Космологические модели с галилеоном

Евсеев Олег Александрович

24 мая 2016 г.

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор, академик РАН
Рубаков Валерий Анатольевич

Галилеоны

Первое употребление термина:
«The galileon as a local modification of gravity», Nicolis A., Rattazzi R. and Trincherini E., Phys.Rev.D vol.79, 064036 (2009) [arXiv:0811.2197]

- Инвариантность уравнений движения относительно замены $\partial^\mu \pi \to \partial^\mu \pi + b^\mu$, где b^μ – постоянный вектор.
- Уравнения движения, не содержащие производных выше второго порядка, несмотря на производную второго порядка в лагранжиане.

«Преобразования Галилея»

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= \pi, \\
\mathcal{L}_2 &= \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi, \\
\mathcal{L}_3 &= [\Pi](\partial_\mu \pi \partial^\mu \pi), \\
\mathcal{L}_4 &= [\Pi]^2(\partial_\mu \pi \partial^\mu \pi) - 2[\Pi](\partial_\mu \pi)\Pi^\mu{}_\nu(\partial^\nu \pi) \\
&\quad - [\Pi^2](\partial_\mu \pi \partial^\mu \pi) + 2(\partial_\mu \pi)\Pi^\mu{}_\nu \Pi^\nu{}_\lambda(\partial^\lambda \pi), \\
\mathcal{L}_5 &= [\Pi]^3(\partial_\mu \pi \partial^\mu \pi) - 3[\Pi]^2(\partial_\mu \pi)\Pi^\mu{}_\nu(\partial^\nu \pi) - 3[\Pi][\Pi^2](\partial_\mu \pi \partial^\mu \pi) \\
&\quad + 6[\Pi](\partial_\mu \pi)\Pi^\mu{}_\nu \Pi^\nu{}_\lambda(\partial^\lambda \pi) + 2[\Pi^3](\partial_\mu \pi \partial^\mu \pi) \\
&\quad + 3[\Pi]^2(\partial_\mu \pi)\Pi^\mu{}_\nu(\partial^\nu \pi) - 6(\partial_\mu \pi)\Pi^\mu{}_\nu \Pi^\nu{}_\lambda \Pi^\lambda{}_\rho(\partial^\rho \pi),
\end{aligned}$$

где $[A] = A^\mu{}_\mu$ – свёртка тензора A ранга $\binom{1}{1}$, $\Pi^\mu{}_\nu = \partial^\mu \partial_\nu \pi$.

Галилеоны и NEC

Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = F(\pi, X) + K(\pi, X)\Box\pi,$$

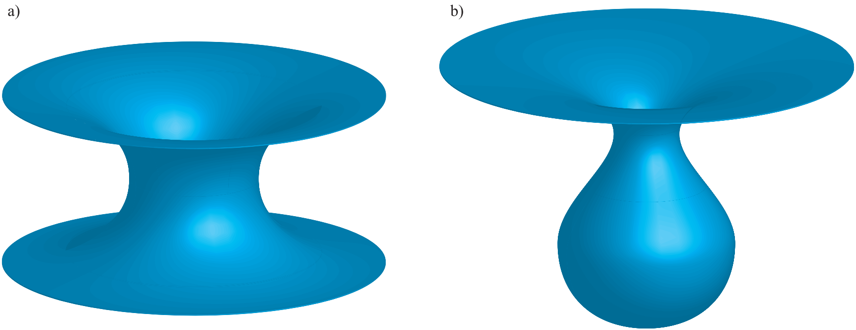
$$X = \nabla_\mu \pi \nabla^\mu \pi, \;\; \Box\pi = \nabla_\mu \nabla^\mu \pi.$$

Изотропное условие энергодоминантности (the Null Energy Condition, NEC):

$$T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu > 0,$$

для любого светоподобного n^μ: $\quad n_\mu n^\mu = 0.$

Кротовые норы



Метрика

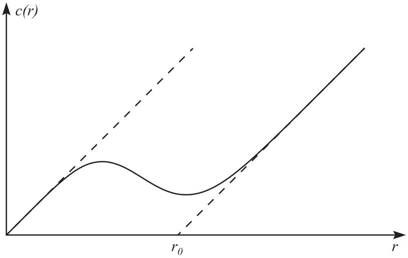
$$ds^2 = a^2(r)dt^2 - b^2(r)dr^2 - c^2(r)\gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

Калибровка $b = \frac{1}{a}$:

$ds^2 = a^2 dt^2 - \frac{1}{a^2} dr^2 - c^2 \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$

Асимптотики:

- при $r \to 0 : a \to 1,\ c \to r;$
- при $r \to \infty : a \to 1,$
  $c \to r - r_0.$



Уравнения Эйнштейна

$$\boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \qquad \kappa = 8\pi G}$$

$$G_0^0 = -2a^2 \left[\frac{a'c'}{ac} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{c'}{c} \right)^2 - \frac{1}{a^2 c^2} \right) \right] - 2a^2 \frac{c''}{c},$$

$$G_r^r = -2a^2 \left[\frac{a'c'}{ac} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{c'}{c} \right)^2 - \frac{1}{a^2 c^2} \right) \right], \qquad G_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha G^\Omega,$$

$$G^\Omega = -a^2 \left[\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 + \left(\frac{c''}{c} + 2 \frac{a'c'}{ac} \right) \right].$$

$$\boxed{G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}}$$

$$T_0^0 = -F - \pi'^2 K_\pi + 2\pi'^2 \pi'' K_X,$$
$$T_r^r = -F + \pi'^2 K_\pi + 2\pi'^3 \left(\frac{a'}{a} + 2\frac{c'}{c} \right) K_X - 2\pi'^2 F_X,$$
$$T_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha T^\Omega, \qquad T^\Omega = T_0^0.$$

Следовательно, разумно рассмотреть систему:

$$\begin{cases} G_0^0 = G^\Omega \\ G_0^0 - G_r^r = \kappa \left(T_0^0 - T_r^r \right) \\ G_0^0 = \kappa T_0^0 \end{cases}$$

Замена переменных

$$\boxed{G_0^0 = G^\Omega}$$

После приведения подобных:

$$\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 - \frac{c''}{c} - \left(\frac{c'}{c}\right)^2 + \frac{1}{a^2c^2} = 0.$$

Замена переменных $a^2 = \gamma$, $c^2 = u$:

$$\gamma'' u - u'' \gamma + 2 = 0.$$

Решение

$$\boxed{\gamma'' u - u'' \gamma + 2 = 0}$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{u} \Rightarrow u^2 \alpha'' + 2uu'\alpha' + 2 = 0$$
$$\beta = \alpha' \Rightarrow u^2 \beta' + 2uu'\beta + 2 = 0$$

$$\gamma = u \left[\int\limits_r^\infty \frac{2\tilde{r} - C}{u^2(\tilde{r})} d\tilde{r} + D \right]$$

Асимптотики

- при $r \to 0$ ($\gamma \to 1$, $u \to r^2$):

$$\gamma \to 1 - \frac{C}{3}\frac{1}{r} + Dr^2 \;\;\Rightarrow\;\; C = 0.$$

- при $r \to \infty$ ($\gamma \to 1$, $u \to (r - r_0)^2$):

$$\gamma \to 1 + \frac{2r_0 - C}{3}\frac{1}{r - r_0} + D(r - r_0)^2 \;\;\Rightarrow\;\; D = 0.$$

Итак:

$$\gamma(r) = u(r)\int\limits_r^\infty \frac{2\tilde{r}}{u^2(\tilde{r})}d\tilde{r}.$$

Метрика Шварцшильда

$$g = \begin{bmatrix} \left(1-\frac{r_s}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$ds^2 = \left(1-\frac{r_s}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)}dr^2 - c^2\gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

$$ds^2 = a^2 dt^2 - \frac{1}{a^2}dr^2 - c^2\gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta,$$

$$a^2(r) = 1 - \frac{r_s}{r}, \qquad c^2(r) = r^2$$

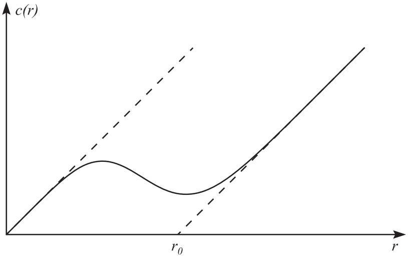
Радиус Шварцшильда

При $r \to \infty$:

$$a^2 \to 1 + \frac{2r_0}{3} \frac{1}{r - r_0}.$$

Для метрики Шварцшильда:

$$a^2 = 1 - \frac{r_s}{r}, \qquad r_s = 2GM = \frac{\kappa M}{4\pi}.$$



Сравнивая асимптотики:

$$r_{eff} = r - r_0, \qquad r_s = -\frac{2}{3} r_0, \qquad M_{eff} = -\frac{8\pi}{3\kappa} r_0.$$

Оставшиеся уравнения

- $G_0^0 - G_r^r = \kappa \left(T_0^0 - T_r^r\right)$:

$$\pi'^2 \left[F_X - K_\pi + a^2 \left(\pi'' - 2\frac{c'}{c}\right) K_X\right] = -\frac{1}{\kappa} a^2 \frac{c''}{c}.$$

- $G_0^0 = \kappa T_0^0$:

$$\frac{F}{a^2} + \pi'^2 K_\pi - 2a(a'\pi' + a\pi'')\pi'^2 K_X = \frac{2}{\kappa}\left[\frac{a'c'}{ac} + \frac{c''}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{c'^2}{c^2} - \frac{1}{a^2c^2}\right)\right].$$

Калибровка $\pi = r$

$$\begin{cases} F_X = K_\pi + 2a^2\dfrac{c'}{c}K_X - \dfrac{1}{\kappa}a^2\dfrac{c''}{c}, \\[2ex] \dfrac{F}{a^2} = -K_\pi + 2aa'K_X + \dfrac{2}{\kappa}\left[\dfrac{a'c'}{ac} + \dfrac{c''}{c} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c'^2}{c^2} - \dfrac{1}{a^2c^2}\right)\right]. \end{cases}$$

Выводы 1/2

- Записана система уравнений Эйнштейна для выбранной теории с галилеоном.
- Получено решение одной из комбинации уравнений в квадратурах.
- Показано, что оставшиеся два уравнения обладают достаточным произволом в выборе функций F и K для того, чтобы быть разрешимыми для широкого класса функций.

Выводы 2/2

- Доказано, что решения искомого типа приводят к объекту, имеющему отрицательный радиус Шварцшильда. Таким образом, соответствующая полевая конфигурация будет видна стороннему наблюдателю как объект отрицательной массы.
- Полученный результат верен не только в теориях с галилеоном, но и в любых теориях, обладающих симметрией $T^{00} = T^{\Omega}$.

Спасибо за внимание!