Туннельный распад метастабильных состояний в моделях с $U(1)$-инвариантностью.

Попеску Андрей Доринович

Московский государственный университет им. Ломоносова
Физический факультет

Кафедра космологии и физики частиц

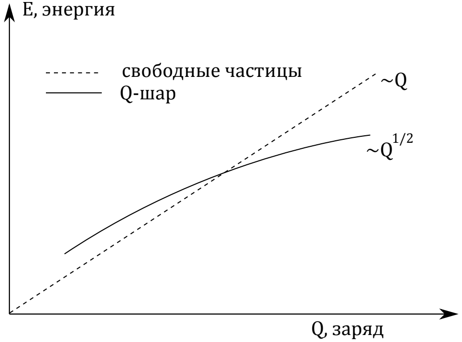
Москва, 2016

Научные руководители: к.ф-м.н Левков Д.Г.
к.ф-м.н Нугаев Э.Я.

Теория скалярного поля с плоскими направлениями:

$$g^2\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - V(\varphi\varphi^*), \quad V(\varphi\varphi^*) = \begin{cases} M^2\varphi^2, & 0 \leqslant |\varphi| < v; \\ M^2v^2, & |\varphi| \geqslant v. \end{cases}$$

Энергия Q-шара и свободных частиц:



Q-шар классически устойчив при малых зарядах, но энергетически выгоден распад. Как в главном квазиклассическом приближении описать распад Q-шара?

Проблема: необходим метод для расчета распада ложного вакуума с учетом сохранения заряда.

Определим состояние Q-шара:

- рассматриваем произвольное состояние системы $|\psi_i\rangle$;
- проектором $\hat{P}_Q$ вырезаем состояние зарядом Q;
- оператором e^{-HT} выделяем минимум энергии при $T \to \infty$.

$$|E_0, Q\rangle = \mathcal{N} \cdot \sum_i e^{-HT} \hat{P}_Q |\psi_i\rangle \tag{1}$$

$\mathcal{N} = e^{E_0 T}$ – *нормировка,* E_0 – *значение минимума энергии.*

Примечание: начальное состояние должно находиться вблизи ложного вакуума.

Рассмотрим произвольное конечное состояние, локализованное вблизи истинного вакуума $|\psi_f\rangle$. Амплитуда перехода в конечное состояние:

$$\mathcal{A} = \langle\psi_f|\, e^{-iHt}\, |E_0, Q\rangle \,.$$

Квадрат амплитуды и сумма (интеграл) по начальным и конечным состояниям дает вероятность перехода.

$$\mathcal{P} = e^{2E_0T} \cdot \sum_{\psi_f,\psi_i} \left| \langle\psi_f|\, e^{-iHt} e^{-HT}\, \hat{P}_Q\, |\psi_i\rangle \right|^2 . \qquad (2)$$

Вероятность вычисляем в главном квазиклассическом приближении при помощи континуального интеграла:

$$\langle\varphi_c, \bar{\varphi}_c|\, e^{-iHt}\, |\varphi_a, \bar{\varphi}_a\rangle = \int [\mathcal{D}\varphi(x)] e^{iS_{ca}} .$$

$$\langle\varphi_a, \bar{\varphi}_a|\, e^{-HT}\, |\varphi_b, \bar{\varphi}_b\rangle = \int [\mathcal{D}\varphi(x)] e^{iS_{ab}} .$$

Проектор на состояние с зарядом Q:

$$\hat{P}_Q \left|\varphi, \bar{\varphi}\right\rangle = \int d\alpha\, e^{-i\alpha Q} \left|\varphi e^{i\alpha}, \bar{\varphi} e^{-i\alpha}\right\rangle . \tag{3}$$

Выражение для амплитуды через континульный интеграл:

$$A = \int\limits_{a,b,\alpha,\varphi(t),\bar{\varphi}(t)} e^{iS_{ca}} e^{iS_{ab}} e^{-i\alpha Q} \cdot \delta(\varphi_b - \varphi_0 e^{-i\alpha}, \bar{\varphi}_b - \bar{\varphi}_0 e^{i\alpha}). \tag{4}$$

Формула для полной вероятности перехода:

$$\mathcal{P} = e^{2E_0 T} \cdot \int\limits_{\varphi_c,\bar{\varphi}_c,\varphi_0,\bar{\varphi}_0} A^* A \quad = \quad e^{2E_0 T} \cdot \int\limits_{\varphi_c,\bar{\varphi}_c,\varphi_0,\bar{\varphi}_0} e^{-i\alpha Q + i\alpha^* Q} \cdot e^{iS_{cb} - iS^*_{cb}}. \tag{5}$$

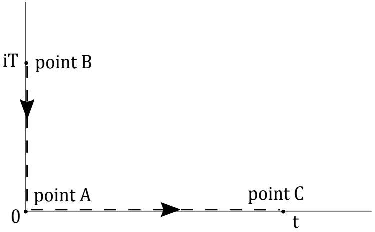
Интегралы берутся седловым образом. Получатся седловые уравнения на φ и $\bar\varphi$. Вместе с уравнениями движения, получим систему уравнений на поиск траектории. $(\pi \equiv \partial^0\varphi, \quad \bar\pi \equiv \partial^0\bar\varphi)$

$$(\eta \equiv -2\,\mathrm{Im}\,\alpha)$$

$$\begin{cases} \partial_\mu\partial^\mu\varphi = \frac{\partial V}{\partial\rho^2}\cdot\varphi, \\ \partial_\mu\partial^\mu\bar\varphi = \frac{\partial V}{\partial\rho^2}\cdot\bar\varphi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar\varphi_b = \varphi_b^* e^{\eta}, \\ \bar\pi_b = \pi_b^* e^{-\eta}. \end{cases}$$

$$\int dx\,[\pi\varphi - \bar\pi\bar\varphi] = -iQ.$$



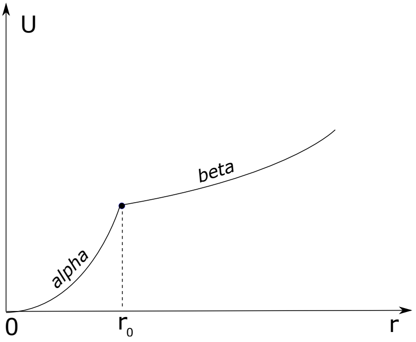
Контур временной эволюции для φ.

$$\mathcal{P} = e^{\mathcal{F}}, \quad \mathcal{F} = 2E_0T - Q\eta - 2S^E. \tag{6}$$

O(2)-симметричная задача квантовой механики.

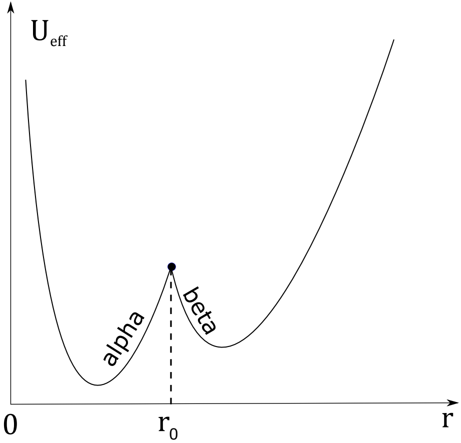
Подбором потенциала можно обеспечить реализацию двух локальных минимумов энергии для заданного орбитального момента l.

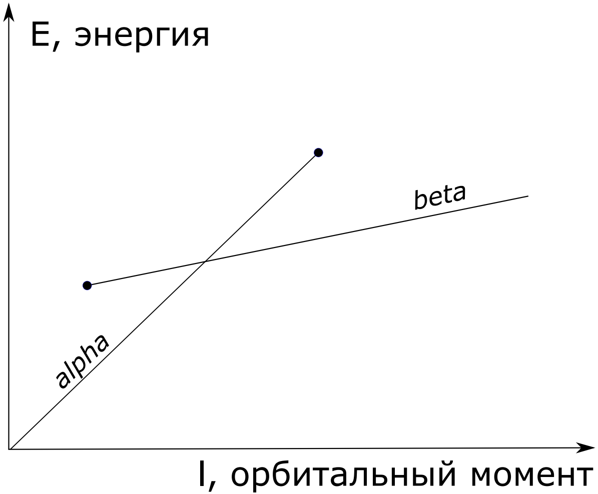
Например, склеить две параболы с коэффициентами α и β.



Тест метода

Задача сводится к одномерной, если учесть орбитальный момент в эффективном потенциале $U_{eff} = U + \frac{l^2}{2r^2}$.



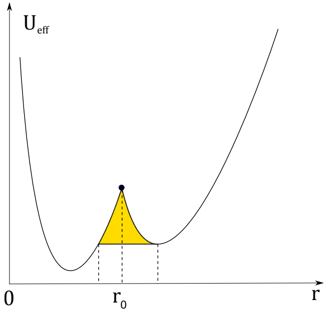

E, энергия
beta
alpha
l, орбитальный момент

Известное решение

Решение известно и дается формулой:

$$\mathcal{P} = \exp\left\{ -2\int_{r_3}^{r_2} d\rho \sqrt{2[U_{eff}(\rho) - U_{eff}(r_2)]} \right\}.$$

Требуется получить тот же ответ, используя новый метод.



Применим наш метод. "Зарядом" здесь является орбитальный момент. Проектор имеет вид:

$$\hat{P}_l = \int d\alpha \; e^{i\alpha\hat{L} - i\alpha l}, \qquad \hat{L} = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

После введения переменных

$$\begin{cases} z = x + iy, \\ \bar{z} = x - iy. \end{cases} \tag{7}$$

ход решения становится аналогичным задаче из теории поля.

Начальные состояния выбираем в виде $|\psi_i\rangle = \delta(z - z_0, \bar{z} - \bar{z}_0)$.

$$\hat{P}_l \, |\psi_i\rangle = \int d\alpha \cdot e^{-i\alpha l} \delta(z - z_0 e^{-i\alpha}, \bar{z} - \bar{z}_0 e^{i\alpha}).$$

Результат

В результате получим выражение, зависящее от евклидового действия S^E траектории

$$\mathcal{P} = e^{\mathcal{F}}, \quad \mathcal{F} = 2E_0 T + 2l\,\mathrm{Im}(\alpha) - 2S^E,$$

Траектория интерполирует между временем $-T$ и 0 (по τ). Параметризация: $z = \rho e^{i\beta}, \bar{z} = \rho e^{-i\beta}$. Седловые условия на параметры траектории:

$$\begin{cases} \rho(\tau) \in \mathbb{R}, \\ \dot{\rho}(-T) = \dot{\rho}(0) = 0, \\ \beta(-T) = (\alpha^* - \alpha)/2, \\ \beta(0) = 0, \\ \beta(\tau) \in i\mathbb{R}, \\ \dot{\beta}\rho^2 = l. \end{cases}$$

Можно получить явное решение для β:

$$\beta = \int_{-T}^{0} d\tau (-i) \frac{l}{\rho^2}$$

Результат

Учитывая все условия и уравнения движения, получим

$$\mathcal{F} = 2E_0T + 2l\,\mathrm{Im}(\alpha) - 2S^E = -2S_{eff}, \tag{8}$$

$$S_{eff} \equiv \int\limits_{-T}^{0} dt \left[\frac{\dot{\rho}^2}{2} + \frac{l^2}{2\rho^2} + U(\rho)\right] = 2\int\limits_{r_3}^{r_2} d\rho \sqrt{2[U_{eff}(\rho) - U_{eff}(r_2)]}.$$

$$\mathcal{P} = e^{-2S_{eff}}$$

Вернемся к теории поля.

$$\mathcal{P} = e^{\mathcal{F}}, \quad \mathcal{F} = 2E_0T + 2Q\,\mathrm{Im}(\alpha) - 2S^E.$$

Введем параметризацию $\varphi = \rho e^{\gamma}, \bar{\varphi} = \rho e^{-\gamma}$.
Уравнения движения переписываются в виде:

$$\begin{cases} \partial_\mu \partial^\mu \varphi = \frac{\partial V}{\partial \rho^2}\varphi, \\ \partial_\mu \partial^\mu \bar{\varphi} = \frac{\partial V}{\partial \rho^2}\bar{\varphi}. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \partial_\lambda \partial_\lambda \rho + (\partial_\lambda \gamma)^2 \rho - \frac{\partial V}{\partial \rho^2}\rho = 0, \\ \partial_\lambda (\partial_\lambda \gamma \cdot \rho^2) = 0. \end{cases}$$

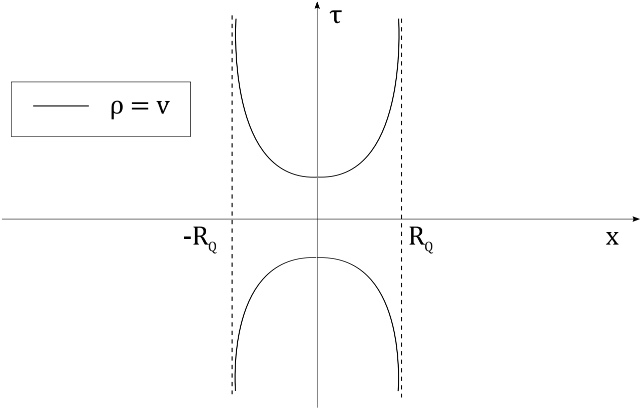
Одномерный Q-шар

Седловые условия на траекторию $(T \to \infty)$:

$$\begin{cases} \partial_\lambda \partial_\lambda \rho + (\partial_\lambda \gamma)^2 \rho - \frac{\partial V}{\partial \rho^2} \rho = 0, \\ \partial_\lambda (\partial_\lambda \gamma \cdot \rho^2) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho(-T, x) = \rho_{qball}(x), \\ \partial_\tau \rho(-T, x) = \partial_\tau \rho(0, x) = 0, \\ \gamma(0, x) = 0, \\ \gamma(-T, x) = -\eta/2 = \operatorname{Im} \alpha, \\ \int (\partial_\tau \gamma) \rho^2 dx = Q/2, \quad (\forall \tau) \\ \rho(\tau) \in \mathbb{R}, \\ \gamma(\tau) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Предполагаемый вид линии раздела.



Выводы

Получены следующие результаты:

1. Разработан квазиклассический метод вычисления распада Q-шара.
2. Метод применен к задаче квантовой механики. Получено соответствие со стандартным ответом.
3. В теории комплексного скалярного поля задача сведена к численному решению классических уравнений движения.