

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

**ФОРМИРОВАНИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР В МОДЕЛЯХ СО
СКАЛЯРНЫМИ ПОЛЯМИ.**

Выполнил студент 443 группы
ПУСТЫННИКОВ АЛЕКСЕЙ ПАВЛОВИЧ
_____ Пустынников А.П.

научный руководитель, к.ф.м.н.,
ЛЕВКОВ ДМИТРИЙ ГЕННАДИЕВИЧ
_____ Левков Д.Г.

Допущен к защите _____
Зав. кафедрой _____ РУБАКОВ В.А.

Москва
2015

Оглавление

1. Введение	2
2. Скалярное поле как темная материя	3
2.1. Уравнения поля в нерелятивистском приближении	3
3. Линейные возмущения	5
3.1. Преобразование полей	5
3.2. Удобный вид уравнений	6
3.3. Приближение малых возмущений	7
3.4. Преобразование Фурье	7
3.5. Матричный вид уравнений	8
4. Диаграммная техника	10
4.1. Диаграммное представление решения	10
4.2. Спектр мощности	11
4.3. Спектр мощности в одной петле	12
4.3.1. Первая диаграмма	12
4.3.2. Вторая диаграмма	14
4.3.3. Обсуждение	15
5. Заключение	17
Литература	18

1. Введение

Теория формирования космологических структур входит в стандартный инструментарий современной космологии [1],[2]. Спектр мощности распределения материи, которой предсказывает эта теория, может быть использован для экспериментального измерения параметров и свойств Вселенной, к примеру, свойств темной материи и темной энергии.

В свою очередь, природа темной материи — одна из современных загадок в космологии. Значительная часть исследований направлена на попытку понять свойства этой материи, которая составляет 23% от всего вещества во Вселенной. Все модели темной материи находятся за гранью стандартной модели физики частиц. Одной из интересных возможностей является представление темной материи, как свободного массивного скалярного поля. Рост космологических структур в данной модели происходит иным образом по сравнению с стандартной моделью слабовазаимодействующих массивных частиц (WIMP). В качестве физической реализации этого сценария может выступать аксионное поле [2], которое вдобавок объясняет проблему сильного CP -нарушения.

Уравнения скалярного самогравитирующего поля являются сильно нелинейными и их решения в общем виде затруднены. Но оказывается, что в нерелятивистском приближении эволюция такой материи описывается системой нелинейных уравнений типа Шредингера—Ньютона [4]. В работе изучается эта система с помощью космологической теории возмущений [3],[5],[6]. Вычисляется спектр мощности космологических возмущений в однопетлевом приближении. Этот спектр сравнивается со стандартным случаем WIMP.

2. Скалярное поле как темная материя

В модели свободного массивного скалярного поля записывается действие:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right) . \quad (2.1)$$

Тензор энергии-импульса поля имеет вид

$$T_\mu^\nu = g^{\mu\lambda} \partial_\nu \phi \partial_\lambda \phi - \delta_\nu^\mu \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right) , \quad (2.2)$$

а уравнения поля записываются следующим образом

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + m^2 \phi = 0 . \quad (2.3)$$

2.1. Уравнения поля в нерелятивистском приближении

Как отмечалось в введении к этой главе, анализ начинается с действия (в данном разделе вывод, следует изложению статьи [4])

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right) . \quad (2.4)$$

Метрика расширяющейся вселенной записывается в следующем виде

$$ds^2 = - (1 + 2\Psi) dt^2 + a^2(t) (1 - \Phi) \delta_{ij} dx^i dx^j , \quad (2.5)$$

где $a(t)$ — космологический масштабный фактор, Ψ , Φ — малые добавки.

В данном случае тензор энергии-импульса запишется как

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi + m^2 \phi^2) . \quad (2.6)$$

Запишем ковариантный закон сохранения тензора энергии-импульса: $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$. Используя (2.5) и (2.6), получаем

$$(1 - 2\Psi) \ddot{\phi} + (3H - \dot{\Psi} - 3\dot{\Phi} - 6H\Psi) \dot{\phi} - a^{-2} (1 + 2\Phi) \nabla^2 \phi - a^{-2} \nabla (\Psi - \Phi) \cdot \nabla \phi + m^2 \phi = 0 . \quad (2.7)$$

С другой стороны, 00— компонента уравнения Эйнштейна имеет вид уравнения для гравитационных потенциалов, напоминающий уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \Phi - 3H a^2 (\dot{\Phi} + H\Psi) = 4\pi G a^2 \delta\rho , \quad (2.8)$$

где $\delta\rho = \rho_T - \bar{\rho}_T$, а $\rho_T = \rho_\phi + \rho_\Lambda$ — полная плотность энергии, $\bar{\rho}_T$ — однородная компонента. Так как растут возмущения только темной материи, то $\delta\rho = \rho_\phi - \bar{\rho}_\phi$, где

$$\rho_\phi = -T_0^0 = \frac{1 - \Psi}{2} |\dot{\phi}|^2 + \frac{1 + 2\Phi}{2a^2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{2} m^2 |\phi|^2 \quad (2.9)$$

$$\text{и } \bar{\rho}_\phi = \frac{1}{2} \left(|\dot{\bar{\phi}}|^2 + m^2 |\bar{\phi}|^2 \right) .$$

После подстановки $\phi = a^{-3/2} e^{-imt} \psi + h.c.$ и $\Phi = \Psi$ получается

$$\frac{1-2\Psi}{2} (\ddot{\psi} - 2im\dot{\psi}) - 2H\Psi(\dot{\psi} - im\psi) = \frac{1+2\Psi}{2a^2} \nabla^2 \psi - \left[(m^2 + 2H^2)\Psi - \frac{3}{4} \left(\dot{H} + \frac{3}{2} H^2 \right) (1-2\Psi) \right] \psi , \quad (2.10)$$

$$a^3 \rho_\phi = \frac{1-2\Psi}{2} \left[|\dot{\psi}|^2 - 3H \operatorname{Re}(\dot{\psi}\psi^*) + 2m \operatorname{Im}(\dot{\psi}\psi^*) \right] + \frac{1+2\Psi}{2a^2} |\nabla \psi|^2 + m^2 |\psi|^2 \left[1 + \frac{9}{8} \frac{H^2}{m^2} - \Psi \left(1 + \frac{9}{4} \frac{H^2}{m^2} \right) \right] + h.c. . \quad (2.11)$$

Как и говорилось в введении, эти уравнения являются крайне нелинейными. Для их упрощения применяется нерелятивистское приближение гравитационного потенциала: $\Psi = \mathbf{O}(\epsilon^2)$ [2], другой шаг для упрощения – $\Psi(t, \mathbf{x}) = \Psi_0(t, \mathbf{x})/a(t)$, так же вводятся обезразмеренные переменные: $\sqrt{4\pi G}\psi \leftrightarrow \psi$, $mt \leftrightarrow t$, $m\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}$, тогда уравнения (2.10) и (2.11) перейдут в

$$\frac{1}{2a^2} \nabla^2 \psi - \frac{1}{2} \ddot{\psi} + i\dot{\psi} = \frac{1}{a} \left[1 + 2\frac{H^2}{m^2} - 2i\frac{H}{m} + \frac{9}{4} \frac{H^2}{m^2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \right] \Psi_0 \psi - \frac{9}{8} \frac{H^2}{m^2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \psi , \quad (2.12)$$

$$\nabla^2 \Psi_0 - 3\frac{H}{m} a^2 \dot{\Psi}_0 = \frac{1}{2} |\dot{\psi}|^2 - \frac{3}{2} \frac{H}{m} \operatorname{Re}(\dot{\psi}\psi^*) + \operatorname{Im}(\dot{\psi}\psi^*) + \frac{|\nabla \psi|^2}{2a^2} + (|\psi|^2 - |\bar{\psi}|^2) \left(1 + \frac{9}{8} \frac{H^2}{m^2} \right) , \quad (2.13)$$

где ρ_ϕ считался так, что $\bar{\phi} = a^{-3/2} e^{-imt} \bar{\psi}$ и $\bar{\psi} = const.$

Для дальнейшего упрощения необходимо воспользоваться пределом быстрых осцилляций: $H/m \ll 1$ и воспользоваться фактом

$$\frac{9}{8} \frac{H^2}{m^2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2} \right) = -\frac{3\pi G}{m^2} \bar{p}_T = -\frac{3\pi G}{m^2} \bar{\omega} \bar{\rho}_T = -\frac{9}{8} \frac{H^2}{m^2} \times \begin{cases} 1/3, \text{ RD} \\ 0, \text{ MD} \\ -1, \text{ LD} \end{cases} \quad (2.14)$$

Поэтому поправки вызванные \dot{H} всегда пропорциональны H^2/m^2 и ими можно пренебрегать.

Итого:

$$\frac{1}{2a^2} \nabla^2 \psi - \frac{1}{2} \ddot{\psi} + i\dot{\psi} = \frac{1}{a} \Psi_0 \psi , \quad (2.15)$$

$$\nabla^2 \Psi_0 = \frac{1}{2} |\dot{\psi}|^2 + \operatorname{Im}(\dot{\psi}\psi^*) + \frac{|\nabla \psi|^2}{2a^2} + |\psi|^2 - |\bar{\psi}|^2 . \quad (2.16)$$

И финальное упрощение: $\psi = \mathbf{O}(\epsilon^2)$, $\nabla^2 \psi = \mathbf{O}(\epsilon^4)$, $\dot{\psi} = \mathbf{O}(\epsilon^4)$ и $\ddot{\psi} = \mathbf{O}(\epsilon^6)$ [2], ϵ - малый параметр, после этого выжившие члены дают

$$i\dot{\psi} = -\frac{1}{2a^2} \nabla^2 \psi + \frac{1}{a} \Psi_0 \psi , \quad (2.17)$$

$$\nabla^2 \Psi_0 = |\psi|^2 - |\bar{\psi}|^2 . \quad (2.18)$$

3. Линейные возмущения

3.1. Преобразование полей

Главным результатом предыдущей части была система уравнений (здесь было введено новое время $dt = dt_{ph}/a^2$)

$$\begin{cases} i\dot{\psi} = -\frac{1}{2}\Delta\psi + a\Psi_0\psi \\ \Delta\Psi_0 = |\psi|^2 - |\bar{\psi}|^2 \end{cases} . \quad (3.1)$$

Удобно сделать подстановку $\psi = \sqrt{\rho}e^{i\theta}$.

Подставляя это в уравнения, получим для производных:

$$i\dot{\psi} = i\partial_t(\sqrt{\rho})e^{i\theta} + \sqrt{\rho}\partial_t\theta e^{i\theta} , \quad (3.2)$$

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g + f\Delta g + 2(\partial_i f, \partial_i g) , \quad (3.3)$$

$$i\partial_t(\sqrt{\rho})e^{i\theta} + \sqrt{\rho}\partial_t\theta e^{i\theta} = \frac{1}{2}(\Delta\sqrt{\rho})e^{i\theta} - \frac{1}{2}\sqrt{\rho}\Delta e^{i\theta} - (\partial_i\sqrt{\rho}, \partial_i e^{i\theta}) + aU\sqrt{\rho}e^{i\theta} . \quad (3.4)$$

Для выражений такого типа верны соотношения:

$$\Delta\sqrt{f} = \frac{\Delta f}{2\sqrt{f}} - \frac{(\partial_i f)^2}{4f^{3/2}} , \quad (3.5)$$

$$\Delta e^{i\theta} = -e^{i\theta}((\partial_i\theta)^2 - i\Delta\theta) . \quad (3.6)$$

Отсюда получаем окончательное выражение:

$$i\partial_t(\sqrt{\rho})e^{i\theta} + \sqrt{\rho}\partial_t\theta e^{i\theta} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta\rho}{2\rho^{3/2}}e^{i\theta} + \frac{1}{2}\frac{(\partial_i\rho)^2}{4\rho^{3/2}}e^{i\theta} + \frac{1}{2}\sqrt{\rho}e^{i\theta}((\partial_i\theta)^2 - i\Delta\theta) - \frac{i\partial_i\rho}{2\sqrt{\rho}}\partial_i\theta e^{i\theta} . \quad (3.7)$$

Получим систему уравнений (3.1) в виде:

$$\begin{cases} \partial_t\rho = -\rho\Delta\theta - \partial_i\rho\partial_i\theta = -\partial_i(\rho\partial_i\theta) \\ \partial_t\theta = \frac{\Delta\rho}{4\rho} - \frac{(\partial_i\rho)^2}{8\rho^2} - \frac{1}{2}(\partial_i\theta)^2 - aU \\ \Delta\Psi_0 = \rho - \bar{\rho} \end{cases} . \quad (3.8)$$

Видно, что первое уравнение – уравнение непрерывности, второе и третье – аналог второго закона Ньютона.

3.2. Удобный вид уравнений

Уравнение (3.1) записано в безразмерных переменных. Вернемся к обычным: $\sqrt{4\pi G}\psi \leftrightarrow \psi$, $dt \leftrightarrow mdt_{ph}/a^2$, $d\mathbf{x} \leftrightarrow m d\mathbf{x}$.

$$\begin{cases} \partial_t \rho = -\frac{1}{ma^2} \partial_i (\rho \partial_i \theta) \\ \partial_t \theta = \frac{\Delta \rho}{4ma^2 \rho} - \frac{(\partial_i \rho)^2}{8ma^2 \rho^2} - \frac{1}{2ma^2} (\partial_i \theta)^2 - m \frac{U}{a} \\ \Delta \Psi_0 = 4\pi m^2 G (\rho - \bar{\rho}) \end{cases} \quad (3.9)$$

Представим $\rho = \bar{\rho} + \delta$

$$\begin{cases} \partial_t \delta = -\frac{1}{ma^2} \partial_i ((\bar{\rho} + \delta) \partial_i \theta) \\ \partial_t \theta = \frac{\Delta \delta}{4ma^2 (\bar{\rho} + \delta)} - \frac{(\partial_i \delta)^2}{8ma^2 (\bar{\rho} + \delta)^2} - \frac{1}{2ma^2} (\partial_i \theta)^2 - m \frac{U}{a} \\ \Delta \Psi_0 = 4\pi m^2 G \delta \end{cases} \quad (3.10)$$

Перейдем к конформному времени $d\tau = \frac{dt}{a}$:

$$\begin{cases} \partial_\tau \delta + \frac{\bar{\rho}}{ma} \partial_i \partial_i \theta = -\frac{1}{ma} \partial_i (\delta \partial_i \theta) \\ \partial_\tau \theta = \frac{\Delta \delta}{4ma (\bar{\rho} + \delta)} - \frac{(\partial_i \delta)^2}{8ma (\bar{\rho} + \delta)^2} - \frac{1}{2ma} (\partial_i \theta)^2 - mU \\ \Delta \Psi_0 = 4\pi m^2 G \delta \end{cases} \quad (3.11)$$

Возьмем от второго уравнения Δ и воспользуемся третьим:

$$\begin{cases} \partial_\tau \delta + \frac{\bar{\rho}}{ma} \partial_i \partial_i \theta = -\frac{1}{ma} \partial_i (\delta \partial_i \theta) \\ \partial_\tau \Delta \theta = \Delta \frac{\Delta \delta}{4ma (\bar{\rho} + \delta)} - \Delta \frac{(\partial_i \delta)^2}{8ma (\bar{\rho} + \delta)^2} - \frac{1}{2ma} \Delta (\partial_i \theta)^2 - 4\pi m^3 G \delta \end{cases} \quad (3.12)$$

Введем замену $\partial_i \theta = u_i$ ($\nabla \theta = \vec{u}$):

$$\begin{cases} \partial_t \delta + \frac{\bar{\rho}}{ma} \partial_i u_i = -\frac{1}{ma} \partial_i (\delta u_i) \\ \partial_i \partial_i u_i + 4\pi m^3 G \delta = \Delta \frac{\Delta \delta}{4ma (\bar{\rho} + \delta)} - \Delta \frac{(\partial_i \delta)^2}{8ma (\bar{\rho} + \delta)^2} - \frac{1}{2ma} \Delta (u_i)^2 \end{cases} \quad (3.13)$$

Еще одна замена $\tilde{\theta} = \nabla \vec{u} = \Delta \theta$:

$$\begin{cases} \partial_\tau \delta + \frac{\bar{\rho}}{ma} \tilde{\theta} = -\frac{1}{ma} \partial_i (\delta u_i) \\ \partial_\tau \tilde{\theta} + 4\pi m^3 G \delta = \Delta \frac{\Delta \delta}{4ma (\bar{\rho} + \delta)} - \Delta \frac{(\partial_i \delta)^2}{8ma (\bar{\rho} + \delta)^2} - \frac{1}{2ma} \Delta (u_i)^2 \end{cases} \quad (3.14)$$

И еще одна $\frac{\bar{\rho}}{ma} \tilde{\theta} = \theta_0$:

$$\partial_\tau \tilde{\theta} = \frac{ma' \theta_0}{\bar{\rho}} + \frac{ma \partial_\tau \theta_0}{\bar{\rho}}, \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} \partial_\tau \delta + \theta_0 = -\frac{1}{ma} \partial_i (\delta u_i) \\ \partial_\tau \theta_0 + \frac{a'}{a} \theta_0 + \frac{4\pi m^2 G \delta \bar{\rho}}{a} = \frac{\bar{\rho}}{a^2 m^2} \left(\Delta \frac{\Delta \delta}{4(\bar{\rho} + \delta)} - \Delta \frac{(\partial_i \delta)^2}{8(\bar{\rho} + \delta)^2} - \frac{1}{2} \Delta (u_i)^2 \right) \end{cases} \quad (3.16)$$

Ввести $\mathbf{H} = \frac{a'}{a} = aH$, где H - постоянная Хаббла. Так же учтем уравнение Фридмана $H^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_c(t)$, откуда $\frac{3H^2 \Omega_m}{2} = 4\pi G \bar{\rho}$. Тогда

$$\begin{cases} \partial_\tau \delta + \theta_0 = -\frac{1}{ma} \partial_i (\delta u_i) \\ \partial_\tau \theta_0 + \mathbf{H} \theta_0 + \frac{3\mathbf{H}^2 m^2 \Omega_m \delta}{2a^3} = \frac{\bar{\rho}}{m^2 a^2} \left(\Delta \frac{\Delta \delta}{4(\bar{\rho} + \delta)} - \Delta \frac{(\partial_i \delta)^2}{8(\bar{\rho} + \delta)^2} - \frac{1}{2} \Delta (u_i)^2 \right) \end{cases} \quad (3.17)$$

или, если переопределить Ω

$$\begin{cases} \partial_\tau \delta + \theta_0 = -\frac{1}{ma} \partial_i (\delta u_i) \\ \partial_\tau \theta_0 + \mathbf{H} \theta_0 + \frac{3\mathbf{H}^2 m^2 \bar{\Omega}_m \delta}{2} = \frac{\bar{\rho}}{m^2 a^2} \left(\Delta \frac{\Delta \delta}{4(\bar{\rho} + \delta)} - \Delta \frac{(\partial_i \delta)^2}{8(\bar{\rho} + \delta)^2} - \frac{1}{2} \Delta (u_i)^2 \right) \end{cases} \quad (3.18)$$

Следует отметить, что первое уравнение полностью совпадает с уравнением непрерывности в случае стандартной темной материи из WIMP [3],[5],[6]. Левая часть второго уравнения также имеет стандартный вид. Отличия находятся в правой части второго уравнения (в неоднородности), там, очевидно, присутствует член пропорциональный k^4 .

3.3. Приближение малых возмущений

Далее нам нужны только квадратичные неоднородности, поэтому будем оставлять члены $\mathbf{O}(\delta^2)$ и ниже.

$$\frac{1}{\bar{\rho} + \delta} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\bar{\rho}}} = \frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 - \frac{\delta}{\bar{\rho}} \right) + \mathbf{O}(\delta^2), \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{(\bar{\rho} + \delta)^2} = \frac{1}{\bar{\rho}^2} \frac{1}{(1 + \frac{\delta}{\bar{\rho}})^2} = \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left(1 - \frac{2\delta}{\bar{\rho}} \right) + \mathbf{O}(\delta^2). \quad (3.20)$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial_\tau \delta + \theta_0 = -\frac{1}{am} \partial_i (\delta u_i) \\ \partial_\tau \theta_0 + \mathbf{H} \theta_0 + \frac{3\mathbf{H}^2 \bar{\Omega}_m m^2 \delta}{2} = \frac{\bar{\rho}}{m^2 a^2} \left(\Delta \frac{\Delta \delta}{4} \frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 - \frac{\delta}{\bar{\rho}} \right) - \Delta \frac{(\partial_i \delta)^2}{8} \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left(1 - \frac{2\delta}{\bar{\rho}} \right) - \frac{1}{2} \Delta (u_i)^2 \right) \end{cases} \quad (3.21)$$

Попробуем выяснить, насколько эта модель отличается от модели идеальной жидкости, для этого сделаем преобразование Фурье.

3.4. Преобразование Фурье

Будем делать преобразование Фурье над неоднородностью (3.21).

Здесь использовано определение свертки функций:

$$\mathbf{F}(f \circ g) = \mathbf{F}(f) * \mathbf{F}(g) = \int d^3 k_1 d^3 k_2 \delta_D(k_1 + k_2 - k) \hat{f}(k_1) \hat{g}(k_2) \quad (3.22)$$

Непосредственно преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \Delta (u_i)^2 \xrightarrow{FT} -k^2 \mathbf{F}(u_i^2) = -k^2 \mathbf{F}(u_i) * \mathbf{F}(u_i) = \\ & = \frac{m^2 a^2}{\bar{\rho}^2} k^2 \int d^3 k_1 \int d^3 k_2 \delta_D(k_1 + k_2 - k) \frac{\vec{k}_1 \vec{k}_2}{|k_1|^2 |k_2|^2} \hat{\theta}(k_1) \hat{\theta}(k_2), \end{aligned} \quad (3.23)$$

2.

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{\Delta \delta}{4\bar{\rho}} - \frac{\Delta \delta}{4\bar{\rho}^2} \delta \right) &\xrightarrow{FT} \frac{k^4 \delta}{4\bar{\rho}} + k^2 \mathbf{F} \left(\frac{\Delta \delta}{4\bar{\rho}^2} \delta \right) = \frac{k^4 \delta}{4\bar{\rho}} + k^2 \frac{\mathbf{F}(\Delta \delta)}{4\bar{\rho}^2} * \hat{\delta} = \\ &= \frac{k^4 \delta}{4\bar{\rho}} - \int d^3 k_1 d^3 k_2 \delta_D(k_1 + k_2 - k) \frac{k_1^2 k_2^2}{4\bar{\rho}^2} \delta(\hat{k}_1) \delta(\hat{k}_2) , \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.

$$\Delta \left[\frac{(\partial_i \delta)^2}{8\bar{\rho}^2} \right] \xrightarrow{FT} -\frac{k^2}{8\bar{\rho}^2} \mathbf{F}(\partial_i \delta) * \mathbf{F}(\partial_i \delta) = -\frac{k^2}{8\bar{\rho}^2} \int d^3 k_1 d^3 k_2 \delta_D(k_1 + k_2 - k) \vec{k}_1 \vec{k}_2 \delta(\hat{k}_1) \delta(\hat{k}_2) . \quad (3.25)$$

В итоге получаем:

$$\begin{cases} \partial_\tau \delta + \theta_0 = -\frac{1}{\bar{\rho}} \int d^3 k_1 d^3 k_2 \delta_D(k_1 + k_2 - k) \frac{(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \vec{k}_1}{|k_1|^2} \hat{\delta}(k_1) \hat{\theta}_0(k_2) \\ \partial_\tau \theta_0 + \mathbf{H} \theta_0 + \frac{3\mathbf{H}^2 \bar{\Omega}_m \delta}{2} = \frac{\bar{\rho}}{m^2 a^2} \left(\frac{k^4 \delta}{4\bar{\rho}} - \int d^3 k_1 d^3 k_2 \delta_D(k_1 + k_2 - k) \frac{k_1^2 k_2^2}{4\bar{\rho}^2} \delta(\hat{k}_1) \delta(\hat{k}_2) + \right. \\ \left. + \frac{k^2}{8\bar{\rho}^2} \int d^3 k_1 d^3 k_2 \delta_D(k_1 + k_2 - k) \vec{k}_1 \vec{k}_2 \delta(\hat{k}_1) \delta(\hat{k}_2) - \right. \\ \left. - \frac{m^2 a^2}{\bar{\rho}^2} k^2 \int d^3 k_1 \int d^3 k_2 \delta_D(k_1 + k_2 - k) \frac{\vec{k}_1 \vec{k}_2}{2|k_1|^2 |k_2|^2} \hat{\theta}(k_1) \hat{\theta}(k_2) \right) \end{cases} . \quad (3.26)$$

3.5. Матричный вид уравнений

Удобно записать последнюю систему уравнений в матричном виде, определив двухкомпонентный вектор

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} \hat{\delta} \\ -\hat{\theta} \end{pmatrix} , \quad (3.27)$$

где $a = 1, 2$.

Используя Ψ_α можно переписать (3.26) в виде (здесь предполагается интегрирование по повторяющимся k)

$$\partial_\tau \Psi_\alpha + \Omega_{\alpha\beta} \Psi_\beta = \gamma_\alpha^{bc}(k, k_1, k_2) \Psi_b(k_1) \Psi_c(k_2) , \quad (3.28)$$

а матрица Ω равна

$$\Omega_{\alpha\beta}(k, \tau) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} \Omega_m H^2 + \frac{k^4}{4m^2 a^4} & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} \Omega_m H^2 & H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k^4}{4m^2 a^4} & 0 \end{pmatrix} . \quad (3.29)$$

Вершины взаимодействия имеют вид

$$\gamma_1^{12}(k_1, k_2) = \alpha(k_1, k_2) \delta_D(k_1 + k_2 - k) = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \vec{k}_1}{2|k_1|^2} \delta_D(k_1 + k_2 - k) , \quad (3.30)$$

$$\gamma_2^{11}(k_1, k_2) = \beta(k_1, k_2) \delta_D(k_1 + k_2 - k) = \frac{(k_1 + k_2)^2 k_1^2}{\bar{\rho} m^2 a^2} \left(1 - \frac{\vec{k}_1 \vec{k}_2}{k_1^2} \right) \delta_D(k_1 + k_2 - k) , \quad (3.31)$$

$$\gamma_2^{22}(k_1, k_2) = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{k^2 \vec{k}_1 \vec{k}_2}{2|k_1|^2 |k_2|^2} \delta_D(k_1 + k_2 - k) , \quad (3.32)$$

а остальные вершины равны нулю.
Рассмотрим линейное уравнение

$$\partial_\tau \Psi_\alpha + \Omega_{\alpha\beta} \Psi_\beta = 0 . \quad (3.33)$$

Его решение может быть легко записано в терминах функции Грина и начальных условий $\Psi(k, \tau_0)$, как:

$$\Psi(k, \tau) = e^{\int_{\tau_0}^{\tau} d\bar{\tau} \Omega(k, \bar{\tau})} \Psi(k, \tau_0) \equiv g(\tau, \tau_0) \Psi(k, \tau_0) . \quad (3.34)$$

Тогда решение общего уравнения с неоднородностью может быть записано в виде:

$$\Psi_\alpha(k, \tau) = g_{\alpha\beta}(k, \tau) \Psi_\beta(k, \tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' g_{\alpha\beta}(\tau - \tau') \gamma_{\rho\sigma}^\beta(k, k_1, k_2) \Psi_\rho(k_1, \tau') \Psi_\sigma(k_2, \tau') . \quad (3.35)$$

Эту формулу будем далее применять для построения теории возмущений.

4. Диаграммная техника

4.1. Диаграммное представление решения

Данное решение допускает представление в виде древесных диаграмм [6]. Всего присутствует три строительных блока: начальное поле $\Psi(k, \tau_0)$, линейный пропагатор $g_{\alpha\beta}(k, \tau)$ и вершина $\gamma_{\alpha\sigma}^\beta(k, k_1, k_2)$. Линии – времениориентированы (направление времени указывается стрелочкой) и имеют различные индексы на концах, например a и b . Каждая линия символизирует линейную эволюцию, описываемую пропагатором $g_{\alpha\beta}(k, \tau_f - \tau_i)$.



Рис. 1. Диаграммное представление линейного пропагатора

Каждое нелинейное взаимодействие между модами описывается вершиной, которая из-за квадратичных неоднородностей в уравнении движения обязательно является точкой схождения двух входящих линий, с импульсами k_1 и k_2 , и одной исходящей с $k = k_1 + k_2$. Каждая вершина представляется матрицей $\gamma_{\alpha\sigma}^\beta(k, k_1, k_2)$.

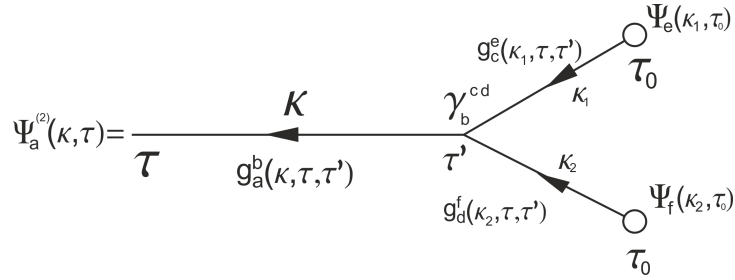


Рис. 2. Диаграммное представление полей во втором порядке

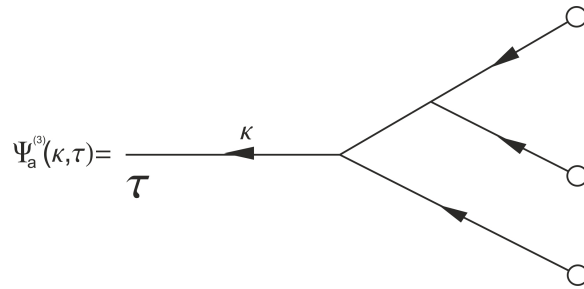


Рис. 3. Диаграммное представление полей в третьем порядке

Если пользоваться правилами, изложенными выше, можно записать интегралы, соответствующие поправкам второго и третьего порядка $\Psi^{(2)}$ и $\Psi^{(3)}$ (см. рис.2 и рис.3):

$$\Psi_a^{(2)} = \int d^3 k_1 \int d^3 k_2 \int_{\tau_0}^{\tau} ds g_{ab}(\tau - s) \gamma_{cd}^b(k, k_1, k_2) g_{ce}(s - \tau_0) \Psi_e(k_1, \tau_0) g_{df}(s - \tau_0) \Psi_f(k_2, \tau_0) , \quad (4.1)$$

$$\Psi_a^{(3)} = 2 \int d^3 k_1 \int d^3 k_2 \int_{\tau_0}^{\tau} ds g_{ab}(\tau - s) \gamma_{cd}^b(k, k_1, k_2) g_{ce}(s - \tau_0) \Psi_e(k_1, \tau_0) \Psi_d^{(2)}(k_2, s) . \quad (4.2)$$

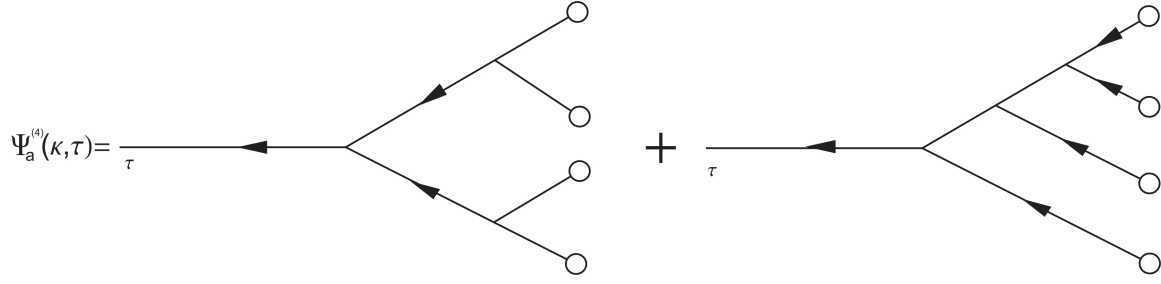


Рис. 4. Диаграммное представление полей в четвертом порядке

На рис.4 представлены примеры диаграмм 4-го порядка.

4.2. Спектр мощности

Интеграл (3.35) может быть интерпретирован как уравнение на $\Psi_a(k, \tau)$ в присутствии внешнего источника, который изменяет начальные условия $\Psi_a(k, \tau_0)$, с заданной статистикой. Будем считать, что начальные условия — гауссовы. Статистические свойства начального поля $\Psi_a(k, \tau_0)$ полностью определяются их двухточечным коррелятором

$$\langle \Psi_a(k_1, \tau_0) \Psi_b(k_2, \tau_0) \rangle \equiv \delta^{(3)}(k_1 + k_2) P_{ab}^0(k_1) \quad (4.3)$$

Здесь $P_{ab}^0(k_1)$ — начальный спектр мощности флуктуаций плотности. В соответствии с теоремой Вика, все корреляторы нечетных порядков зануляются, для четных же есть $(2n - 1)!!$ членов соответствующих $2n$ полям.

Спектр мощности при любом τ определяется следующим образом:

$$\langle \Psi_a(k_1, \tau) \Psi_b(k_2, \tau) \rangle \equiv \delta^{(3)}(k_1 + k_2) P_{ab}(k_1, \tau). \quad (4.4)$$

Главный вклад, соответствующий простейшей диаграмме на рис.5, называется линейным спектром мощности

$$P_{ab}^{lin}(\tau) \equiv g_{ac}(k, \tau, \tau_0) g_{bd}(k, \tau, \tau_0) P_{cd}^0(k). \quad (4.5)$$

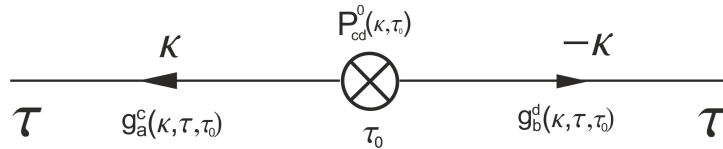


Рис. 5. Диаграммное представление P_{ab}^{lin}

Все однопетлевые диаграммы изображены на рис.7.

Так же можно сформулировать правила, для построения таких диаграмм:

1. Каждой линии сопоставить пропагатор $g_{\alpha\beta}(k, \tau_f - \tau_i)$.

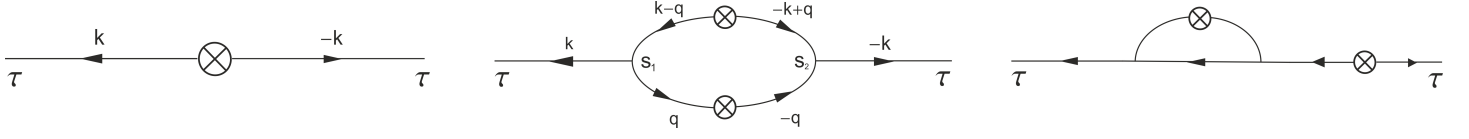


Рис. 6. Диаграмное представление P_{ab}^{lin}

2. Проинтегрировать по внутренним временам.
3. Обозначить индексы на диаграммах с учетом закона сохранения импульса в вершинах.
4. Каждой вершине приписать матрицу $\gamma_{\alpha\sigma}^{\beta}(k, k_1, k_2)$.
5. Каждому спариванию \otimes сопоставить $P_{ab}^0(k)$.
6. Проинтегрировать по внутренним импульсам.

4.3. Спектр мощности в одной петле

4.3.1. Первая диаграмма

Рассмотрим более подробно первую диаграмму (рис. 7)

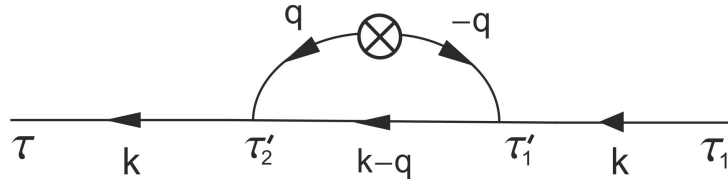


Рис. 7. Диаграмма однопетлевой поправки к пропагатору

Будем рассматривать случай, когда импульс \mathbf{q} , циркулирующий внутри петли, много меньше, чем \mathbf{k} . Выражение для этой диаграммы имеет вид:

$$G_a^b = \int d^3q \int d\tau'_2 d\tau'_1 g_a^g(\tau - \tau'_2) \gamma_g^{hf}(k, -q, k+q) g_h^i(\tau'_2 - \tau_0) P_{ij}(q) g_d^j(\tau'_1 - \tau_0) \times \\ \times g_f^e(\tau'_2 - \tau'_1) \gamma_e^{dc}(k+q, q, k) g_c^b(\tau'_1 - \tau_1). \quad (4.6)$$

Запишем выражения для вершин в явном виде

$$\gamma_1^{12}(k, -q, k+q) = -\frac{(\vec{k}\vec{q})}{2q^2}, \quad (4.7)$$

$$\gamma_1^{11}(k, -q, k+q) = \frac{k^2 q^2}{4\bar{\rho} m^2 a^2} \left(1 - \frac{-\vec{q}(\vec{k} + \vec{q})}{2q^2} \right) \approx \frac{k^2 q^2}{4\bar{\rho} m^2 a^2} \left(1 + \frac{(\vec{q}\vec{k})}{2q^2} \right), \quad (4.8)$$

$$\gamma_2^{22}(k, -q, k+q) = \frac{k^2(-\vec{q} \cdot (\vec{k} + \vec{q}))}{2q^2(\vec{k} + \vec{q})^2} = -\frac{(\vec{k}\vec{q})}{2q^2}. \quad (4.9)$$

Если объединить эти результаты, то

$$\gamma_g^{hf}(k, -q, k+q) = -\frac{(\vec{k}\vec{q})}{2q^2} \delta_g^f \delta_2^h + \frac{k^2 q^2}{4\bar{\rho} m^2 a^2} \left(1 + \frac{(\vec{q}\vec{k})}{2q^2}\right) \delta_h^1 \delta_f^1 \delta_g^2. \quad (4.10)$$

Для второй вершины

$$\gamma_1^{21}(k+q, q, k) = \frac{(\vec{k}\vec{q})}{2q^2}, \quad (4.11)$$

$$\gamma_1^{11}(k+q, q, k) = \frac{(\vec{k} + \vec{q})^2 q^2}{4\bar{\rho} m^2 a^2} \left(1 - \frac{(\vec{q}\vec{k})}{2q^2}\right) \approx \frac{k^2 q^2}{4\bar{\rho} m^2 a^2} \left(1 - \frac{(\vec{q}\vec{k})}{2q^2}\right), \quad (4.12)$$

$$\gamma_2^{22}(k+q, q, k) = \frac{(\vec{k}\vec{q})^2 (\vec{q}\vec{k})}{2q^2 k^2} = \frac{(\vec{k}\vec{q})}{2q^2}, \quad (4.13)$$

$$\gamma_e^{dc}(k+q, q, k) = \frac{(\vec{k}\vec{q})}{2q^2} \delta_e^c \delta_2^d + \frac{k^2 q^2}{4\bar{\rho} m^2 a^2} \left(1 - \frac{(\vec{q}\vec{k})}{2q^2}\right) \delta_d^1 \delta_c^1 \delta_e^2. \quad (4.14)$$

Правила подсчета интегралов сводятся к:

1. Просуммировать все внутренние индексы;
2. Проинтегрировать по внутренним временам;
3. Проинтегрировать по углу между \mathbf{q} и \mathbf{k} .

Подставим эти выражения в (4.6)

$$\begin{aligned} G_a^b = & \int d^3 q \int d\tau'_2 d\tau'_1 g_a^g(\tau - \tau'_2) \left[-\frac{(\vec{k}\vec{q})}{2q^2} \delta_g^f \delta_2^h + \frac{k^2 q^2}{4\bar{\rho} m^2 a^2} \left(1 + \frac{(\vec{q}\vec{k})}{2q^2}\right) \delta_h^1 \delta_f^1 \delta_g^2 \right] \times \\ & \times g_h^i(\tau'_2 - \tau_0) P_{ij}(q) g_d^j(\tau'_1 - \tau_0) g_f^e(\tau'_2 - \tau'_1) \left[\frac{(\vec{k}\vec{q})}{2q^2} \delta_e^c \delta_2^d + \frac{k^2 q^2}{4\bar{\rho} m^2 a^2} \left(1 - \frac{(\vec{q}\vec{k})}{2q^2}\right) \delta_d^1 \delta_c^1 \delta_e^2 \right] g_c^b(\tau'_1 - \tau_1). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Продemonстрируем вычисление интегралов на примере первого члена, пользуясь упрощенными правилами.

Первый шаг основыван на свойствах функции Грина:

$$g_a^g(\tau - \tau'_2) \delta_g^f g_f^e(\tau'_2 - \tau'_1) \delta_e^c g_c^b(\tau'_1 - \tau_1) = \quad (4.16)$$

$$= g_a^f(\tau - \tau'_2) g_c^f(\tau'_2 - \tau'_1) g_c^b(\tau'_1 - \tau_1) = \quad (4.17)$$

$$= g_a^b(\tau - \tau_1). \quad (4.18)$$

Интегрирование по углу между \mathbf{q} и \mathbf{k} производится явно

$$\int d^3 \mathbf{q} \frac{(\mathbf{q}\mathbf{k})^2}{q^4} = \frac{4\pi}{3} \int dq q^2 \frac{k^2}{q^2} \quad (4.19)$$

Определим

$$\sigma_d^2 = \frac{\pi}{3} \int dq P_{22}^{lin}(q) \quad (4.20)$$

тогда этот вклад равен $-k^2 \sigma_d^2$

Остальные в сумме дадут

$$\begin{aligned} \Delta G_b^a &= \int d^3 q \int d\tau'_2 g_a^2(\tau - \tau'_2) g_1^b(\tau'_2 - \tau_1) P_{12}(q) \left[\frac{(\vec{q}\vec{k})k^2}{8\bar{\rho}m^2a^2} \left(1 - \frac{(\vec{q}\vec{k})}{2q^2}\right) - \frac{(\vec{k}\vec{q})k^2}{8\bar{\rho}m^2a^2} \left(1 + \frac{(\vec{q}\vec{k})}{2q^2}\right) \right] = \\ &= \int d^3 q \int d\tau'_2 g_a^2(\tau - \tau'_2) g_1^b(\tau'_2 - \tau_1) P_{12}(q) (-1) \frac{(\vec{q}\vec{k})^2 k^2}{8\bar{\rho}m^2a^2 q^2} . \end{aligned} \quad (4.21)$$

После интегрирования по углам и введения обозначения $\zeta_d^4 = \frac{\pi}{6m^2} \int dq \int d\tau'_2 g_a^2(\tau - \tau'_2) g_1^b(\tau'_2 - \tau_1) P_{12}(q)$ этот вклад даст $-k^4 \zeta_d^4$.

Полный ответ для диаграммы запишется в виде

$$P_{ab}^{1-loop, \#1}(k) = P_{ab}^{lin}(k) [1 - k^2 \sigma_d^2] - k^4 (\zeta_d^4 P^{lin}(k))_{ab} . \quad (4.22)$$

4.3.2. Вторая диаграмма

Перейдем к расчету второй диаграммы, изображенной на рис.8

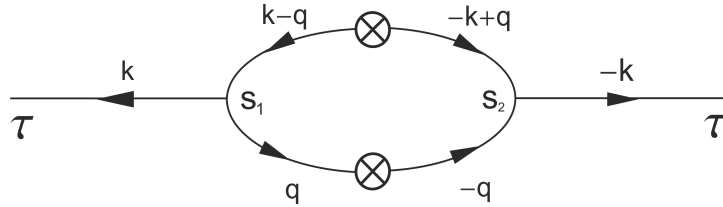


Рис. 8. Диаграмма однопетлевой поправки к пропагатору

Выражение для этой диаграммы, в соответствии с правилами:

$$\begin{aligned} G_a^b &= \int d^3 q \int d\tau'_2 d\tau'_1 g_a^g(\tau - \tau'_2) \gamma_g^{hf}(k, k - q, q) g_h^i(\tau'_2 - \tau_0) P_{ij}(k - q) g_d^j(\tau'_1 - \tau_0) \times \\ &\times g_f^k(\tau'_2 - \tau_0) P_{km}(q) g_e^m(\tau'_1 - \tau_0) \gamma_e^{dc}(-k, q - k, -q) g_c^b(\tau'_1 - \tau) . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Для вершин, так же как для предыдущей диаграммы, можно записать выражения

$$\gamma_1^{21}(k, k - q, q) = \frac{\vec{k}(\vec{k} - \vec{q})}{2(\vec{k} - \vec{q})^2} \approx \frac{1}{2}, \quad (4.24)$$

$$\gamma_1^{11}(k, k - q, q) = \frac{k^2(\vec{k} - \vec{q})^2}{4\bar{\rho}m^2a^2} \left(1 + \frac{(\vec{q}\vec{k})}{2k^2}\right) \approx \frac{k^4}{4\bar{\rho}m^2a^2} \left(1 + \frac{(\vec{q}\vec{k})}{2k^2}\right), \quad (4.25)$$

$$\gamma_2^{22}(k, k - q, q) = \frac{k^2(\vec{k}\vec{q})}{2q^2k^2} = \frac{(\vec{k}\vec{q})}{2q^2}. \quad (4.26)$$

Если объединить эти результаты, то

$$\begin{aligned} \gamma_g^{hf}(k, -q, k + q) &= \frac{1}{2}\delta_1^f\delta_1^g\delta_2^h + \frac{k^4}{4\bar{\rho}m^2a^2} \left(1 + \frac{(\vec{q}\vec{k})}{2k^2}\right) \delta_h^1\delta_f^1\delta_g^2 + \frac{(\vec{k}\vec{q})}{2q^2}\delta_2^h\delta_2^f\delta_2^g \approx \\ &\approx \frac{k^4}{4\bar{\rho}m^2a^2} \left(1 + \frac{(\vec{q}\vec{k})}{2k^2}\right) \delta_h^1\delta_f^1\delta_g^2 + \frac{(\vec{k}\vec{q})}{2q^2}\delta_2^h\delta_2^f\delta_2^g. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Аналогично для второй вершины

$$\gamma_1^{21}(k, k - q, q) \approx \frac{1}{2}, \quad (4.28)$$

$$\gamma_1^{11}(k, k - q, q) = \frac{k^2(\vec{q} - \vec{k})^2}{4\bar{\rho}m^2a^2} \left(1 + \frac{(\vec{q} - \vec{k})(-\vec{q})}{2k^2}\right) \approx \frac{k^4}{4\bar{\rho}m^2a^2} \left(1 + \frac{(\vec{q}\vec{k})}{2k^2}\right), \quad (4.29)$$

$$\gamma_2^{22}(k, k - q, q) = \frac{(\vec{k}\vec{q})}{2q^2}. \quad (4.30)$$

Если объединить эти результаты, то

$$\begin{aligned} \gamma_e^{dc}(-k, q - k, -q) &= \frac{1}{2}\delta_1^c\delta_1^e\delta_2^d + \frac{k^4}{4\bar{\rho}m^2a^2} \left(1 + \frac{(\vec{q}\vec{k})}{2k^2}\right) \delta_d^1\delta_c^1\delta_e^2 + \frac{(\vec{k}\vec{q})}{2q^2}\delta_2^c\delta_2^d\delta_2^e \approx \\ &\approx \frac{k^4}{4\bar{\rho}m^2a^2} \left(1 + \frac{(\vec{q}\vec{k})}{2k^2}\right) \delta_d^1\delta_c^1\delta_e^2 + \frac{(\vec{k}\vec{q})}{2q^2}\delta_2^c\delta_2^d\delta_2^e \end{aligned} \quad (4.31)$$

В стандартном случае первый член отсутствует, а второй совпадает с нашими поэтому его легко посчитать (он просто совпадет со стандартным): $P_{ab}^{lin}k^2\sigma_d^2$, где σ_d^2 определена в (4.20).

Для первого члена получим: $P_{12}^{lin}(k)k^4\tau_d^4$,

где $\tau_d^4 = \frac{\pi}{9m^2} \int dq \int d\tau'_2 (g_a^2(\tau - \tau'_2)g_2^b(\tau'_2 - \tau)P_{12}(q) + g_a^2(\tau - \tau'_2)g_1^b(\tau'_2 - \tau)P_{22}(q))$.

Итак, как и в стандартной теории космологических возмущений члены, пропорциональные k^2 сокращаются [6], но в нашем случае возник член, пропорциональный k^4 .

4.3.3. Обсуждение

Итоговый ответ можно записать в следующем виде:

$$P_{ab}^{1-loop}(k) = P_{ab}^{lin} - k^4 (\zeta_d^4 P^{lin}(k))_{ab} + k^4 (P_{12}^{lin}(k)\tau_d^4)_{ab}, \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \zeta_d^4 &= \frac{\pi}{6m^2} \int dq \int d\tau'_2 g_a^2(\tau - \tau'_2)g_1^b(\tau'_2 - \tau_1)P_{12}(q), \\ \tau_d^4 &= \frac{\pi}{9m^2} \int dq \int d\tau'_2 (g_a^2(\tau - \tau'_2)g_2^b(\tau'_2 - \tau)P_{12}(q) + g_a^2(\tau - \tau'_2)g_1^b(\tau'_2 - \tau)P_{22}(q)) \end{aligned}$$

В отличие от случая WIMP сохраняются нетривиальные члены пропорциональные k^4 . Не смотря на то, что они очень малы (присутствует фактор $1/m^2$), они могут оказывать влияние на физику. Так например, в статье [7], приводятся доводы в пользу того, что такие члены могут приводить к появлению ненулевого кручения у поля скоростей темной материи.

5. Заключение

- Рассмотрено формирование структур в модели, где роль темной материи играет нерелятивистское скалярное поле, например, аксионное.
- Развита теория возмущений, получены диаграммы, пропагаторы, вершины для вычисления спектра мощности в однопетлевом приближении.
- Вычислен спектр мощности в однопетлевом приближении.
- Исследованы отличия этого спектра от стандартного случая WIMP.

Литература

- [1] Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков. Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва. — М.: ЛКИ, 2008 г., 552 стр., ISBN 978-5-382-00657-4
- [2] Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков. Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения. Инфляционная теория. — М.: КРАСАНД, 2010 г., 568 стр., ISBN 978-5-396-00046-9
- [3] Matrin Crocce, Roman Scoccimarro *Renormalized cosmological pertrubation theory Phisical Rewiev D* 73, 063519 2006.
- [4] L. Arturo Urena-Lopez *Non-relativistic approach for cosmological Scalar Field Dark Matter arXiv:1310.8601v2* 2014.
- [5] Diego Blas, Mathias Garny, Thomas Konstandin *On the non-linear scale of cosmological pertrubation theory arXiv:1304.1546v2* 2013 Relations.
- [6] Francis Bernardeau *The evolution of the large-scale structure of the universe: beyond the linear legime arXiv:1311.2724v3* 2013
- [7] P.Sikivie *TAn argument that the dark matter is axions arXiv:1210.0040* 2012