

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова"

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

"Туннельный распад метастабильных состояний в
моделях с $U(1)$ -инвариантностью."

Выполнил студент
443 группы
Попеску Андрей Доринович

(подпись студента)

Научные руководители:

кандидат физ.-мат. наук,
Д. Г. Левков,

(подпись научного руководителя)

Допущен к защите 24.05.2016

Заф. кафедрой _____
(подпись зав. кафедрой)

кандидат физ.-мат. наук,
Э. Я. Нураев.

(подпись научного руководителя)

Москва
2016 г.

Оглавление

Введение	3
1. Квазиклассический метод	4
2. Расчет вероятности распада Q-шаров	7
2.1. Модель	7
2.2. Вероятность перехода и седловые условия	8
3. Применение метода к простой квантомеханической задаче	12
3.1. Модель	12
3.2. Применение квазиклассического метода	15
3.3. Вероятность и условия на седловую траекторию	17
3.4. Сравнение результата с известным ответом	19
4. Расчет в теории поля	24
Заключение	27
Список использованных источников	27

Введение

В данной работе исследуется задача о туннельном переходе между состояниями в случае, если в системе присутствует сохраняющийся заряд Q , соответствующий симметрии $U(1)$. Интерес представляют классически стабильные начальное и конечное состояния, то есть реализующие локальные минимумы энергии. Главной особенностью рассматриваемого класса задач является то, что экстремум энергии достигается в секторе с заданным значением сохраняющегося заряда Q . Такой заряд присутствует, например, при изучении распада нетопологических солитонов, реализующих локальный минимум энергии при заданном Q .

Основной задачей работы является квазиклассический расчет вероятности распада Q -шаров. В теориях с Q -шарами начиная с определенного значения заряда есть две классически устойчивые конфигурации: локализованный солитон, называемый Q -шаром, и ансамбль свободных частиц. При малых значениях заряда энергия локализированной системы может оказаться выше суммарной энергии свободных частиц. В этом случае Q -шар будет распадаться в свободные частицы.

Сохраняющиеся заряды возникают и в задачах иного рода. Например, в квантовой механике двух измерений задача о движении частицы в аксиально-симметричном потенциале с угловым моментом l как раз имеет сохраняющуюся величину l , которая также соответствует симметрии $U(1)$. При некоторых значениях l могут существовать два локальных минимума энергии. Решение этой задачи мы используем как проверку работоспособности метода.

В работе предложен метод описания распада Q -шара в главном квазиклассическом приближении. Задача о распаде сведена к численному решению классических уравнений. Метод применен к задаче квантовой механики, получен ответ, который совпадает с общезвестным.

1. Квазиклассический метод

Чтобы определить вероятность перехода в квантовой системе, нужно вычислить амплитуду перехода между двумя состояниями и возвести её по модулю в квадрат. Проблема заключается в определении состояния, реализующего экстремум энергии с заданным сохраняющимся зарядом Q . Далее будем называть локализованные состояния, реализующие локальный минимум при заданном Q “ Q -шарами”, а абсолютный минимум – истинными вакуумами.

Мы рассматриваем гамильтонианы H , обладающие симметрией $U(1)$. Заряд Q соответствует этой симметрии, а оператор \hat{Q} коммутирует с H .

Рассмотрим произвольное состояние $|\psi_i\rangle$. Введем оператор проекции \hat{P}_Q на подпространство состояний с фиксированным значением заряда Q .

Подействуем оператором e^{-HT} с большим действительным T на полученное состояние. Предел $T \rightarrow \infty$ вырезает состояние с минимумом энергии из всех состояний с заданным значением Q . Так как операторы \hat{Q} и \hat{H} коммутируют, их собственные вектора совпадают. Тогда состояние $\hat{P}_Q |\psi_i\rangle$ раскладывается по базису состояний с определенной энергией E_k и зарядом Q .

$$e^{-HT} \hat{P}_Q |\psi_i\rangle = \sum_k e^{-E_k T} |E_k, Q\rangle \langle E_k, Q| \hat{P}_Q |\psi_i\rangle \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{} e^{-E_0 T} |E_0, Q\rangle \langle E_0, Q| |\psi_i\rangle. \quad (1)$$

В главной асимптотике выделяется слагаемое с наименьшей энергией E_0 , если $\langle E_0, Q | \psi_i \rangle \neq 0$. Таким образом, чтобы выделить состояние, находящееся в ложном вакууме, нужно, чтобы начальная волновая функция не была ортогональна состоянию Q -шара. Это несколько ограничивает выбор начального состояния $|\psi_i\rangle$.

Теперь перейдем к описанию перехода. Выберем некоторое конечное состояние $|\psi_f\rangle$, которое локализовано в секторе истинного вакуума. Рассмотрим выражение

$$\mathcal{P}_1 = \left| \langle \psi_f | e^{-iHt} e^{-HT} \hat{P}_Q |\psi_i\rangle \right|^2. \quad (2)$$

Просуммируем его по начальным состояниям $|\psi_i\rangle$. Представление (1) позволяет упростить выражение (2):

$$\sum_{\psi_i} \mathcal{P}_1 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \sum_{\psi_i} \langle \psi_f | e^{-iHt} | E_0, l \rangle \cdot e^{-E_0 T} \cdot \langle E_0, Q | \psi_i \rangle \langle \psi_i | E_0, Q \rangle \cdot \\ \cdot e^{-E_0 T} \cdot \langle E_0, Q | e^{-iHt} | \psi_f \rangle = e^{-2E_0 T} \cdot \left| \langle \psi_f | e^{-iHt} | E_0, Q \rangle \right|^2, \quad (3)$$

Если просуммировать последнее выражение по конечным состояниям $|\psi_f\rangle$, отличным от начальных (не локализованных вблизи Q -шара) и домножить на фактор $e^{2E_0 T}$, то в пределе больших T мы получим выражение для вероятности выхода частицы из ложного вакуума за время t , то есть

$$\mathcal{P} = \sum_{\psi_f} \left| \langle \psi_f | e^{-iHt} | E_0, Q \rangle \right|^2$$

Используя (2) и (3), запишем итоговую формулу, которой мы будем пользоваться в дальнейшем:

$$\mathcal{P} = e^{2E_0 T} \cdot \sum_{\psi_f, \psi_i} \left| \langle \psi_f | e^{-iHt} e^{-HT} \hat{P}_Q | \psi_i \rangle \right|^2. \quad (4)$$

Основным инструментом вычисления этой величины будет представление амплитуды перехода через континуальный интеграл.

Пусть мы хотим вычислить амплитуду перехода полевой системы в n -мерном пространстве из состояния, являющегося собственной функцией оператора поля с конфигурацией $\varphi_b(\vec{x})$ в другое состояние с конфигурацией $\varphi_a(\vec{x})$ за данное время t . Тогда имеет место выражение

$$\langle \varphi_a | e^{-iHt} | \varphi_b \rangle = \int \mathcal{D}\varphi(t, \vec{x}) e^{iS_{ab}}, \quad (5)$$

где S_{ab} обозначает классическое действие на траектории $\varphi(t, \vec{x})$. Интегрирование ведется по траекториям, для которых начальная конфигурация поля это $\varphi_b(\vec{x})$, а конечная – это $\varphi_a(\vec{x})$.

Вычисления будут проводиться в главном квазиклассическом прибли-

жении. Это позволяет применять седловой метод для взятия континуальных интегралов. Он состоит в том, что ищется седловая точка, в которой функция принимает максимальное значение, а затем все выражение аппроксимируется гауссоподобной кривой с вершиной в точке максимума. Применяя этот метод, мы не будем выписывать предэкспоненциальные множители, так что значение интеграла сводится к значению функции в точке максимума.

Для этого также будем пользоваться разложением состояния по собственным функциям оператора напряженности поля (либо оператора координаты в механике). Далее вычисления будут проводиться в главном квазиклассическом приближении, то есть интегралы будут браться седловым методом.

Итак, мы получили выражение для расчета вероятности перехода, которое можно вычислить с помощью применения континуальных интегралов и их расчета седловым методом. Заметим, что вероятность не зависит от выбора начальных и конечных состояний, которыми мы пользовались в начале, что подчеркивает универсальность формулы.

2. Расчет вероятности распада Q-шаров

2.1. Модель

Рассматривается модель комплексного скалярного поля в (1+1)-мерном пространстве с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \cdot \partial^\mu \bar{\varphi} - V(\varphi \bar{\varphi}),^1 \quad (6)$$

где потенциал V , зависящий от переменной $\rho^2 \equiv \varphi \bar{\varphi}$, выбирается в виде

$$V(\rho) = M^2 v^2 + \Theta(v - \rho) \cdot (M^2 \rho^2 - M^2 v^2), \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Такой потенциал допускает существование устойчивых локализованных полевых конфигураций – солитонов [1]. Упомянем, что теории с потенциалами, которые удовлетворяют условию

$$\left[\frac{V(\rho)}{\rho^2} \right]_{\rho \rightarrow \infty} = 0$$

называют теориями с плоскими направлениями. В работе [2] из формул (21)–(24) легко получить, что энергия солитонов в (1+1)-мерном пространстве при потенциале (7) асимптотически зависит от заряда по закону $E \sim Q^{1/2}$. Действительно,

$$Q = v^2 M^2 \frac{\pi}{2\omega^2} + \mathcal{O}(\omega^{-2}),$$

$$E = v^2 M^2 \frac{\pi}{2\omega} + 2v^2 M^2 \frac{\pi}{2\omega} + \mathcal{O}(\omega^{-1}) \sim \sqrt{Q}.$$

Также в [2] показано, что классически стабильными солитоны становятся еще при значениях энергии, большей, чем энергия свободных частиц с тем же зарядом. Мы интересуемся именно такими зарядами, при которых

¹Введение $\bar{\varphi}$ обусловлено применением евклидовой эволюции ниже, в которой равенство $\varphi^* = \bar{\varphi}$ не выполняется.

распад классически стабильного солитона энергетически выгоден.

2.2. Вероятность перехода и седловые условия

Пользуясь методом главы 1, выведем выражение для вероятности распада Q -шара.

Собственное состояние оператора поля $\hat{\varphi}$ будем обозначать как $|\varphi, \bar{\varphi}\rangle$. Введем некоторое начальное состояние $|\psi_i\rangle = |\varphi_0, \bar{\varphi}_0\rangle$, локализованное вблизи состояния Q -шара, то есть, его матричный элемент с состоянием Q -шара отличен от нуля. Оператор проекции \hat{P}_Q на заряд Q имеет вид

$$\hat{P}_Q = \int d\alpha e^{i\alpha(\hat{Q}-Q)}. \quad (8)$$

Оператор \hat{Q} является генератором зарядовой симметрии $U(1)$, поэтому $e^{i\alpha\hat{Q}} |\varphi, \bar{\varphi}\rangle = |\varphi e^{i\alpha}, \bar{\varphi} e^{-i\alpha}\rangle$. Таким образом

$$\hat{P}_Q |\varphi, \bar{\varphi}\rangle = \int d\alpha e^{-i\alpha Q} |\varphi e^{i\alpha}, \bar{\varphi} e^{-i\alpha}\rangle. \quad (9)$$

Введем конечное состояние $|\psi_f\rangle = |\varphi_c, \bar{\varphi}_c\rangle$. Будем считать, что оно локализовано вблизи истинного вакуума. Запишем амплитуду перехода

$$A = \langle \psi_f | e^{-iHt} e^{-HT} \hat{P}_Q |\psi_i\rangle. \quad (10)$$

Подставим единичные операторы в виде ансамбля состояний типа $|a\rangle \equiv |\varphi_a, \bar{\varphi}_a\rangle$

$$A = \int_{a,b} \langle c | e^{-iHt} |a\rangle \langle a| e^{-HT} |b\rangle \langle b| \hat{P}_Q |\psi_i\rangle. \quad (11)$$

Здесь и далее мы опускаем меру интегрирования и пишем величины, по которым ведется интегрирования под знак интеграла. Далее переходим к континуальным интегралам. Множитель $\langle c | e^{iHt} |a\rangle$ можно представить в

виде континуального интеграла

$$\langle c | e^{-iHt} | a \rangle = \int \mathcal{D}\varphi(t) \mathcal{D}\bar{\varphi}(t) \cdot e^{iS_{ca}[\varphi(t), \bar{\varphi}(t)]} = \int_{\varphi(t), \bar{\varphi}(t)} e^{iS_{ca}[\varphi(t), \bar{\varphi}(t)]}, \quad (12)$$

где S_{ca} обозначает классическое действие на траектории $[\varphi(t), \bar{\varphi}(t)]$, которая интерполирует между точками $(\varphi_a, \bar{\varphi}_a)$ и $(\varphi_c, \bar{\varphi}_c)$. Далее не будем явно писать $\mathcal{D}\varphi(t) \mathcal{D}\bar{\varphi}(t)$.

Множитель $\langle a | e^{-HT} | b \rangle$ также сводится к континуальному интегралу, здесь время на действии эволюционирует от точки iT до 0. С учетом (9), (10) и (12), выражение для амплитуды примет вид:

$$A = \int_{a,b,\alpha,\varphi(t),\bar{\varphi}(t)} e^{iS_{ca}} e^{iS_{ab}} e^{-i\alpha Q} \cdot \delta(\varphi_b - \varphi_0 e^{-i\alpha}, \bar{\varphi}_b - \bar{\varphi}_0 e^{i\alpha}). \quad (13)$$

Седловым условием на траекторию $\varphi(t), \bar{\varphi}(t)$ являются уравнения движения. С учетом формы потенциала (7), их можно записать так:

$$\begin{cases} \partial_\mu \partial^\mu \varphi + (\partial V / \partial \rho^2) \cdot \varphi = 0, \\ \partial_\mu \partial^\mu \bar{\varphi} + (\partial V / \partial \rho^2) \cdot \bar{\varphi} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Интегрирование (13) по $(\varphi_b, \bar{\varphi}_b)$ дает условие

$$\varphi_b = \varphi_0 e^{-i\alpha}, \quad \bar{\varphi}_b = \bar{\varphi}_0 e^{i\alpha}. \quad (15)$$

Далее заметим следующие соотношения, вытекающие из лагранжиана (6):

$$\begin{cases} \delta S_{ab} / \delta \varphi_a(x) = \pi_a(x) = \partial^0 \bar{\varphi}_a(x), \\ \delta S_{ab} / \delta \bar{\varphi}_a(x) = \bar{\pi}_a(x) = \partial^0 \varphi_a(x). \end{cases} \quad (16)$$

Седловое интегрирование выражения (13) по $(\varphi_a, \bar{\varphi}_a)$ с учетом (16) приводит к условию непрерывности импульсов $\pi, \bar{\pi}$ в точке a . Так как в остальных точках удовлетворяются уравнения движения (14), то импульсы непрерывны на всей траектории.

В выражении для амплитуды остается ещё интеграл по параметру α :

$$A = \int_{\alpha} e^{iS_{ca}} e^{iS_{ab}} e^{-i\alpha Q}. \quad (17)$$

Седловое условие для него:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial(S_{ab} - \alpha Q)}{\partial \alpha} = \int dx \left[\frac{\partial S_{ab}}{\partial \varphi_b} \frac{\partial \varphi_b}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_{ab}}{\partial \bar{\varphi}_b} \frac{\partial \bar{\varphi}_b}{\partial \alpha} \right] - Q, \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int dx [\pi\varphi - \bar{\pi}\bar{\varphi}] = -iQ. \end{aligned} \quad (18)$$

Итак, с учетом условий (14), (15) и (18), амплитуда определяется действием на траектории с заданными начальной точкой $(\varphi_b, \bar{\varphi}_b)$ и конечной $(\varphi_c, \bar{\varphi}_c)$. Траектория задана на контуре времени, состоящем из отрезков $[iT, 0]$ и $[0, t]$. Формула для амплитуды имеет вид:

$$A = e^{iS_{cb}} e^{-i\alpha Q}. \quad (19)$$

Переходим к вычислению вероятности. Следуя (4), записываем формулу для вероятности распада

$$\mathcal{P} = e^{2E_0 T} \cdot \int_{\varphi_c, \bar{\varphi}_c, \varphi_0, \bar{\varphi}_0} A^* A = e^{2E_0 T} \cdot \int_{\varphi_c, \bar{\varphi}_c, \varphi_0, \bar{\varphi}_0} e^{-i\alpha Q + i\alpha^* Q} \cdot e^{iS_{cb} - iS_{cb}^*}. \quad (20)$$

Получим седловые условия на интеграл по $\varphi_c, \bar{\varphi}_c$:

$$\begin{cases} \frac{\partial(S_{cb} - S_{cb}^*)}{\partial \varphi_c} = \bar{\pi}_c - \pi_c^* = 0, \\ \frac{\partial(S_{cb} - S_{cb}^*)}{\partial \bar{\varphi}_c} = \pi_c - \bar{\pi}_c^* = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Как мы видим, второе соотношение является комплексно-сопряжённым первому.

На этапе действительной траектории в точке c поле является физическим, поэтому $\bar{\varphi}_c = \varphi_c^*$. Полученные соотношения (16), (21) с учетом вида

уравнений движения (14) приводят к результату, что $\bar{\varphi} = \varphi^*$ на всем отрезке действительной эволюции.

Теперь рассмотрим седловые уравнения на интеграл по $\varphi_0, \bar{\varphi}_0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial(S_{cb} - S_{cb}^*)}{\partial\varphi_0} = \frac{\partial S_{cb}}{\partial\varphi_b} \frac{\partial\varphi_b}{\partial\varphi_0} - \frac{\partial S_{cb}^*}{\partial\bar{\varphi}_b^*} \frac{\partial\bar{\varphi}_b^*}{\partial\varphi_0} = -\pi_b \cdot e^{-i\alpha} + \bar{\pi}_b^* \cdot e^{-i\alpha^*} = 0, \\ \frac{\partial(S_{cb} - S_{cb}^*)}{\partial\bar{\varphi}_0} = \frac{\partial S_{cb}}{\partial\bar{\varphi}_b} \frac{\partial\bar{\varphi}_b}{\partial\bar{\varphi}_0} - \frac{\partial S_{cb}^*}{\partial\varphi_b^*} \frac{\partial\varphi_b^*}{\partial\bar{\varphi}_0} = -\bar{\pi}_b \cdot e^{i\alpha} + \pi_b^* \cdot e^{i\alpha^*} = 0, \end{cases} \quad (22)$$

Здесь также одно из уравнений переходит в другое при комплексном сопряжении. Введем величину $\eta \equiv -i(\alpha^* - \alpha) = -2 \operatorname{Im}(\alpha)$ и переведем соотношения (15) и (22) в более удобный вид:

$$\begin{cases} \varphi_b = \bar{\varphi}_b^* e^{-\eta}, \\ \bar{\varphi}_b = \varphi_b^* e^\eta, \\ \pi_b = \bar{\pi}_b^* e^\eta, \\ \bar{\pi}_b = \pi_b^* e^{-\eta}. \end{cases} \quad (23)$$

Итак, процедура седлового интегрирования величины (20) завершена. Вероятность распада определяется формулой

$$\mathcal{P} = e^{-\mathcal{F}}, \quad -\mathcal{F} = 2E_0T - \eta Q - 2 \operatorname{Im} S_{cb}, \quad (24)$$

с учетом выполнения условий (14), (18), (23).

3. Применение метода к простой квантомеханической задаче

Задача этого раздела проиллюстрировать применение предлагаемого нами квазиклассического метода на простой задаче квантовой механики. Мы проведем вычисления и получим результат, который сравнивается с известным ответом, полученным в [3] другими методами.

3.1. Модель

Квантовый переход между классически устойчивыми состояниями с равным значением сохраняющейся величины имеет место в задаче о движении частицы в (2+1)-мерном пространстве-времени в $O(2)$ -симметричном потенциале. Роль заряда Q здесь играет орбитальный момент l . Пространственные измерения будем обозначать как x и y .

Выберем потенциал в виде

$$V(r^2) = \begin{cases} \alpha^2 \rho^2, & \rho^2 < r_0^2; \\ \beta^2(\rho^2 - r_0^2) + \alpha^2 r_0^2, & \rho^2 > r_0^2 \end{cases}$$

Здесь $\rho = x^2 + y^2$ – величина радиус вектора, r_0 – некоторое действительное число, указывающее на место излома потенциала, α и β – действительные коэффициенты, причем, $\alpha > \beta$.

Потенциал можно переписать, используя функцию Хевисайда

$$V(\rho^2) = \alpha^2 \rho^2 + \Theta(\rho^2 - r_0^2) \cdot \left(\beta^2 \rho^2 - \alpha^2 \rho^2 + (\alpha^2 - \beta^2) r_0^2 \right), \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Мы выбираем такой вид потенциала, чтобы реализовать два локальных минимума энергии при фиксированном значении орбитального момента l . Они возникают при сведении двумерной задачи к одномерной – по переменной ρ .

Гамильтониан системы в координатах x и y выглядит так:

$$\mathcal{H} = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + V(x^2 + y^2).$$

Замена переменных $x = \rho \cos \gamma$, $y = \rho \sin \gamma$, а также учет сохраняющегося орбитального момента $\rho^2 \dot{\gamma} = l$ приводит гамильтониан в вид

$$\mathcal{H} = \frac{\dot{\rho}^2}{2} + \frac{l^2}{2\rho^2} + V(\rho). \quad (25)$$

Таким образом, задача сводится к одномерной с эффективным потенциалом

$$V_{eff}(\rho^2) = V(\rho^2) + \frac{l^2}{2\rho^2}.$$

Пример¹ этого потенциала представлен на рисунке 1. Условие на существование двух минимумов при $r = r_1$ и $r = r_2$ эффективного потенциала имеет вид:

$$r_1 = \left(\frac{l^2}{2\alpha^2} \right)^{1/4} < r_0 < \left(\frac{l^2}{2\beta^2} \right)^{1/4} = r_2.$$

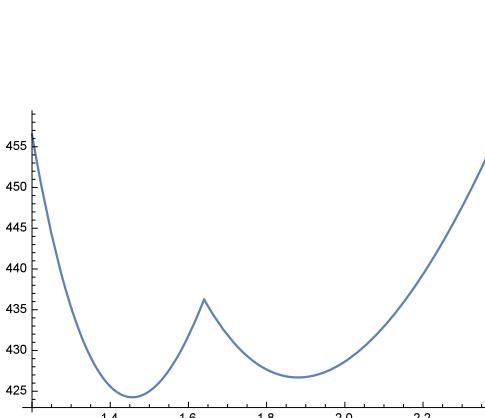


Рисунок 1 - Пример $V_{eff}(r)$.

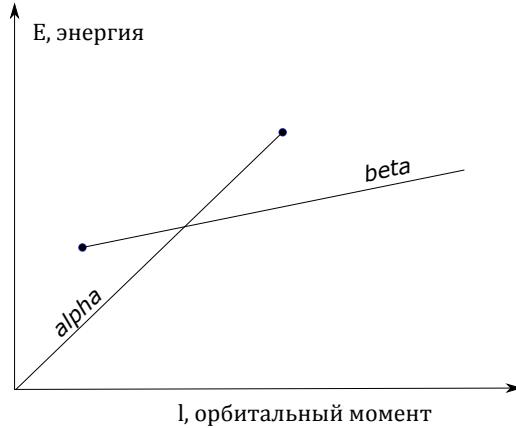


Рисунок 2 - Связь локальных минимумов E и значения L .

На рисунке 2 видно, при каких параметрах возникают “ Q -шары” и истинные вакуумы – локальные минимумы энергии. Мы будем далее рассматривать ситуацию, при которой минимум в правой точке r_2 находится выше

¹Здесь выбраны такие параметры: $\{l, \alpha, \beta, r_0\} = \{30, 10, 6, 1.64\}$.

минимума в r_1 , что делает его Q -шаров. Состояния Q -шара и истинного вакуума классически устойчивы, однако в квантовой механике возможен переход из одного в другое. Вычисление вероятности в главном квазиклассическом приближении приводится в [1]. Изложим вкратце этот вывод и получим результат.

В полярных координатах уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right] + V(r)\psi = E\psi.$$

Сделаем подстановку $\psi(r, \theta) = \frac{\chi(r)}{r} e^{il\theta}$. Уравнение примет вид

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} + \left[2(E - V) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi = 0.$$

Это уравнение по форме совпадает с уравнением Шредингера для одномерного движения в поле с потенциальной энергией

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{l(l+1)}{2r^2} \approx V(r) + \frac{l^2}{2r^2}, \quad (26)$$

где используется квазиклассический предел $l \gg 1$.

Если функция $\psi(r)$ локализована вблизи правого минимума потенциала U_{eff} , то вероятность перехода частицы в левый минимум характеризует экспоненциальное подавление, выражющееся через потенциал U_{eff} по следующей формуле

$$\mathcal{P} = \exp \left\{ -2 \int_{r_3}^{r_2} d\rho \sqrt{2[V_{eff}(\rho) - V_{eff}(r_2)]} \right\}, \quad (27)$$

где r_3 определяется из соотношения $V_{eff}(r_3) = V_{eff}(r_2)$.

3.2. Применение квазиклассического метода

В главе 1 было получено выражение (4) для вероятности перехода частицы из истинного вакуума в ложный. В данном разделе мы применим это выражение для вычисления вероятности перехода в задаче, описанной в разделе 3.1.

Вместо собственных состояний оператора поля здесь используем собственные состояния оператора координаты. Матричный элемент перехода из состояния с определенными координатами (x_b, y_b) в состояние с определенными координатами (x_a, y_a) через время t дается выражением

$$\langle x_b, y_b | e^{-iHt} | x_a, y_a \rangle = \int [\mathcal{D}x(t)\mathcal{D}y(t)] e^{iS_{ab}}, \quad (28)$$

где S_{ab} обозначает классическое действие на траектории $[x(t), y(t)]$. Интегрирование ведется по траекториям, для которых начальное положение частицы – это (x_b, y_b) , а конечное – это (x_a, y_a) .

Помимо x и y мы будем часто оперировать комплексными переменными $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$. Введение двух независимых комплексных переменных сопряжено с тем фактом, что условия на седловые точки интегралов могут приводить к комплексным значениям x и y , что приведет к полной независимости z и \bar{z} и нарушению равенства $z^* = \bar{z}$. Заметим, что это равенство как раз является критерием действительности точки. Далее также будем пользоваться величиной $\rho^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$.

Такая замена производится с целью установления аналогии между данной задачей квантовой механики и уже рассмотренной задачей из теории поля.

Будем задавать набор произвольных начальных состояний ψ_i как набор состояний, собственных для оператора координаты. Для них условие близости к ложному вакууму которое было упомянуто в описании метода, будет иметь вид $\rho^2 > r_0^2$.

Введем оператор проекции на состояние с моментом l

$$\hat{P}_l = \int d\alpha \cdot e^{i\alpha(\hat{L}-l)}, \quad \text{где } \hat{L} = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

является оператором углового момента. Так как мы работаем в главном квазиклассическом приближении, то здесь и далее будем игнорировать предэкспоненциальные множители.

Подействуем им на начальное состояние $\psi_i(z, \bar{z}) = \delta(z - z_0, \bar{z} - \bar{z}_0)$. Собственное состояние оператора координаты здесь понимается в смысле $\langle z_a, \bar{z}_a | z_b, \bar{z}_b \rangle = \delta_{z_a - z_b, \bar{z}_a - \bar{z}_b}$ ¹, для произвольных a, b . Оператор углового момента является генератором угловых вращений, так что оператор $e^{i\alpha\hat{L}}$ действует как $e^{i\alpha\hat{L}}\psi_i(z, \bar{z}) = \psi_i(z e^{i\alpha}, \bar{z} e^{-i\alpha})$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{P}_l |\psi_i\rangle &= \int d\alpha \cdot e^{i\alpha(\hat{L}-l)} \delta(\bar{z} - \bar{z}_0, z - z_0) = \int d\alpha \cdot e^{-i\alpha l} \delta(z e^{i\alpha} - z_0, \bar{z} e^{-i\alpha} - \bar{z}_0) = \\ &= \int d\alpha \cdot e^{-i\alpha l} \delta(z - z_0 e^{-i\alpha}, \bar{z} - \bar{z}_0 e^{i\alpha}). \end{aligned} \quad (29)$$

Введем амплитуду перехода

$$A = \langle \psi_f | e^{-iHt} e^{-HT} \hat{P}_l |\psi_i\rangle. \quad (30)$$

Конечное состояние также возьмем в виде собственной функции оператора координаты $\psi_f = \delta(z - z_c, \bar{z} - \bar{z}_c)$. Далее, чтобы помнить об этом, мы будем вместо $|\psi_f\rangle$ писать $|c\rangle$. Вставим единичные операторы в определение амплитуды

$$A = \int_{a,b} \langle c | e^{-iHt} |a\rangle \langle a | e^{-HT} |b\rangle \langle b | \hat{P}_l |\psi_i\rangle. \quad (31)$$

Здесь и далее для сокращения обозначений мы не пишем меру интегрирования $dz_a d\bar{z}_a dz_b d\bar{z}_b$.

Дальнейший анализ матричных элементов и вычисление седловых ин-

¹Здесь $\delta_{a,b}$ это символ Кронекера.

тегралов полностью повторяет рассуждения раздела 2.2.

В результате аналогичных выкладок, получим для амплитуды интеграл:

$$A = \int_{a,b,\alpha,z(t),\bar{z}(t)} e^{iS_{ca}} e^{iS_{ab}} e^{-i\alpha l} \cdot \delta(z - z_b, \bar{z} - \bar{z}_b) \cdot \delta(z - z_0 e^{-i\alpha}, \bar{z} - \bar{z}_0 e^{i\alpha}). \quad (32)$$

Напоминаем, что мы опускаем меру интегрирования, чтобы не нагромождать запись и пишем переменные, по которым ведется интегрирование под интегралом.

Интегральное выражение для вероятности совпадает по виду с (20):

$$\mathcal{P} = e^{2E_0 T} \cdot \int_{z_c, \bar{z}_c, \varphi_0, \bar{z}_0} A^* A = e^{2E_0 T} \cdot \int_{z_c, \bar{z}_c, \varphi_0, \bar{z}_0} e^{-i\alpha l + i\alpha^* l} \cdot e^{iS_{cb} - iS_{cb}^*}. \quad (33)$$

3.3. Вероятность и условия на седловую траекторию

В главном квазиклассическом приближении результат седлового интегрирования равен значению подынтегрального выражения в седловой точке. После седлового интегрирования амплитуды по $[a, b, \alpha, z(t), \bar{z}(t)]$, получим:

$$A = e^{iS_{cb} - i\alpha l}, \quad (34)$$

при выполнении всех седловых условий.

Интеграл по b дает условие:

$$\begin{cases} z_b = z_0 e^{-i\alpha}, \\ \bar{z}_b = \bar{z}_0 e^{i\alpha}. \end{cases} \quad (35)$$

По α :

$$p_b z_b - \bar{p}_b \bar{z}_b = -il. \quad (36)$$

Седловое интегрирование по $z(t), \bar{z}(t)$ приводит к условию $\delta S = 0$, то есть

траектория в действии S_{cb} удовлетворяет уравнениям движения:

$$\begin{cases} \ddot{z} = (\partial V / \partial \rho^2) z, \\ \ddot{\bar{z}} = (\partial V / \partial \rho^2) \bar{z}. \end{cases} \quad (37)$$

Из интеграла по a имеем условие непрерывности импульсов p, \bar{p} в точке a , то есть, и на всей траектории.

Далее вычисляем вероятность по формуле (33). Для седлового интеграла по c имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial(S_{cb} - S_{cb}^*)}{\partial z_c} = \bar{p}_c - p_c^* = 0, \\ \frac{\partial(S_{cb} - S_{cb}^*)}{\partial \bar{z}_c} = \bar{p}_c^* - p_c = 0. \end{cases} \quad (38)$$

В терминах x и y соотношения примут вид

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \dot{x}_c^*, \\ \dot{y}_c = \dot{y}_c^*. \end{cases} \quad (39)$$

Для точки (z_c, \bar{z}_c) выполнено $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ по построению, производная функций $x(t)$ и $y(t)$ действительны, согласно (39). Значит, как как уравнения движения являются уравнениями второго порядка, и коэффициенты в уравнениях движения действительны, на этапе эволюции в действительном времени из точки a в точку c траектория строго действительна, и в каждой ее точке выполняется $\bar{z} = z^*$.

Теперь рассмотрим условия на седловую точку интеграла по $[dz_0 d\bar{z}_0]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial(S_{cb} - S_{cb}^*)}{\partial z_0} = \frac{\partial S_{cb}}{\partial z_b} \frac{\partial z_b}{\partial z_0} - \frac{\partial S_{cb}^*}{\partial \bar{z}_b} \frac{\partial \bar{z}_b^*}{\partial z_0} = -p_b \cdot e^{-i\alpha} + \bar{p}_b^* \cdot e^{-i\alpha^*} = 0, \\ \frac{\partial(S_{cb} - S_{cb}^*)}{\partial \bar{z}_0} = \frac{\partial S_{cb}}{\partial \bar{z}_b} \frac{\partial \bar{z}_b}{\partial \bar{z}_0} - \frac{\partial S_{cb}^*}{\partial z_b} \frac{\partial z_b^*}{\partial \bar{z}_0} = -\bar{p}_b \cdot e^{i\alpha} + p_b^* \cdot e^{i\alpha^*} = 0, \end{cases} \quad (40)$$

где были использованы начальные условия (35).

Для дальнейшего введем действительную величину $\eta \equiv -i(\alpha^* - \alpha) = -2 \operatorname{Im}(\alpha)$ и выпишем с учетом соотношений (35) и (40) полученные уравнения для точки b в форме, не включающей в себя точку z_0 :

$$\begin{cases} z_b = \bar{z}_b^* e^{-\eta}, \\ \bar{z}_b = z_b^* e^\eta, \\ p_b = \bar{p}_b^* e^\eta, \\ \bar{p}_b = p_b^* e^{-\eta}. \end{cases} \quad (41)$$

Итак, мы получили общее выражение для вероятности:

$$\mathcal{P} = e^{-\mathcal{F}}, \quad -\mathcal{F} = 2E_0 T + 2l \operatorname{Im}(\alpha) - 2 \operatorname{Im} S_{cb}, \quad (42)$$

где действие вычислено на траектории, удовлетворяющей уравнениям движения и граничным условиям на которых определена амплитуда (34) и дополнительно (41), (40).

Как мы видим, результат полностью аналогичен, лишь седловое условие (36) на параметр α выглядит проще, чем (18).

3.4. Сравнение результата с известным ответом

Введем ρ и γ с помощью соотношений:

$$z = \rho e^{i\gamma}, \quad \bar{z} = \rho e^{-i\gamma}. \quad (43)$$

Здесь ρ и γ предполагаются комплексными. Запишем действие в координатах ρ и γ .

$$S = \int dt \left[\frac{\dot{\rho}^2}{2} + \frac{\rho^2 \dot{\gamma}^2}{2} - V(\rho) \right].$$

Уравнение движения для ρ и сохраняющийся угловой момент, который является интегралом уравнения движения на γ , записываются как

$$\ddot{\rho} = \rho^2 \dot{\gamma} - \frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{l}{\rho^2} - \frac{\partial V}{\partial \rho},$$

$$pz - \bar{p}\bar{z} = \frac{\dot{\bar{z}}}{2}z - \frac{\dot{z}}{2}\bar{z} = \rho(\dot{\rho} - i\rho\dot{\gamma}) - \rho(\dot{\rho} + i\rho\dot{\gamma}) = -il \implies \rho^2\dot{\gamma} = l. \quad (44)$$

Перейдем к евклидовому времени при помощи замены $\tau \equiv it$. На этапе евклидовой эволюции $\tau \in (-T, 0)$. На этом отрезке уравнения движения на ρ в евклидовом времени τ записываются как

$$\rho_{\tau\tau} = -\frac{l}{\rho^2} + \frac{\partial V}{\partial \rho}. \quad (45)$$

Подстановка (43) в (41) дает

$$(\rho_b^2) = z_b\bar{z}_b = z_b^*\bar{z}_b^* = (\rho_b^2)^*,$$

$$(\dot{\rho}_b^2) = \dot{z}_b\bar{z}_b + z_b\dot{\bar{z}}_b = 2(p_b z_b + \bar{p}_b \bar{z}_b) = 2(\bar{p}_b^* \bar{z}_b^* + p_b^* z_b^*) = (\dot{\rho}_b^2)^*. \quad (46)$$

Таким образом, величина ρ^2 и её производная по времени действительна в начальной точке b . На временном отрезке от 0 до t они также действительны, потому что на нем выполняется соотношение $\bar{z} = z^*$. Уравнения движения (45) имеют действительные коэффициенты, а на концах траектории ρ действительно. Поэтому $\rho \in \mathbb{R}$ на всей траектории, интерполирующей между b и a . Отсюда следует, что производная $\dot{\rho}$ является чисто мнимой. Однако уравнение (52) и условие действительности последующей траектории $(0 \rightarrow t)$ утверждают обратное. Это приводит к новым граничным условиям:

$$\dot{\rho}(iT) = \dot{\rho}(0) = 0. \quad (47)$$

Замена (43) в условиях (41) приводит к

$$\gamma_b - \gamma_b^* = i\eta = -2i \operatorname{Im} \alpha. \quad (48)$$

Это значит, что мнимая часть γ_b определяет седловое значение α . В точке $t = 0$ мнимая часть γ должна обращаться в ноль, чтобы соблюсти условие $\bar{z} = z^*$ на действительном отрезке траектории. Сохранение углового момента из (44) означает, что при эволюции по мнимой оси производная по евклидовому времени γ_τ чисто мнимая. Итак, на отрезке евклидовой эволюции из iT в 0 только мнимая часть γ меняется, а действительная является постоянной величиной и не фиксируется условиями, что отражает симметрию задачи. Воспользуемся этим произволом и положим $\operatorname{Re} \gamma = 0$.

Выпишем итоговые граничные условия на переменные ρ и γ для евклидового отрезка эволюции.

$$\begin{cases} \rho(t) \in \mathbb{R}, \\ \dot{\rho}(iT) = \dot{\rho}(0) = 0, \\ \rho^2 \dot{\gamma}(iT) = l, \\ \gamma(iT) = i\eta/2, \\ \gamma(0) = 0, \\ \gamma(t) \in i\mathbb{R}. \end{cases} \quad (49)$$

Обратимся к формуле (42) для вероятности. Для расчета нам нужно получить величину $-2 \operatorname{Im} S_{cb}$. Заметим здесь, что на отрезке эволюции в действительном времени, действие S_{ca} чисто действительно и не вносит вклада в величину вероятности. В свою очередь, действие на этапе евклидовой траектории чисто мнимое, потому что лагранжиан действителен, а время течет по мнимой оси. Тогда $-\operatorname{Im} S_{cb} = iS_{ab}$. Поэтому далее будем интересоваться только мнимым этапом.

Пользуясь (49) и (48), выразим в экспоненте переменную α через интеграл по времени:

$$2l \operatorname{Im} \alpha = -\eta l = 2il [\gamma(iT) - \gamma(0)] = -2il \int_{iT}^0 \dot{\gamma} dt = -2i \int_{iT}^0 \frac{l^2}{\rho^2} dt.$$

Экспонента подавления \mathcal{F} в (42) примет вид ($t = -i\tau$):

$$\begin{aligned} -\mathcal{F} &= 2E_0T + 2\operatorname{Im} \alpha - \operatorname{Im} 2S_{ab} = 2E_0T + 2i \int_{iT}^0 \frac{l^2}{\rho^2} dt + 2i \int_{iT}^0 dt \left[\frac{\dot{\rho}^2}{2} + \frac{\rho^2 \dot{\gamma}^2}{2} - V(\rho) \right] = \\ &= -2 \int_{-T}^0 d\tau \left[\frac{\rho_\tau^2}{2} + \frac{l^2}{2\rho^2} + V(\rho) \right] + 2E_0T \equiv -2S_{eff} + 2E_0T, \end{aligned}$$

где были использованы уравнения движения (44). В последнем равенстве мы ввели эффективное действие для переменной ρ .

Чтобы привести результат к виду (27), заметим, что в системе имеется еще один интеграл движения, который мы еще не затрагивали — энергия.

$$-E = \frac{\dot{\rho}^2}{2} + \frac{\rho^2 \dot{\gamma}^2}{2} + V(\rho) = -\frac{\rho_\tau^2}{2} + \frac{l^2}{2\rho^2} + V(\rho).$$

Интересно заметить, что энергия E является интегралом движения для S_{eff} , причем если ввести перевернутый эффективный потенциал

$$V_{eff} \equiv -l^2/2\rho^2 - V(\rho),$$

то поиск величины S_{eff} сводится к элементарной механической задаче. Тогда

$$\begin{aligned} d\rho &= -d\tau \sqrt{2(E - V_{eff})}, \\ S_{eff} &= - \int_{r_2}^{r_1} \frac{d\rho}{\sqrt{2(E - V_{eff})}} (E - 2V_{eff}) = \int_{r_1}^{r_2} d\rho \sqrt{2(E - V_{eff})} - \int_{-T}^0 d\tau \cdot E. \end{aligned}$$

Начало и конец траектории являются точками остановки, то есть в них выполняется $E = V_{eff}(\rho)$. Теперь вычислим предел $T \rightarrow \infty$. Тогда $\rho(\tau = -T)$ стремится к экстремуму V_{eff} , чтобы обеспечить скатывание с начального состояния за неограниченное время T . Начальная точка должна находиться вблизи Q -шара, то есть $\rho_b \rightarrow r_2$ в пределе $T \rightarrow \infty$, где r_2 — локальный

минимум потенциала U_{eff} по обозначениям раздела (3.1).

Имеем:

$$2ET = 2V_{eff}(r_2) \cdot T = -2E_0T.$$

Подставляя все в (42), получаем ответ:

$$\mathcal{P} \sim e^{2E_0T} e^{-2S_{eff}} = \exp \left\{ -2 \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{2[V_{eff}(r_2) - V_{eff}(r)]} \right\}. \quad (50)$$

Итак, вычисление вероятности по формуле (33) при помощи сведения матричных элементов к континуальному интегралу, с точностью до предэкспоненциальных множителей воспроизводит известный результат (27) из квантовой механики – вероятность проникновения частицы через потенциальный барьер в квазиклассическом приближении.

4. Расчет в теории поля

Вернемся к задаче главы 2. Здесь мы ставим себе целью поставить численную задачу для описания процесса распада.

Введем параметризацию

$$\varphi = \rho e^{i\beta}, \bar{\varphi} = \rho e^{-i\beta}. \quad (51)$$

Величины ρ и β предполагаются комплексными.

Вклад в величину вероятности вносит только мнимая часть действия, значит нас будет интересовать только эволюция на отрезке $[iT, 0]$, поскольку эволюция в минковском времени дает действительный вклад в действие. На отрезке мнимой эволюции введем евклидовое время $\tau \equiv it \in [-T, 0]$.

Условия (23) в терминах ρ и β переписываются в виде:

$$\begin{aligned} (\rho_b^2) &= \varphi_b \bar{\varphi}_b = \varphi_b^* \bar{\varphi}_b^* = (\rho_b^2)^*, \\ (\dot{\rho}_b^2) &= \dot{\varphi}_b \bar{\varphi}_b + \varphi_b \dot{\bar{\varphi}}_b = (\pi_b \varphi_b + \bar{\pi}_b \bar{\varphi}_b) = (\bar{\pi}_b^* \bar{\varphi}_b^* + \pi_b^* \varphi_b^*) = (\dot{\rho}_b^2)^*, \\ \beta_b - \beta_b^* &= i\eta = -2i \operatorname{Im} \alpha. \end{aligned} \quad (52)$$

На отрезке действительной траектории, действие на которой не влияет на величину экспоненты подавления, ρ и β чисто действительны. Пользуясь произволом выбора фазы, положим $\beta(0) = 0$. Принимая во внимание последние условия, мы делаем естественное предположение, что ρ действительно, а β чисто мнимо на отрезке евклидовой траектории $\tau \in (-T, 0)$. Сделаем замену

$$\gamma = i\beta.$$

Уравнения движения (14) примут вид:

$$\begin{cases} \partial_\lambda \partial_\lambda \rho + (\partial_\lambda \gamma)^2 \rho - \frac{\partial V}{\partial \rho^2} \rho = 0, \\ \partial_\lambda (\partial_\lambda \gamma \cdot \rho^2) = 0, \end{cases} \quad (53)$$

где по λ ведется суммирование с евклидовой метрикой (по переменным τ, x).

Условие (18) примет вид

$$\int (\partial_\tau \gamma) \rho^2 dx = \frac{Q}{2}. \quad (54)$$

Итак, чтобы получить значение экспоненты подавления, необходимо решить уравнения движения (53) на двумерном пространстве (τ, x) , учитывая граничные условия

$$\begin{cases} \dot{\rho}(0, x) = \dot{\rho}(-T, 0) = 0, \\ \gamma(0, x) = 0, \\ \gamma(-T, x) = -\eta/2. \end{cases} \quad (55)$$

Здесь $T \rightarrow \infty$. Для численного поиска решения можно воспользоваться известным решением для Q -шара. Будем обозначать его как $g(x)$. Тогда $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho(\tau, x) \rightarrow g(x)$.

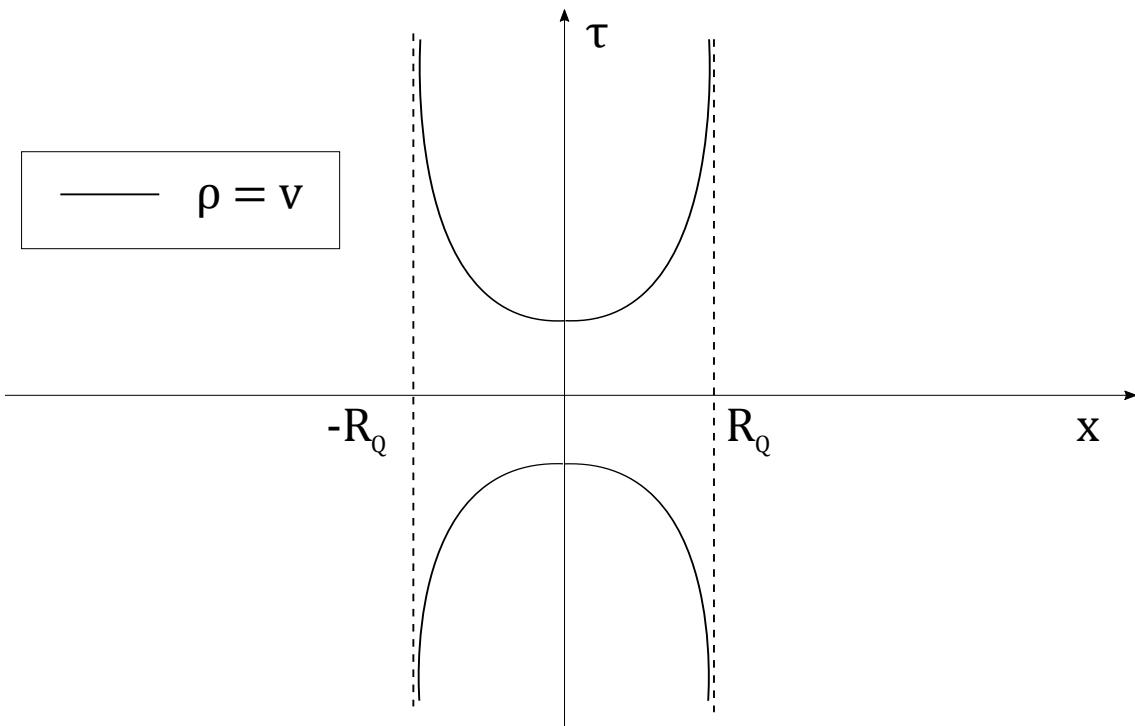


Рисунок 3 - Линия раздела $\rho(\tau, x) = v$.

Удобно продолжить решение на область $\tau > 0$. Тогда $\rho(-\tau, 0) = \rho(\tau, x)$, $\gamma(-\tau, x) = -\gamma(\tau, x)$. Предполагаемый вид решения для $\rho(\tau, x)$ изображен на рисунке 3. Кривая $\rho = v$ представляет собой линию раздела для двух областей. Первое уравнение системы (53) в области внутри кривой будет

иметь вид:

$$\partial_\lambda \partial_\lambda \rho + (\partial_\lambda \gamma)^2 \rho = 0,$$

а вне:

$$\partial_\lambda \partial_\lambda \rho + (\partial_\lambda \gamma)^2 \rho - M^2 \rho = 0.$$

Заключение

В работе получены следующие результаты.

- Разработан квазиклассический метод описания распада Q -шара.
- Метод применен к задаче квантовой механики. Получено соответствие со стандартным ответом.
- В теории комплексного скалярного поля задача сведена к численному решению классический уравнений движения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] D.S.Gorbunov and V.A.Rubakov,
"Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot Big Bang Theory"
(World Scientific, Hackensack, 2011).
- [2] I.E.Gulamov, E.Ya.Nugaev, M.N.Smolyakov,
"Analytic Q-ball solutions and their stability in a piecewise parabolic potential"; arXiv:1303.1173v2 [hep-th] 5 May 2013.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики: Учеб. пособие для вузов. В 10 т. Т.3 Квантовая механика (нерелятивистская теория)
Под ред. Л.П. Питаевского.
- [4] S. R. Coleman, "The Uses of Instantons," Subnucl. Ser. 15 (1979) 805.