|\mathbf{k}-\mathbf{q}|^{1-n}J_n(q\eta)J_{n+1}(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|\eta). \tag{91}$$

Будем рассматривать мультиполи $l \le 50$, для которых $k\eta_r < 1$. Следовательно, рассматриваемые моды входят под горизонт после эпохи рекомбинации ($n = 3/2$). Снова можно использовать асимптотическое приближение функций Бесселя при малых значениях аргумента. Аналогично (58) - (60), вычисляя интеграл по η аналитически, окончательно получим

$$v_i^{b\gamma}(\mathbf{k},\eta_r) = -\frac{16\epsilon}{45\pi(R_B(\eta_r)+1)}\frac{1}{k^2}\left(\frac{R_B}{3}+1\right)\int d^3q(-iq_i)D_q D_{k-q}|\mathbf{k}-\mathbf{q}|^2. \tag{92}$$

Выражение для коэффициентов C_l для рассматриваемого случая

$$l(l+1)C_l = l^2(l+1)^2 \frac{2^{11}}{45^2\,\pi^3} \frac{H^4\,G^2}{(R_B(\eta_r)+1)^2} \left(\frac{R_B(\eta_r)}{3}+1\right)^2 \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty \frac{dk}{k^2} \left(\frac{j_l((\eta_0-\eta_r)k)}{(\eta_0-\eta_r)k)}\right)^2 \int\limits_{-1}^{1} d\mu \int\limits_0^\infty dq\,(1-\mu^2)\,q\left[|\mathbf{k}-\mathbf{q}| - \frac{q^2}{|\mathbf{k}-\mathbf{q}|}\right]. \quad (93)$$

Совершая замену переменной $q_r \equiv q\eta_r$, интегралы по q_r и μ вычисляются аналитически. Затем, как и в (79), используем асимптотическое представление (78), получим

$$l(l+1)C_l = \frac{(l+1)^2}{l} \frac{2^{10}}{45^2\,\pi^3} \frac{H^4\,G^2}{(R_B(\eta_r)+1)^2} \left(\frac{R_B(\eta_r)}{3}+1\right)^2 \times$$
$$\times \frac{\eta_r}{\eta_0}\left[\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{105}\left(\frac{\eta_r}{\eta_0}\right)^2 l^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\eta_r}{\eta_0}\right) l\right], \quad (94)$$

С помощью вычисленного спектра анизотропии температуры можно получить оценку для параметра Хаббла H, который относится к концу эпохи инфляции.

Известны выражения для спектров мощности тензорных и скалярных возмущений в моделях инфляции [20, 2, 1]. Спектр мощности тензорных возмущений пропорционален квадрату параметра Хаббла

$$\mathcal{P}_T = \frac{16}{\pi} \frac{H_k^2}{M_Pl^2}. \quad (95)$$

Для численной оценки $\mathcal{P}_T$ используем отношение тензорного и скалярного спектров $r \equiv \mathcal{P}_T/\mathcal{P}_\mathcal{R}$. Современные экспериментальные ограничения для параметра r и скалярного спектра известны [1]:

$$r < 0,12\,, \qquad \ln(10^{10} A_\mathcal{R}) = 3,089^{+0,024}_{-0,027}\,, \quad n_s = 0,9603 \pm 0,0073\,. \quad (96)$$

Из (96) следует модельно-независимое ограничение для параметра Хаббла незодолго до окончания стадии инфляции:

$$H < 1 \cdot 10^{-5}\,M_{Pl}. \quad (97)$$

Получим ограничение на параметр Хаббла, исходя из вычисленного спектра анизотропии температуры (94). Как и ранее, вклад векторных возмущений в анизотропию температуры должен быть меньше, чем вклад скалярных мод (82). Отсюда ограничение на H

$$H < 1 \cdot 10^{-2}\, M_{Pl}. \tag{98}$$

Ограничение более слабое, нежели чем (97), полученное из экспериментальных данных. Это означает, что вклад в анизотропию температуры реликтового излучения от эффекта Доплера в случае векторных возмущений мал для $l \leq 50$ и реальных значений параметра Хаббла.

7 Заключение.

В работе рассмотрены две модели генерации векторных мод, в которых источником возмущений выступает безмассовое скалярное поле со спонтанно нарушенной $O(N)$–симметрией.

В рамках первой модели, где направление поля за горизонтом сильно некоррелировано, рассчитан вклад векторных возмущений в анизотропию реликтового излучения. Внимание сконцентрировано на эффекте Доплера на больших угловых масштабах. Из сравнения с известными ограничениями на вклады в анизотропию скалярных и тензорных мод, получено ограничение на вакуумное среднее скалярного поля, которое близко к известному в литературе.

Во второй модели, где поле за горизонтом флуктуирует около фиксированного направления, произведены аналогичные расчеты вклада векторных возмущений в спектр мощности флуктуаций температуры и показано, что с учетом ограничений на вклад тензорных и скалярных мод, вклад эффекта Доплера в случае векторных возмущений оказывается мал на больших угловых масштабах.

Список литературы.

[1] Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation. arXiv:1303.5082v2 [astro-ph.CO].

[2] E. W. Kolb and M. S. Turner, The Early Universe, Redwood City, California, Addison-Wesley (1990).

[3] P. J. E. Peebles, Principles Of Physical Cosmology, Princeton, Princeton University Press (1993).

[4] R. Durrer, The Cosmic Microwave Background.

[5] Wayne Hu, Martin White, A CMB Polarization Primer, arXiv:astro-ph/9706147v1.

[6] T. Kibble, Phys.Rept. 67, 183 (1980), 10.1016/0370- 1573(80)90091-5.

[7] R. Durrer, M. Kunz, A. Melchiorri, arXiv:astro-ph/0110348v2.

[8] R. Durrer, M. Sakellariadou, arXiv:astro-ph/9702028

[9] BICEP2 I: Detection Of B-mode Polarization at Degree Angular Scales, arXiv:1403.3985 [astro-ph.CO].

[10] Ruth Durrer, Daniel G. Figueroa, Martin Kunz, arXiv:1404.3855 [astro-ph.CO].

[11] Katherine Jones-Smith, Lawrence M. Krauss, Harsh Mathur, arXiv:0712.0778 [astro-ph].

[12] L.M. Krauss, Phys. Lett. B284, 229 (1992).

[13] Lawrence M. Krauss, Katherine Jones-Smith, Harsh Mathur, James Dent, arXiv:1003.1735.

[14] Elisa Fenu, Daniel G. Figueroa, Ruth Durrer, Juan Garcia-Bellido, Martin Kunz, arXiv:1311.3225 [astro-ph.CO].

[15] WMAP Collaboration, E. Komatsu et al., Astrophys. J. Suppl. 192, 18 (2011), [arXiv:1001.4538], 10.1088/0067-0049/192/2/18.

[16] Planck Collaboration, P. Ade et al., arXiv:1303.5062v2 [astro-ph.CO].

[17] R. Rajaraman, Solitons and Instantons (North Holland, Amsterdam, 1982).

[18] N. Turok and D.N. Spergel, Phys. Rev. Lett. 66, 3093 (1991).

[19] A. H. Jaffe, Phys.Rev. D49, 3893 (1994), [astro-ph/9311023], 10.1103/PhysRevD.49.3893.

[20] Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков. Введение в теорию ранней Вселенной. Космологические возмущения. Инфляционная теория. //-М.: КРАСАНД, 2010. -568 с.

[21] Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков. Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего Большого взрыва. //-М.: Издательство ЛКИ, 2008. -552 с.

[22] U. Pen, D. N. Spergel and N. Turok, Phys. Rev. Lett. D 49, 2 (1994)