ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. Ломоносова"

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Модели квантовой теории поля и космологии с нарушением изотропного условия энергодоминантности.

Выполнил студент

443 группы

Колеватов Роман

(подпись студента)

Научный руководитель

академик РАН, доктор физ.-мат. наук

профессор В. А. Рубаков

(подпись научного руководителя)

Допущен к защите

Заф. кафедрой

(подпись зав. кафедрой)

Москва

2015 г.

Аннотация

В дипломной работе рассматривается актуальная в последнее время в космологии модель с галилеоном, важным свойством которой является присутствие второй ковариантной производной в лагранжиане. Такая модель используется для построения альтернатив модели инфляции. В работе рассмотрены малые возмущения над решениями уравнения движения в дилатационно-инвариантных моделях с галилеоном и получены условия устойчивости фона (отстутствия градиентных нестабильностей и духов) и отсутствия сверхсветовых скоростей. Показано, что в случае фонового пространства Минковского в такой модели можно построить лагранжиан таким образом, чтобы малые возмущения над любыми стабильными решениями уравнения поля распространялись со скоростями, не превышающими скорость света. Однако при рассмотрении модели в метрике Фридмана показано, что подбором зависимости масштабного фактора от времени всегда можно добиться существования фоновых решений уравнения поля, удовлетворяющих условиям стабильности, возмущения над которыми распространяются со сверхсветовыми скоростями. Таким образом, в работе сформулирована и доказана запрещающая теорема (no-go theorem), закрывающая класс моделей с галилеоном на основе требования отсутствия сверхсветовых сигналов.

Содержание

1 Введение

Наиболее популярной моделью эволюции Вселенной до Большого взрыва является модель инфляции. Тем не менее, существуют и продолжают развиваться альтернативные космологические модели.

В рамках общей теории относительности сингулярность с неизбожностью имеется в космологических моделях с пренебрежимо малой пространственной кривизной, удовлетворяющих изотропному условию энергодоминантности (NEC) [1,2], которое постулирует, что для любого светоподобного вектора k^μ справедливо неравенство

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0, \tag{1}$$

где $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материи. Для однородной изотропной материи это неравенство эквивалентно условию

$$\rho + P \geq 0, \tag{2}$$

где ρ — плотность энергии, P — эффективное давление. Для метрики Фридмана это означает, что плотность энергии, а, следовательно, и параметр Хаббла H, уменьшаются с расширением Вселенной, так как согласно уравнению ковариантного сохранения тензора энергии-импульса справедливо равенство

$$\dot{\rho} = -3H\left(\rho + P\right). \tag{3}$$

Для того, чтобы избежать начальной сингулярности, были предложены модели, нарушающие NEC, однако все они сталкивались с проблемами сверхсветовых скоростей, градиентных нестабильностей и духов [3–5].

Ситуация изменилась после того, как стало ясно, что возникающие проблемы можно пытаться решить добавлением в кинетический член в лагранжиане слагаемых с производными скалярного поля второго порядка. Впервые эта идея была предложена ещё в 1974 году [6]. Существенно, что несмотря на присутствие в лагранжиане членов с высшими производными, уравнения поля являются уравнениями второго порядка, что позволяет рассчитывать на отсутствие духов.

Большой интерес среди моделей такого типа представляют теории с галилеоном, инвариантные относительно преобразований дилатации [7–9]. На основе общего вида лагранжиана, предложенного в этих работах, были разработаны различные сценарии эволюции Вселенной, являющиеся альтернативами инфляции: сценарий "генезиса" [10, 11]; космологические модели с отскоком [12, 13]; модель создания Вселенной "в пробирке" [14]. Обзор теорий с нарушением NEC представлен в работе [15].

Нами рассмотрен класс дилатационно-инвариантных теорий с галилеоном. В главе 2 получено уравнение движения в произвольной метрике и в метрике Фридмана, получены тензор энергии-импульса и формулы для давления и плотности энергии галилеона. В главе 3 рассмотрены малые возмущения галилеона над пространственно однородным решением уравнения движения и в метрике Фридмана получены условия устойчивости этого решения (отсутствия духов и градиентных нестабильностей), а также условие отсутствия сверхсветовых скоростей. В главе 4 теория рассматривается на фоне пространства Минковского и предлагается явный вид функций, входящих в лагранжиан, при выборе которых для любого однородного решения удовлетворяются условия стабильности фона и отсутствия сверхсветовых скоростей. В главе 5 мы проводим аналогичный анализ в случае пространственно плоской метрики Фридмана и выясняем, что подбором зависимости масштабного фактора от времени всегда можно добиться существования фоновых решений уравнения поля, удовлетворяющих условиям стабильности, возмущения над которыми имеют сверхсветовые скорости. В то же время существует утверждение [16], что при наличии в теории сверхсветовых скоростей в ней будут возникать проблемы, связанные с невозможностью лоренц-инвариантного ультрафиолетового (UV) замыкания (другими словами, такую теорию невозможно рассматривать в качестве низкоэнергетической эффективной теории, возникающей в некоторой лоренц-инвариантной квантовой теории, справедливой на всех энергитических масштабах). Таким образом, нами сформулирована и доказана запрещающая теорема (no-go theorem), утверждающая, что ***в дилатационно-инвариантных теориях с галилеоном в метрике Фридмана всегда существует поведение масштабного фактора, при котором имеются стабильные фоновые решения, возмущения над которыми распространяются со сверхсветовыми скоростями.***

2 Модель

2.1 Лагранжиан и уравнение поля

Рассмотрим класс дилатационно-инвариантных моделей с галилеоном. Лагранжиан поля галилеона π в произвольной метрике $g_{\mu\nu}$ имеет вид

$$L = F\left(Y\right)e^{4\pi} + K\left(Y\right)\Box\pi \cdot e^{2\pi}, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} &Y = e^{-2\pi}\left(\partial\pi\right)^2, \\ &\Box\pi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\pi, \\ &\left(\partial\pi\right)^2 = g^{\mu\nu}\partial_\mu\pi\partial_\nu\pi. \end{aligned} \tag{5}$$

В случае пространства Минковского лагранжиан инвариантен относительно преобразований дилатации:

$$x^\mu \to \lambda x^\mu,\ \pi \to \pi - \ln\lambda. \tag{6}$$

Уравнение поля имеет вид

$$\begin{aligned} &4e^{4\pi}F - 2e^{2\pi}\left(\partial\pi\right)^2F' - 2\nabla_\mu\left(e^{2\pi}F'\nabla_\mu\pi\right) + 2e^{2\pi}\Box\pi\cdot K + \\ &+ \Box\left(e^{2\pi}K\right) - 2\Box\pi\cdot\left(\partial\pi\right)^2K' - 2\nabla_\mu\left(\Box\pi\cdot K'\partial_\mu\pi\right) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где штрих обозначает производную по Y.

Мы будем рассматривать модель в пространственно плоской метрике Фридмана (частным случаем которой является метрика Минковского). Фоновое решение $\pi = \pi(t)$ будем считать пространственно однородным. В этом случае уравнение поля имеет следующий вид

$$\begin{aligned} 4e^{4\pi}F - 6e^{2\pi}F'\dot\pi^2 - 4F''\dot\pi^2\ddot\pi - 6\frac{\dot a}{a}e^{2\pi}F'\dot\pi - 2e^{2\pi}F'\ddot\pi + 12\frac{\dot a}{a}e^{2\pi}K\dot\pi + 4e^{2\pi}K\ddot\pi - 12\frac{\dot a}{a}K'\dot\pi^3 - \\ -4K'\dot\pi^2\ddot\pi - 6\frac{\ddot a}{a}K'\dot\pi^2 + 12\frac{\dot a}{a}e^{-2\pi}K''\dot\pi^5 - 12\frac{\dot a}{a}K''\dot\pi^3\ddot\pi - 12\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2K'\dot\pi^2 - 12\frac{\dot a}{a}K'\dot\pi\ddot\pi + \\ +4e^{-2\pi}K''\dot\pi^6 - 4e^{-2\pi}K''\dot\pi^4\ddot\pi - 4K'\dot\pi^4 + 4e^{2\pi}K\dot\pi^2 + 4F''\dot\pi^4 = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где $a(t)$ — масштабный фактор, задающий метрику $ds^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^idx^j$.

2.2 Тензор энергии-импульса. Плотность энергии и давление

Варьируя лагранжиан по метрике, получим выражение для тензора энергии-импульса галилеона:

$$T_{\mu\nu} = 2e^{2\pi}F'\partial_\mu\pi\partial_\nu\pi - g_{\mu\nu}e^{4\pi}F + 2K'\Box\pi\partial_\mu\pi\partial_\nu\pi - \partial_\mu\pi\partial_\nu\left(e^{2\pi}K\right) - \\ -\partial_\nu\pi\partial_\mu\left(e^{2\pi}K\right) + g_{\mu\nu}g^{\lambda\rho}\partial_\lambda\partial\rho\left(e^{2\pi}K\right). \tag{9}$$

Рассматривая временные и пространственные компоненты тензора энергии-импульса в однородном изотропном случае, получим выражения для плотности энергии и давления галилеона:

$$\rho = 2K'\dot{\pi}^4 + 2e^{2\pi}\left(F' - K\right)\dot{\pi}^2 + 6\frac{\dot{a}}{a}K'\dot{\pi}^3 - e^{4\pi}F, \tag{10}$$

$$P = e^{4\pi}F + 2K'\dot{\pi}^4 - 2K'\dot{\pi}^2\ddot{\pi} - 2e^{2\pi}K\dot{\pi}^2. \tag{11}$$

3 Малые возмущения над решением уравнения поля

3.1 Лагранжиан для возмущений

Пусть π_c является решением уравнения поля (8). Нас будут интересовать малые неоднородные возмущения $\chi = \chi(\mathbf{x}, t)$ над решением $\pi_c = \pi_c(t)$. Положим $\pi = \pi_c + \chi$ и подставим в (4), при этом разложим все функции, входящие в лагранжиан, в ряд Тейлора по малому параметру χ до второго порядка:

$$\begin{aligned} e^{-2\pi} &= e^{-2\pi_c} - 2e^{-2\pi_c}\chi + 2e^{-2\pi_c}\chi^2, \\ (\partial\pi)^2 &= (\partial\pi_c)^2 + 2\partial_\mu\pi_c\partial^\mu\chi + (\partial\chi)^2, \\ \Box\pi &= \nabla_\mu\nabla^\mu\pi_c + \nabla_\mu\nabla^\mu\chi. \end{aligned} \tag{12}$$

Также учтём, что в разложении участвуют функции $F(Y)$ и $K(Y)$, разложения которых имеют вид

$$\begin{aligned} F &= F + F'Y_\chi + \frac{1}{2}F''Y_\chi^2, \\ K &= K + K'Y_\chi + \frac{1}{2}K''Y_\chi^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Выражение Y_χ, встречающееся в (13), — полученная в результате разложения часть Y, зависящая от χ:

$$Y_\chi = -2e^{-2\pi_c}(\partial\pi_c)^2\chi + 2e^{-2\pi_c}\partial_\mu\pi_c\partial^\mu\chi - 4e^{-2\pi_c}\partial_\mu\pi_c\partial^\mu\chi\cdot\chi + 2e^{-2\pi_c}(\partial\pi_c)^2\chi^2 + e^{-2\pi_c}(\partial\chi)^2. \quad (14)$$

Аналогично, раскладывая в ряд $e^{2\pi}$ и $e^{4\pi}$ и подставляя (12), (13) и (14) в (4), получим квадратичный относительно возмущений лагранжиан. Прежде чем написать окончательный результат, укажем лишь, что мы воспользовались очевидными равенствами:

$$\begin{aligned}
&\chi\partial^\mu\chi = \frac{\partial^\mu\chi^2}{2},\\
&\chi\Box\chi = \frac{\Box\chi^2}{2} - (\partial\chi)^2\,,\\
&\partial^\mu\chi\Box\chi = \nabla_\nu\left(\nabla^\mu\chi\nabla^\nu\chi\right) - \frac{1}{2}\nabla^\mu\left[(\partial\chi)^2\right]
\end{aligned} \quad (15)$$

и проинтегрировали по частям. Лагранжиан для возмущений имеет вид

$$\begin{aligned}
L^{(2)} = {} & (\partial\chi)^2\,F'e^{2\pi_c} + 2F''\partial_\mu\pi_c\partial_\nu\pi_c\cdot\partial^\mu\chi\partial^\nu\chi + \\
& + (\partial\chi)^2\left[-2Ke^{2\pi_c} + 2(\partial\pi_c)^2K' + \nabla_\mu(K'\nabla^\mu\pi_c) + \Box\pi_c\cdot K'\right] + \\
& + \partial^\mu\chi\partial^\nu\chi[-2\nabla_\nu(K'\nabla_\mu\pi_c) + 2\Box\pi_c e^{-2\pi_c}K''\partial_\mu\pi_c\partial_\nu\pi_c] + \\
& + \chi^2[8Fe^{4\pi_c} - 6F'e^{2\pi_c}(\partial\pi_c)^2 - 2\nabla_\mu(F'e^{2\pi_c}\nabla^\mu\pi_c) + 2F''(\partial\pi_c)^4 + 2\nabla_\mu(F''(\partial\pi_c)^2\nabla^\mu\pi_c] + \\
& + \chi^2[\Box(e^{2\pi_c}K) + 2Ke^{2\pi_c}\Box\pi_c - \Box(K'(\partial\pi_c)^2) - 2\Box\pi_c(\partial\pi_c)^2K' + \\
& + 2\Box\pi_c e^{-2\pi_c}(\partial\pi_c)^4K'' + 2\nabla_\mu(\Box\pi_c e^{-2\pi_c}(\partial\pi_c)^2K''\nabla^\mu\pi_c)].
\end{aligned} \quad (16)$$

Напомним, что фоновое поле π_c пространственно однородно, поэтому в производных от π_c в (16) перейдём к производным по времени:

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu\pi_c = \dot\pi_c,\\
&\Box\pi_c = \ddot\pi_c + 3H\dot\pi_c,\\
&\partial_\mu\pi\partial_\nu\pi\partial^\mu\chi\partial^\nu\chi = \dot\pi^2\dot\chi^2,
\end{aligned} \quad (17)$$

где $H = \dfrac{\dot{a}}{a}$ - параметр Хаббла. Приведём одну выкладку, встречающуюся при дифференцировании:

$$\nabla_\nu (K' \nabla_\mu \pi_c) = \partial_\nu K' \partial_\mu \pi_c + K' \nabla_\nu \nabla_\mu \pi_c, \tag{18}$$

где второе слагаемое равно

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \pi_c = \partial_\nu \partial_\mu \pi_c - \Gamma^0_{\nu\mu} \partial_0 \pi_c = \begin{cases} \ddot{\pi}_c & \nu = \mu = 0, \\ a\dot{a}\dot{\pi}_c & \nu = \mu = i. \end{cases} \tag{19}$$

Заметим также, что возмущение χ не является пространственно однородным, поэтому встречающееся выражение $(\partial\chi)^2$ в пространственно плоской метрике Фридмана выглядит следующим образом:

$$(\partial\chi)^2 = \dot{\chi}^2 - \frac{1}{a^2}(\partial_i \chi)^2. \tag{20}$$

С учётом замечаний (17)-(20) выражение (16) принимает вид

$$L^{(2)} = U\dot{\chi}^2 - \frac{1}{a^2} V (\partial_i \chi)^2 + W\chi^2, \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} U &= e^{2\pi_c}[F' + 2F''Y - 2K + 2YK' + 2Y^2K''] + 6H\dot{\pi}_c K' + 6H\dot{\pi}_c{}^3 e^{-2\pi_c} K'', \\ V &= e^{2\pi_c}[F' - 2K + 2YK' + 2Y^2K''] + [2YK'' + 2K']\ddot{\pi}_c + 4HK'\dot{\pi}_c. \end{aligned} \tag{22}$$

Мы не выписали явный вид W, так как это выражение не понадобится нам в дальнейшем. Индекс c у фонового решения далее не выписываем.

3.2 Условия устойчивости

Мы получили лагранжиан для возмущений в пространственно плоской метрике Фридмана. Теперь, используя полученное выражение, найдём необходимые условия устойчивости однородного решения в рассматриваемой модели. Выпишем функционал плотности энергии, полученный из лагранжиана для возмущений:

$$E = U\dot{\chi}^2 + \frac{V}{a^2}(\partial_i \chi)^2 + W\chi^2. \tag{23}$$

Из выражения для функционала плотности энергии следуют условия устойчивости фона.

1) Стабильное фоновое решение существует при (см. Приложение А)

$$U > 0,\ V > 0. \tag{24}$$

2) Проварьировав лагранжиан (21) и пренебрегая слагаемым с W, получим уравнение движения для возмущений в пределе высоких частот и импульсов:

$$U\ddot{\chi} - \frac{1}{a^2}V\triangle\chi = 0, \tag{25}$$

из которого следует, что скорость возмущения равна $v_{perturb} = \dfrac{V}{U}$. Поэтому условие отсутствия в модели сверхсветовых скоростей имеет вид

$$\frac{V}{U} \leqslant 1. \tag{26}$$

Таким образом, мы получили следующее условие стабильности однородного решения и отсутствия сверхсветовых скоростей для возмущений над ним:

$$U \geq V > 0. \tag{27}$$

4 Пространство Минковского

Рассмотрим модель на фоне пространства Минковского. Нашей задачей является нахождение функций $F(Y)$ и $K(Y)$, при которых всюду в фазовой плоскости $(\pi, \dot{\pi})$ на уравнении движения модель стабильна, то есть выполняются условия $U > 0$ и $V > 0$, и при этом всегда выполняется условие $U \geq V$, то есть отсутствуют сверхсветовые скорости. Коэффициенты U и V для случая $a = 1$ принимают вид

$$\begin{aligned} U &= e^{2\pi_c}[F' + 2F''Y - 2K + 2YK' + 2Y^2K''], \\ V &= e^{2\pi_c}[F' - 2K + 2YK' + 2Y^2K''] + [2YK'' + 2K']\ddot{\pi}_c. \end{aligned} \tag{28}$$

Выражение для $\ddot{\pi}$ получим из уравнения движения (8) с учётом, что $a = 1$:

$$\ddot{\pi} = \frac{2F - 3YF' + 2Y^2F'' + 2YK + 2Y^3K'' - 2Y^2K'}{F' + 2YF'' - 2K + 2Y^2K'' + 2YK'} \cdot e^{2\pi}. \tag{29}$$

Введём обозначение:

$$Z = -F + 2YF' - 2YK + 2Y^2K'. \tag{30}$$

Тогда

$$Z' = F' + 2YF'' - 2K' + 2YK' + 2Y^2K', \tag{31}$$

и выражение (29) для $\ddot{\pi}$ приобретает вид

$$\ddot{\pi} = \frac{YZ' - 2Z}{Z'}. \tag{32}$$

Условия стабильности фона $U > 0$ и $V > 0$ в новых обозначениях имеют вид

$$\begin{cases} Z' > 0, \\ F' - 2K + 2YK' - 2Y^2K'' - 4 \cdot [K' + YK''] \cdot \dfrac{Z}{Z'} > 0. \end{cases} \tag{33}$$

Предъявим явный вид входящих в лагранжиан (4) функций $F(Y)$ и $K(Y)$, для которых условие (33) выполнено на всей фазовой плоскости. Выберем в качестве $F(Y)$ полином второго порядка по Y и будем считать, что функция $K(Y)$ зависит от Y линейно, то есть:

$$\begin{aligned} F(Y) &= aY^2 + bY, \\ K(Y) &= cY, \end{aligned} \tag{34}$$

где a и b - некоторые постоянные коэффициенты. Для функций $F(Y)$ и $K(Y)$, заданных в виде (34), первое неравенство в условии (33) с учётом (31) имеет вид

$$6aY + b \geq 0. \tag{35}$$

Заметим, что выражение $Y = e^{-2\pi}\dot{\pi}^2$ всегда положительно. Условие (35) должно выполняться на всей фазовой плоскости $(\pi, \dot{\pi})$, то есть при любых значениях Y, поэтому для коэффициентов потребуем $a > 0$ и $b > 0$.

Второе неравенство в условии (33) имеет вид

$$12a^2Y^2 + (8ab - 2bc)Y + b^2 > 0. \tag{36}$$

Для выполнения этого неравенства на всей фазовой плоскости $(\pi, \dot{\pi})$ необходимо потребовать, чтобы дискриминант выражения в левой части был отрицателен:

$$(4a - c)^2 - 12a^2 < 0. \tag{37}$$

Итак, для устойчивости модели на коэффициенты a, b и c накладываются следующие условия:

$$\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ 4 - 2\sqrt{3} < \dfrac{c}{a} < 4 + 2\sqrt{3}. \end{cases} \tag{38}$$

При таком выборе коэффициентов для любого решения уравнения движения в пространстве Минковского в модели отсутствуют духи и градиентные нестабильности. Заметим, что при выполнении неравенств (38) коэффициенты a, b и c всегда положительны.

Найдём теперь условия отсутствия в модели сверхсветовых скоростей. Для этого потребуем выполнения условия $U \geq V$, которое в обозначениях (30), (31) имеет вид

$$Z' \geq [F' - 2K + 2YK' - 2Y^2K''] - 4 \cdot [K' + YK''] \cdot \frac{Z}{Z'} \tag{39}$$

Для функций (34) условие (39) запишется в виде

$$12a^2Y + 4ab + 2bc \geq 0. \tag{40}$$

Последнее неравенство выполняется всегда при выполнения неравенств (38). Заметим, что неравенство (39) выполняется в строгом смысле, то есть скорости возмущений не достигают скорости света.

Таким образом, мы показали, что на фоне пространства Минковского все решения стабильны, и над ними отсутствуют сверхсветовые возмущения при выборе функций $F(Y)$ и $K(Y)$, входящих в лагранжиан (4), в виде (34) с постоянными коэффициентами a, b, удовлетворяющими условиям (38).

5 Метрика Фридмана. Запрещающая теорема

Рассмотрим модель в пространственно плоской метрике Фридмана. Наша основная цель — показать, что если на поведение масштабного фактора $a(t)$ не накладывается никаких ограничений, то существуют стабильные фоновые решения $\pi(t)$ уравнения поля, возмущения над которыми имеют сверхсветовые скорости. Это утверждение справедливо при любом выборе функций $F(Y)$ и $K(Y)$ в лагранжиане (4).

Коэффициенты U и V, заданные формулой (22), инвариантны относительно T-преобразования, при котором

$$\dot{\pi} \to -\dot{\pi}, \ \ddot{\pi} \to \ddot{\pi}, \ H \to -H. \tag{41}$$

Поэтому без ограничения общности будем считать, что $\dot{\pi} > 0$. Выразим $\ddot{\pi}$ из уравнения движения (8) с учётом (17) при $a \neq const$ и получим:

$$\ddot{\pi} = \frac{2e^{2\pi} - 3Ye^{2\pi} - 3\frac{\dot{a}}{a}\sqrt{Y}e^{\pi}F' + 6\frac{\dot{a}}{a}\sqrt{Y}e^{\pi}K - 6\frac{\dot{a}}{a}Y^{\frac{3}{2}}e^{\pi}K' - 3\frac{\ddot{a}}{a}YK' + 6\frac{\dot{a}}{a}Y^{\frac{5}{2}}e^{\pi}K'' +}{F' + 2YF'' - 2K + 2Y^2K'' + 2YK' +}$$
$$\frac{-6(\frac{\dot{a}}{a})^2YK' + 2Y^3e^{2\pi}K'' - 2Y^2e^{2\pi}K' + 2Ye^{2\pi}K + 2Y^2e^{2\pi}F''}{+6\frac{\dot{a}}{a}Y^{\frac{3}{2}}e^{-\pi}K'' + 6\frac{\dot{a}}{a}\sqrt{Y}e^{-\pi}K'}. \tag{42}$$

Введём в теорию новые безразмерные параметры, которые определятся параметром Хаббла $\dfrac{\dot{a}}{a}$ и второй производной по времени от масштабного фактора $\dfrac{\ddot{a}}{a}$. А именно, исходя из размерных соображений, введём параметры q и p, сделав следующую замену:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}}{a} &= q \cdot e^{\pi}\sqrt{Y}, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= p \cdot e^{2\pi}Y. \end{aligned} \tag{43}$$

Заметим, что q и p могут иметь произвольные знаки. После введения параметров q и p формула для $\ddot{\pi}$ имеет более простой вид

$$\ddot{\pi} = \frac{2F - 3(1+q)YF' + 2Y^2F'' + 2(1+3q)YK - 2(1+3q+\frac{3}{2}p+3q^2)Y^2K' + 2(1+3q)Y^3K''}{F' + 2YF'' - 2K + 2(1+3q)YK' + 2(1+3q)Y^2K''}. \tag{44}$$

Аналогично тому, как это было сделано в случае пространства Минковского, введём новое обозначение Z:

$$Z = -F + 2YF' - 2(1+3q)YK + 2Y^2(1+3q)K'. \tag{45}$$

Тогда

$$Z' = F' + 2YF'' - 2K - 3qK + 2(1+3q)YK' - 3qYK' + 2(1+3q)Y^2K''. \tag{46}$$

Формула для $\ddot{\pi}$ в новых обозначениях принимает вид

$$\ddot{\pi} = \frac{YZ' - 2Z + 3qY(K+YK') - 3pY^2K' - 6qYK - 6q^2Y^2K' - 3qYF'}{Z' + 3q(K+YK')}. \tag{47}$$

Обратимся к условиям стабильности модели. Функции U и V в новых обозначениях имеют вид

$$\begin{aligned} U &= e^{2\pi}[F' + 2F''Y - 2K + 2(1+3q)\cdot(K'Y + K''Y^2)] = e^{2\pi}[Z' + 3q(K+YK')], \\ V &= \frac{e^{2\pi}}{a^2}\left[F' - 2K + 2YK' - 2Y^2K'' - 2(K'+YK')\frac{2Z + 3pY^2K' + 6qYK + 6q^2Y^2K'}{Z' + 3q(K+YK')}\right]. \end{aligned} \tag{48}$$

Заметим, что поскольку знаменатель дроби в (48) равен $e^{-2\pi}U$, то в области стабильности выражение в знаменателе всегда больше нуля.

5.1 Области устойчивости и области субсветовых скоростей

Наиболее просто представить условие $V > 0$ в виде условия для некоторого квадратичного полинома по q и p, коэффициенты которого зависят от функций $F(Y)$ и $K(Y)$. А именно, неравенство $V > 0$ эквивалентно неравенству

$$\frac{1}{U}(C_1 + C_2q + C_3q^2 - C_4p) > 0, \tag{49}$$

где

$$
\begin{aligned}
&C_1 = (F' - 2K + 4)(F' + 2F''Y - 2K + 2m) - 8m(F' - K + YK') + 4F(K' + YK''),\\
&C_2 = 4(F' + 2F''Y - 2K + 2m) + 6m(F' - 2K + 4) - 2m(12YK' - 6K + 3F'),\\
&C_3 = 12m(2 - YK'),\\
&C_4 = 6YK'm,\\
&m = K'Y + K''Y^2.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Неравенство $U > 0$ эквивалентно условию

$$
F' + 2F''Y - 2K + 2m(1 + 3q) > 0. \tag{51}
$$

Выпишем в такой же форме условие $U - V \geq 0$:

$$
\frac{1}{U}(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 q + \tilde{C}_3 q^2 + \tilde{C}_4 p) \geq 0, \tag{52}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\tilde{C}_1 = (2F''Y + 2m - 4)(F' + 2F''Y - 2K + 2m) + 8m(F' - K + YK') - 4F(K' + YK''),\\
&\tilde{C}_2 = 2(3m - 4)(F' + 2F''Y - 2K + 2m) + 6m(2F''Y + 2m - 4) + 6m(4YK' - 2K + F'),\\
&\tilde{C}_3 = 2(3m - 4) + 12YK'm = 36m^2 - C_3,\\
&\tilde{C}_4 = 6YK'm.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Отметим, что $\tilde{C}_4 = C_4$.

5.2 $m \neq 0$

Рассмотрим сначала случай $m \neq 0$. Области стабильности и области субсветовых скоростей, соответствующие условиям (49), (51) и (52) изобразим в виде областей в координатах (q, p). Границами областей, в которых выполняются условия (49) и (52) являются соответственно параболы:

$$C_4 p = C_3 q^2 + C_2 q + C_1, \tag{54}$$

$$-C_4 p = \tilde{C}_3 q^2 + \tilde{C}_2 q + \tilde{C}_1. \tag{55}$$

Из (48) следует, что линия, на которой $U = 0$, определяется из формулы

$$q = -\frac{1}{6m}(F' + 2F''Y - 2K - 2m). \tag{56}$$

Параболы (54) и (55) при любом Y касаются друг друга в одной точке. Действительно, приравнивая правые части выражений (54) и (55), получим квадратное уравнение на q:

$$36m^2 q^2 + 12m(F' + 2F''Y - 2K + 2m)q + (F' + 2F''Y - 2K + 2m)^2 = 0, \tag{57}$$

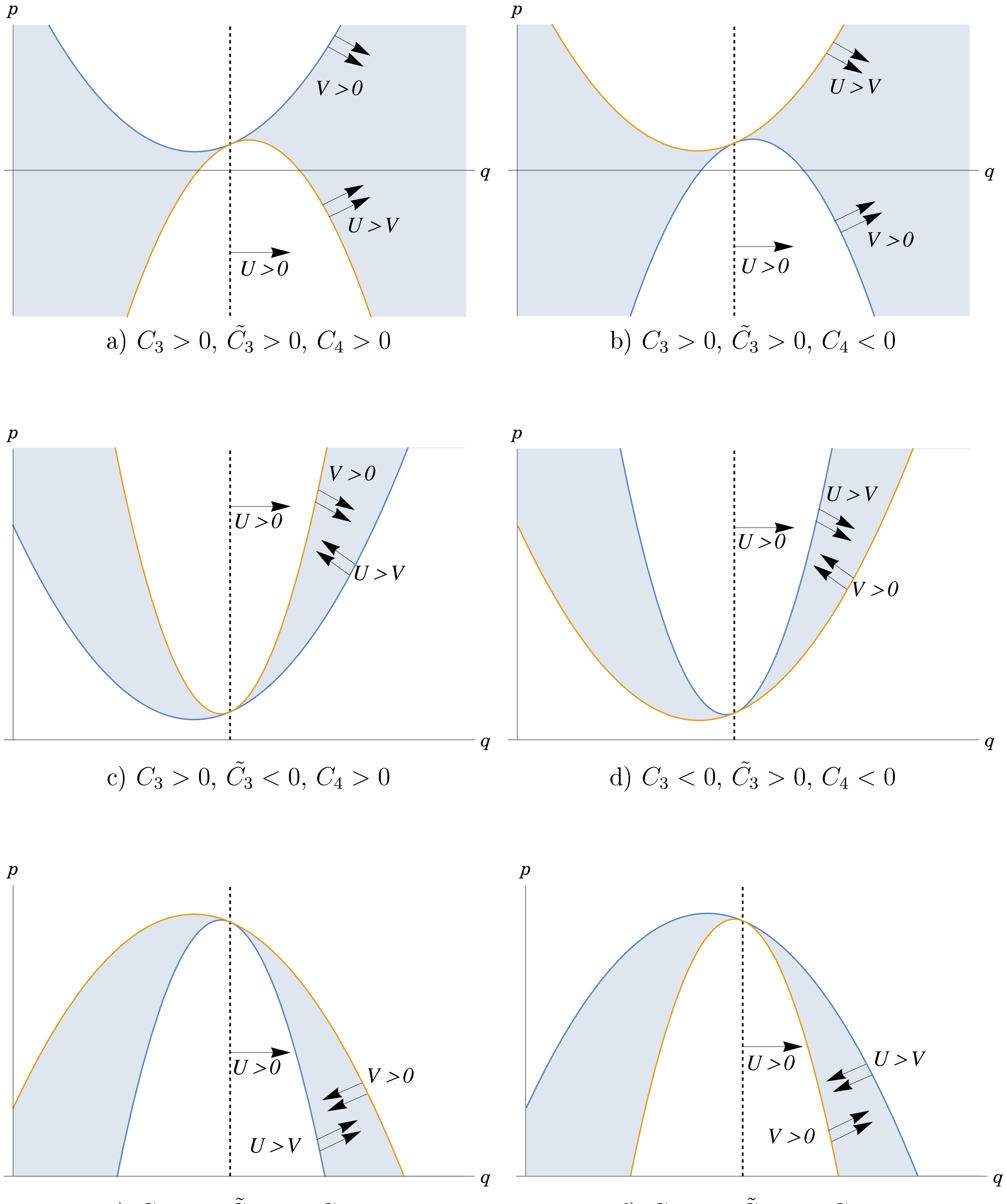
которое имеет нулевой дискриминант, причём его решением является точка (56), то есть точка, в которой $U = 0$.

Сделаем ещё одно важное замечание. Поскольку $C_3 + \tilde{C}_3 = 36m^2$, то коэффициенты C_3 и $\tilde{C}_3$ не могут одновременно быть отрицательными. Рассмотрим случай, когда C_3 и $\tilde{C}_3$ имеют разные знаки.

1) Если $\tilde{C}_3 < 0$, то $C_3 = 36m^2 + |\tilde{C}_3| > |\tilde{C}_3|$, и парабола (54) растёт или убывает быстрее параболы (55) в зависимости от знака C_4.

2) Если $C_3 < 0$, то $\tilde{C}_3 = 36m^2 + |C_3| > |C_3|$, и парабола (55) растёт или убывает быстрее параболы (54) в зависимости от знака C_4.

На рис. (1) изображены области стабильности, а также области субсветовых скоростей в координатах (q, p), при этом использованы формулы (49), (51) и (52).



a) $C_3 > 0$, $\tilde{C}_3 > 0$, $C_4 > 0$

b) $C_3 > 0$, $\tilde{C}_3 > 0$, $C_4 < 0$

c) $C_3 > 0$, $\tilde{C}_3 < 0$, $C_4 > 0$

d) $C_3 < 0$, $\tilde{C}_3 > 0$, $C_4 < 0$

e) $C_3 < 0$, $\tilde{C}_3 > 0$, $C_4 > 0$

f) $C_3 > 0$, $\tilde{C}_3 < 0$, $C_4 < 0$

Рис. 1: Области стабильности решений и области субсветовых скоростей на плоскости (q, p).

Решения удовлетворяют условиям стабильности и отсутствия сверхсветовых скоростей в закрашенных областях справа от пунктирной линии. Области $U > 0$, $V > 0$ и $U > V$ расположены в указанных стрелками сторонах от соответствующих линий. Непосредственно из рис. (1) следует, что условия стабильного фона $U > 0$ и $V > 0$ не исключают область сверхсветовых скоростей $U < V$, если мы не накладываем на q и p (иначе говоря, на давление и плотность материи) никаких дополнительных условий. Таким образом, в рассматриваемой теории всегда существует область сверхсветовых скоростей для возмущений над решениями уравнения движения при отсутствии духов и градиентных нестабильностей.

5.3 $m = 0$

Рассмотрим теперь особый случай $m = 0$, при котором $C_3 = \tilde{C}_3 = C_4 = \tilde{C}_4 = 0$, и в условия (49), (51) и (52) не входит p. В этом случае условия устойчивости и отсутствия сверхсветовых скоростей принимают вид

$$\begin{cases} U = F' - 2K + 2F''Y > 0. \\ V = F' - 2K + 4(q+1) > 0, \\ U - V = 2F''Y - 4(q+1) \geq 0. \end{cases} \tag{58}$$

Отсюда видно, что, зафиксировав Y, при котором $U > 0$, условие $U - V \geq 0$ не выполняется при достаточно больших q, а условие $V > 0$, наоборот, выполняется.

5.4 Справедливость выводов при $P_M, \rho_M \ll M_{pl}$

Необходимо отметить, что все сделанные выводы справедливы в пределах применимости классической теории, когда выполняются условия

$$\begin{aligned} P_M &\ll M_{pl}^4, \\ \rho_M &\ll M_{pl}^4, \end{aligned} \tag{59}$$

где P_M — давление, ρ_M — плотность энергии материи, определяющие параметр Хаббла и его производную.

Покажем, что условия (59) для наших выводов выполняются. Из формул (43) и уравнений Фридмана следует, что

$$P_M = -\frac{1}{8\pi} M_{pl}^2 \cdot (2p + q^2) Y e^{2\pi}, \quad \rho_M = \frac{3}{8\pi} M_{pl}^2 \cdot q^2 Y e^{2\pi}. \tag{60}$$

В условиях устойчивости и отсутствия сверхсветовых скоростей (49), (51) и (52) фигурирует только величина Y, а не π и $\dot{\pi}$ по отдельности. Зафиксировав Y, p и q и уменьшая $e^{2\pi}$, мы всегда можем сделать значения P_M и ρ_M сколь угодно малыми, так что условия (59) будут выполняться. Теперь сформулируем доказанную выше теорему.

Теорема. *В дилатационно-инвариантных теориях с галилеоном и лагранжианом вида (4) в метрике Фридмана всегда существует поведение масштабного фактора, при котором имеются стабильные фоновые решения, возмущения над которыми распространяются со всерхсветовыми скоростями.*

6 Заключение

В дипломной работе рассмотрена дилатационно-инвариантная модель с галилеоном. В случае фонового пространства Минковского предъявлен лагранжиан, для которого все однородные решения стабильны, возмущения над ними распространяются со скоростями, не превышающими скорость света. В метрике Фридмана показано, что подбором зависимости масштабного фактора от времени можно получить фоновые решения уравнения поля, удовлетворяющие условиям стабильности, возмущения над которыми распространяются со сверхсветовыми скоростями. Последнее утверждение сформулировано и доказано в работе в форме запрещающей теоремы на основе требования отсутствия сверхсветовых сигналов.

Приложение

A Условия устойчивости фонового решения

В главе 3 мы получили лагранжиан для возмущений, который имеет вид

$$L^{(2)} = U\dot{\chi}^2 - \frac{1}{a^2}V(\partial_i\chi)^2 + W\chi^2, \tag{61}$$

где U, V и W зависят от π_c и $\dot{\pi}_c$. Если изменения возмущения χ происходят на малых временных масштабах по сравнению с временным масштабом изменения фонового поля π_c, то зависимостью U, V и W от времени можно пренебречь. Функцонал плотности энергии равен

$$E = U\dot{\chi}^2 + \frac{V}{a^2}(\partial_i\chi)^2 + W\chi^2. \tag{62}$$

Дисперсионное соотношение имеет вид

$$U\omega^2 = \frac{V}{a^2}\mathbf{p}^2 + W, \tag{63}$$

где ω — частота, $\mathbf{p}$ — импульс возмущений. Стабильное фоновое решение существует при условии

$$U > 0,\ V > 0,\ W \geq 0, \tag{64}$$

что соответствует положительной определённости фнукционала плотности энергии (62). Более конкретно рассмострим различные случаи неустойчивости фона в рассматриваемой модели.

1) $U > 0$, $V = 0$

Поскольку мы рассматриваем низкоэнергетическую эффективную теорию, то для неё существует характерный ультрафиолетовый масштаб обрезания Λ. При $V = 0$ мы должны рассмотреть в лагранжиане поправки, подавленные фактором Λ^{-1}, поскольку в этом случае они являются существенными. Лагранжиан для возмущений с учётом слагаемых высшего порядка имеет вид

$$L^{(2)} = U\dot{\chi}^2 + \frac{1}{\Lambda^2}[a\ddot{\chi}^2 + b\dot{\chi}^2(\partial_i\chi)^2 + c(\partial_i\partial_i\chi)^2], \tag{65}$$

где мы положили $W = 0$.

Дисперсионное соотношение с точностью до поправок имеет вид

$$U\omega^2 = \frac{c}{\Lambda^2}\mathbf{p}^4, \tag{66}$$

откуда следует, что неустойчивости отсутствуют при $c > 0$.

2) $U > 0$, $V > 0$, $W < 0$. Тахионная неустойчивость.

Из дисперсионного соотношения (63) следует, что ω становится мнимой при достаточно низких импульсах $V\mathbf{p}^2 < |W|$, поэтому имеется растущее возмущение $\chi \propto exp(\int |\omega| dt)$. Это справедливо при малых временных масштабах изменения возмущения $|\omega| \leq \left(\frac{|W|}{U}\right)^{1/2}$. Такие неустойчивости не являются проблематичными, если временной масштаб изменения фонового решения мал по сравнению с $\left(\frac{U}{|W|}\right)^{1/2}$. В данной работе тахионные неустойчивости мы не рассматриваем.

3) $U > 0$, $V < 0$ или $U < 0$, $V > 0$. Градиентная неустойчивость.

Дисперсионное соотношение (63) приводит к мнимым частотам ω при высоких импульсах, и возмущение экспоненциально растёт, что приводит к катастрофической неустойчиовости фонового решения.

4) $U < 0$, $V < 0$. Духовая неустойчивость.

Поскольку энергия (62) отрицательна, то частицы возмущения χ после квантования будут иметь отрицательные энергии и представлять собой духи. Вакуум в данном случае неустойчив, так как рождение пар духи-обычные частицы не запрещено законом сохранения энергии.

В данной работе мы обсуждаем градиентные и духовые неустойчивости, поскольку их существование делает фоновое решение заведомо нестабильным.

Список литературы

[1] R. Penrose, Phys. Rev. Lett. **14**, 57, (1965)

[2] A. Borde, A. Guth, A. Vilenkin, ***Inflationary spacetimes are not past-complete***, Phys. Rev. Lett. **90**, 151301 (2003), arXiv:0110012 [gr-qc]

[3] S. Dubovsky, T. Gregoire, A. Nicolis, R. Rattazzi, ***Null energy condition and superluminal propagation***, JHEP (0603), 025, (2006), arXiv:0512260 [hep-th]

[4] R. V. Buniy, S. D. H. Hsu, B. M. Murray, ***The null energy condition and instability***, Phys.Rev.D **74** 063518, (2006), arXiv:0606091v1 [hep-th]

[5] L. Senatore, ***Tilted Ghost Inflation***, Phys.Rev.D **71** 043512, (2005), arXiv:0406187 [astro-ph]

[6] G. W. Horndeski ***Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space***, Int. J. Theor. Phys. **10**, 363–384, (1974)

[7] A. Nicolis, R. Rattazzi, E. Trincherini, ***The galileon as a local modification of gravity***, Phys. Rev. D **79**, 064036, (2009), arXiv:0811.2197 [hep-th]

[8] C. Deffayet, O. Pujolas, I. Sawicki, A. Vikman, ***Imperfect Dark Energy from Kinetic Gravity Braiding***, JCAP (1010), 026, (2010), arXiv:1401.4024v2 [hep-th]

[9] T. Kobayashi, M. Yamaguchi, J. Yokoyama, ***G-inflation: inflation driven by the Galileon field***, Phys.Rev.D **105**, 231302, (2010), arXiv:1008.0603 [hep-th]

[10] P. Creminelli, A. Nicolis, E. Trincherini, ***Galilean Genesis: an alternative to inflation***, JCAP (1011), 021, (2010), arXiv:1209.3768 [hep-th]

[11] P. Creminelli, K. Hinterbichler, J. Khoury, A. Nicolis, E. Trincherini, ***Subluminal Galilean Genesis***, JHEP (1302), 006, (2013), arXiv:1209.3768 [hep-th]

[12] M. Osipov, V. Rubakov, ***Galileon bounce after ekpyrotic contraction***, JCAP (11), 031, (2013), arXiv:1303.1221v1 [hep-th]

[13] M. Koehn, J. Lehners, B. A. Ovrut, ***A Cosmological Super-Bounce***, Phys. Rev. D **90**, 025005, (2014), arXiv:1310.7577 [hep-th]

[14] V. A. Rubakov, ***Consistent NEC-violation: towards creating a universe in the laboratory***, Phys. Rev. D **88**, 044015, (2013), arXiv:1305.2614v2 [hep-th]

[15] V. A. Rubakov, ***The Null Energy Condition and its violation***, Phys. Usp. 57 (2014) 128-142, arXiv:1401.4024 [hep-th]

[16] A. Adams, N. Arkani-Hamed, S. Dubovsky, A. Nicolis, R. Rattazzi, ***Causality, Analyticity and an IR Obstruction to UV Completion***, JHEP (0610), 014, (2006), arXiv:0602178 [hep-th]