

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

Бакалаврская работа

«ГРАВИТАЦИОННЫЙ КОЛЛАПС СКАЛЯРНОГО
ПОЛЯ»

Выполнил студент
443 группы
Маркин Иван Владимирович

Научный руководитель
кандидат физ.-мат. наук
Панин Александр Григорьевич

Допущена к защите
Зав. кафедрой _____

Москва
2015

Аннотация

В данной работе изучается процесс нелинейного коллапса возмущений скалярного поля методами численного моделирования. Так, для описания образования структур из поля инфлатона в ранней Вселенной можно воспользоваться нерелятивистским приближением. Это позволяет существенно упростить уравнения, записав их в виде системы Шредингера-Ньютона, и тем самым осуществить полное трехмерное моделирование динамики полевой конфигурации, которое планируется выполнить в рамках данного проекта. Полученные результаты будут использованы для вычисления амплитуды гравитационных волн, излучаемых в процессе коллапса структур инфлатонного поля.

Содержание

1	Введение	3
2	Вывод системы уравнений	4
3	Численный алгоритм	5
3.1	Сферически симметричный случай	5
3.2	Результаты	7
3.3	Неоднородная динамическая вычислительная сетка.	8
4	Заключение	10
5	План на будущее	11

1 Введение

После окончания космологической инфляции Вселенная пуста, а вся энергия заключена в практически однородном классическом поле инфлатона. В этот момент закон расширения Вселенной становится степенным, начинает работать джинсовская неустойчивость. В результате коротковолновые возмущения поля инфлатона, рожденные из квантовых флюктуаций на стадии инфляции, начинают расти. Особенно сильный рост наблюдается в инфляционных моделях, где пост-инфляционное расширение происходит так, как если бы Вселенная была заполнена нерелятивистским веществом. Во многих реалистичных моделях разогрев наступает достаточно поздно, так что возмущения успевают выйти на нелинейную стадию. В результате образуются гравитационно-связанные структуры из инфлатонного поля, похожие на гало тёмной материи в современной Вселенной, которые затем распадаются во процессе разогрева Вселенной. Однако, нелинейная эволюция этих структур сопровождается излучением гравитационных волн, которые несут уникальную информацию об этом процессе и могут быть обнаружены на следующем поколении детекторов.

В литературе было предложено три механизма генерации гравитационных волн в процессе эволюции структур инфлатона [1]. Они действуют: на стадии первичного коллапса, на стадии слияния соседних гало и на стадии разрушения гало из-за распада инфлатонного конденсата в релятивистские частицы. Наивные оценки, основанные на аналитическом рассмотрении модельных ситуаций, которые приведены в этой работе, показывают, что образующиеся гравитационные волны вполне могут оказаться доступными для исследования на следующем поколении детекторов гравитационных волн.

Отметим, что рассматриваемые гравитационные волны несут уникальную информацию о ранней Вселенной. В частности, положение максимума гравитационно-волнового сигнала от распада инфлатонного конденсата будет указывать на величину температуры разогрева Вселенной. Детали спектра гравитационных волн содержат в себе информацию о первичных скалярных возмущениях с длиной волны порядка 10^{11} см, никак иначе не доступных для наблюдений. Ожидается, что по форме спектра гравитационно-волнового сигнала можно будет судить об особенностях первичных скалярных возмущений, таких как изменение наклона спектра, появление пиков, а также негауссности возмущений, которые предсказываются в некоторых моделях инфляции.

Для того чтобы дать более точную оценку возможного гравитационно-волнового сигнала, необходимо исследовать нелинейную стадию эволюции мелкомасштабных возмущений инфлатонного поля. В рамках данного проекта планируется рассмотреть стадию первичного коллапса неоднородностей с использованием численного моделирования динамики полевой конфигурации на решетке. Для этого будет найдено необходимое приближение, которое позволит существенно упростить уравнения, управляющие эволюцией системы, а также будет разработан численный алгоритм их решения. Алгоритм планируется опробовать в задаче моделирования коллапса центрально симметричной конфигурации.

2 Вывод системы уравнений

Теория свободного скалярного поля с гравитацией в предположении минимальной связи имеет следующее действие:

$$S = S_{\text{gravity}} + S_{\text{matter}} ,$$

$$S_{\text{matter}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} ((\partial_\mu \varphi)^2 - m^2 \varphi^2) ,$$

$$S_{\text{gravity}} = -\frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R .$$

В данной работе мы будем изучать нелинейную стадию эволюции первичных возмущений скалярного поля (поля инфлатона), поскольку именно на этой стадии происходят процессы, дающие интересный вклад в гравитационное излучение. Для описания этой стадии достаточно ограничиться нерелятивистским приближением, а гравитацию рассматривать ньютоновской. Действительно, релятивистские моды первичных возмущений с $\frac{k}{a} > H \sim m$ всегда находились под горизонтом во время инфляции, и поэтому остались в вакуумном состоянии. Во-вторых, начальные возмущения существенно сферически несимметричны, что означает отсутствие процесса образования черных дыр в процессе их коллапса (см. работу [4]). Тогда для метрики имеем

$$ds^2 = (1 + 2U)dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j , \quad (1)$$

где $a(t)$ — масштабный фактор. В нерелятивистском режиме вместо поля

φ можно ввести поле ψ следующим образом:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{4\pi G a^{\frac{3}{2}}}} (e^{-imt} \psi + \text{h.c.}) . \quad (2)$$

Тогда считая ψ медленно меняющейся функцией (нерелятивистское приближение), приходим к системе уравнений Шредингера-Ньютона (подробный вывод уравнений см., например, в работе [2]):

$$\begin{cases} i\dot{\psi} = -\frac{1}{2a^2(t)} \Delta \psi + U\psi , \\ \Delta U = (|\psi|^2 - |\psi_0|^2)/a(t) , \end{cases} \quad (3)$$

где мы определили безразмерные переменные

$$mx \rightarrow x \quad mt \rightarrow t$$

, а ψ_0 — однородная компонента поля ψ . В процессе нелинейной эволюции расширением Вселенной можно пренебречь, тогда в системе (3) можно положить $a(t) = 1$.

Полученная система уравнений (3) в терминах нового комплексного скалярного поля ψ представляет собой систему, описывающую нерелятивистскую частицу, движущуюся в своем собственном гравитационном потенциале.

3 Численный алгоритм

Систему уравнений (3) в нелинейном режиме будем решать численно. Для этого определим вычислительную сетку, в узлах которой зададим значения всех полевых переменных. Производные по времени и пространству дискретизуем стандартными формулами второго порядка точности.

С целью иллюстрации и апробации алгоритма рассмотрим случай центрально симметричных начальных конфигураций.

3.1 Сферически симметричный случай

В сферически симметричном случае удобно ввести следующие переменные:

$$V = rU ,$$

$$\phi = r(\psi - \psi_0) .$$

Тогда система уравнений (3) запишется в виде

$$\begin{cases} i\dot{\phi} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{V}{r}(\phi + \phi_0) \\ r\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = |\phi|^2 + 2\operatorname{Re}(\phi_0\phi) , \end{cases} \quad (4)$$

где $\phi_0 = r\psi_0$ введено для удобства записи. По координатам r и t определим равномерную вычислительную сетку с шагом Δr и Δt соответственно. Поля ϕ и V будем считать заданными в узлах вычислительной сетки, так что

$$\begin{aligned} \phi_j^n &= \phi(n\Delta t, j\Delta r) , \\ V_j^n &= V(n\Delta t, j\Delta r) . \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда, заменяя производные конечными разностями, для системы уравнений (3) имеем

$$\begin{cases} i\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2}\frac{\phi_{j+1}^{n+1/2} + \phi_{j-1}^{n+1/2} - 2\phi_j^{n+1/2}}{\Delta r^2} + \frac{V_j^{n+1/2}}{r_j} \left(\phi_j^{n+1/2} + \phi_0 \right) + \\ \quad + O(\Delta t^2, \Delta r^2) , \\ r_j \frac{V_{j+1}^{n+1/2} + V_{j-1}^{n+1/2} - 2V_j^{n+1/2}}{\Delta r^2} = \frac{1}{2} (|\phi_j^{n+1}|^2 + |\phi_j^n|^2) + \operatorname{Re}(\phi_0\phi_j^{n+1}) + \\ \quad + \operatorname{Re}(\phi_0\phi_j^n) + O(\Delta t^2, \Delta r^2) , \end{cases} \quad (6)$$

где мы ввели обозначение $\phi_j^{n+1/2} = (\phi_j^{n+1} + \phi_j^n)/2$. В граничных точках вычислительной сетки имеем условия:

$$\begin{aligned} \phi_0^n &= \phi_{N-1}^n = 0 , \\ V_0^{n+1/2} &= V_{N-1}^{n+1/2} = 0 , \end{aligned} \quad (7)$$

где N — число пространственных узлов вычислительной сетки.

Система (6) представляет собой систему из $3(N-2)$ нелинейных алгебраических уравнений на переменные ϕ_j^{n+1} и $V_j^{n+1/2}$, определенные в следующий момент времени. Однако, можно заметить, что первое уравнение этой системы при заданных $V_j^{n+1/2}$ является линейным уравнением на $2(N-2)$ неизвестные ψ_j^{n+1} . Второе уравнение, наоборот, является линейным уравнением на $V_j^{n+1/2}$ при заданных ψ_j^{n+1} . Таким образом, систему уравнений (6)

можно решать следующими итерациями. Для этого в качестве нулевого приближения положим в первом уравнении системы (6) $(0)V^{n+1/2} = V^{n-1/2}$. Решим это уравнение, например, методом прогонки, найдем нулевое приближение для поля $(0)\phi^{n+1}$. Далее подставим это поле в правую часть второго уравнения системы. Решив второе уравнение также методом прогонки, найдем $(1)V^{n+1/2}$. Используем это приближение для потенциала в первом уравнении системы (6), решив которое мы находим $(1)\phi^{n+1}$. Подставим это поле в правую часть второго уравнения, решаем его и т.д.. В конечном итоге, выполнив некоторое число итераций, мы находим решение системы (6) с заданной точностью. Наши вычисления показывают, что для нахождения решения с точностью, сравнимой с ошибкой дискретизации $O(\Delta t^2, \Delta r^2)$ достаточно трех итераций.

3.2 Результаты

Для демонстрации результатов применения разработанного в предыдущем разделе алгоритма, рассмотрим эволюцию возмущения скалярного поля, в качестве начальной конфигурации для которого выберем

$$\begin{aligned}\psi(r) &= \sqrt{|\psi_0|^2 + s(r)}, \text{ где} \\ s(r) &= \frac{3\sigma^2 - r^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^5} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\end{aligned}\tag{8}$$

Явный вид конфигурации (8) подобран таким образом, чтобы обеспечить $\langle\delta\rho\rangle = \int_V d^3x (|\psi|^2 - |\psi_0|^2)/V = 0$, что справедливо для первичных возмущений, представляющих собой гауссово случайное поле.

Результаты для зависимости поля в центре и характерного размера возмущения от времени представлены на Рис. 1 и Рис. 2 соответственно. Из данных рисунков видно, что коллапс происходит экспоненциально быстро. Пространственные конфигурации возмущений в различные моменты времени, отмеченные на Рис. 1, 2, представлены на Рис. 3, 4. Их этих рисунков видно, что поле в процессе коллапса собирается в центре, причем его размер становится достаточно малым. Такое поведение приведет к проблеме в трехмерной задаче, где пространственное разрешение конфигурации потребует очень большой вычислительной сетки. Вторая проблема связана с «утеканием» массы через границу конечного вычислительного объема. Эти две проблемы можно решить, используя следующую динамическую неоднородную вычислительную сетку.

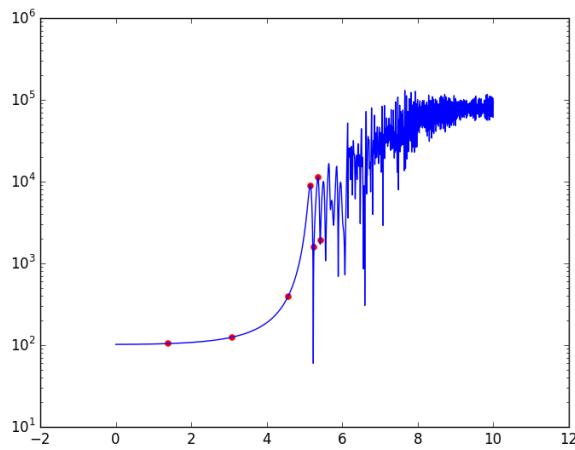


Рис. 1: Значение поля в центре возмущения $|\psi(0)|$ от времени.

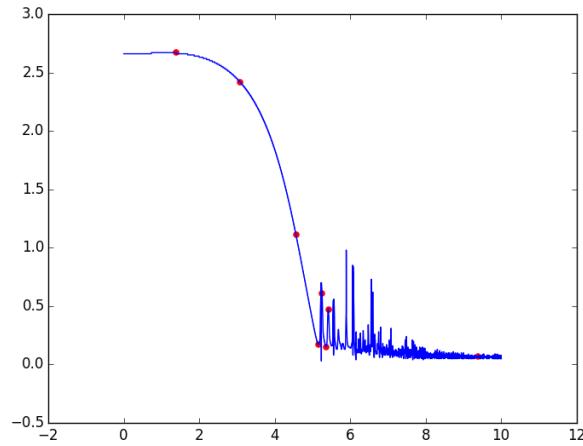


Рис. 2: Зависимость характерного размера возмущения от времени.

3.3 Неоднородная динамическая вычислительная сетька.

Изначально широкие конфигурации начальных возмущений скалярного поля в процессе коллапса переходят в конфигурации маленького размера, которые и представляют основной интерес задачи. Они могут быть настолько узкими, что шаг решетки будет слишком велик для них. В результате эти конфигурации начинают деформироваться и могут потерять свои свойства, либо вообще пропасть из массива решения.

Для решения данной проблемы можно воспользоваться новыми про-

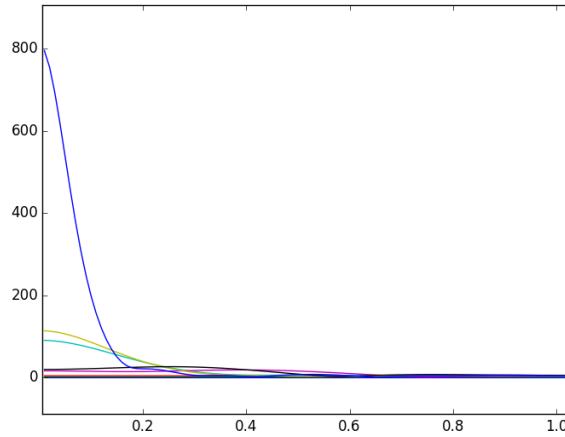


Рис. 3: Поле $|\psi(r)|$ в различные моменты времени, отмеченные на Рис. 1, 2

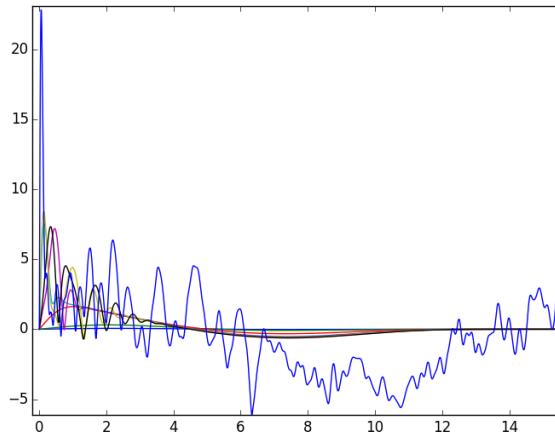


Рис. 4: Поле $|\phi(r)|$ в различные моменты времени, отмеченные на Рис. 1, 2

странными координатами, которые выполняют функцию масштабирования вычислительной сетки. В процессе коллапса можно регулировать шаг решетки в центральной части. В качестве таких переменных можно выбрать

$$w = \frac{1}{1 + r/r_0}, \quad (9)$$

где r_0 — параметр, характеризующий размер коллапсирующей конфигурации. Сделаем несколько замечаний относительно удобства использования координат (9). Во-первых, заметим, что в терминах этой переменной задача формулируется на отрезке $w \in [0, 1]$, причем пространственная бесконеч-

ность $r \rightarrow \infty$ соответствует конечному значению $w = 0$. Во-вторых, легко видеть, что однородная вычислительная сетка по координатам w соответствует неоднородной вычислительной сетке по r , причем половина узлов приходится на центральную область до от начала координат до r_0 . Таким образом, меняя значение r_0 со временем можно изменять пространственное разрешение центральной части вычислительной сетки. Таким образом, будем считать этот параметр зависящим от времени, $r_0 = r_0(t)$. Анализируя решения на каждом шаге по времени и меняя этот параметр мы тем самым будем подстраивать вычислительную сетку.

Выполняя замену (9) в системе уравнений (4), получаем:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \phi}{\partial t} + i(1-w)w \frac{\dot{r}_0}{r_0} \phi' = -\frac{w^3(w\phi'' + 2\phi')}{2r_0^2} + V\phi \frac{w}{r_0(1-w)} + V\psi_0; \\ \frac{w(1-w)^2}{r_0^2} (wV'' + 2V') = |\phi|^2 + 2\operatorname{Re}(\phi_0\phi). \end{cases} \quad (10)$$

В сферически симметричном случае дискретизованную систему уравнений (10) можно решать тем же итерационным методом, представленным в предыдущей главе.

4 Заключение

В заключении сформулируем результаты, достигнутые в данной работе.

- Разработан численный алгоритм решения системы уравнений Шредингера-Ньютона, описывающий коллапс неоднородностей скалярного поля.
- Алгоритм опробован для случая сферически-симметричных полевых конфигураций.
- Предложен вариант динамической неоднородной вычислительной сетки, используя которую можно исследовать эволюцию неоднородностей скалярного поля достаточно малых пространственных размеров.

5 План на будущее

В ближайшем будущем планируется опробовать предложенную неоднородную динамическую вычислительную сетку для сферически симметричного

случая. Планируется исследовать стабильность итерационного алгоритма, а также точность численного решения. Следующим шагом в данной работе планируется переход к сферически несимметричному случаю, что гораздо более важно для вычисления сигнала гравитационных волн, излучаемых в процессе коллапса неоднородностей скалярного поля. Для этого планируется ввести неоднородную динамическую сетку, выполнив аналогичную замену (9) вдоль каждой из координат. Однако, решение системы нелинейных уравнений в трехмерном случае потребует использования других численных методов. Так, для этого планируется использовать метод **Multigrid** [3], который позволит разрешить данную систему в этом случае.

Планируется изучить процесс эволюции конфигураций с течением времени в трехмерном случае. Это позволит вычислить амплитуду гравитационных волн, излучаемых в результате коллапса и нелинейной эволюции конфигураций поля. Полученные значения для сигнала можно будет сравнить с чувствительностью текущих и будущих детекторов гравитационных волн. Данное исследование позволит получить важнейшую информацию о процессах, происходивших до постинфляционного разогрева.

Список литературы

- [1] K. Jedamzik, M. Lemoine and J. Martin, *JCAP* **1004**, 021 (2010) [arXiv:1002.3278 [astro-ph.CO]].
- [2] L. A. Urena-Lopez, *Phys. Rev. D* **90**, no. 2, 027306 (2014) [arXiv:1310.8601 [astro-ph.CO]].
- [3] U. Trottenberg, C. W. Oosterlee, A. Schuller **Multigrid**, 2000
- [4] Дорошкевич А. Г., Астрофизика (1970)