

Условия сдачи экзамена по курсу “Классические калибровочные поля”
(осень 2016)

К экзамену допускаются студенты, сдавшие задачи коллоквиумов.

Задачи к экзамену по курсу “Классические калибровочные поля”
(осень 2016)

1. Инстантон в модели $\mathbf{n}$ -поля.

Солитон в модели $\mathbf{n}$ -поля можно рассматривать и как инстантон в двумерном евклидовом пространстве-времени.

1) Дать интерпретацию солитонного решения в терминах туннельного процесса, происходящего в теории $\mathbf{n}$ -поля в двумерном пространстве-времени Минковского, действие которой имеет вид

$$S = \int d^2x \frac{1}{2g^2} (\partial_\mu \varphi_a \partial_\mu \varphi_a),$$
$$\mu = 0, 1; \quad a = 1, 2, 3; \quad \sum_{a=1}^3 \varphi_a \varphi_a = 1.$$

2) Видоизменим эту двумерную модель, добавив к действию слагаемое

$$\Delta S = - \int d^2x \lambda (\varphi_3 - 1)^2,$$

где λ — действительный параметр. Найти классический вакуум и сфалерон в модели с действием $(S + \Delta S)$ (Моттола, Випф, 1989).

2. Критический заряд в модели с короткодействием.

Вообразим атом, связанный короткодействующим центрально-симметричным векторным полем

$$A_0 = -Z\delta(r - R), \quad A_i(r) = 0,$$

где R - радиус, а Z - заряд ядра. Заряд электрона по отношению к полю A_μ положен равным $e = +1$.

1. При каких значениях Z, R существуют связанные состояния электронов в поле ядра? Изобразить соответствующую область на плоскости $Z - R$. Найти энергию и волновую функцию основного состояния. Рассмотреть случаи $mR \gg 1, mR \ll 1$, где m - масса электрона.
2. Найти критическое значение заряда $Z_c(R)$, при котором основной электронный уровень растворяется в дираковском море.
3. Представим эксперимент, в котором заряд ядра изменяется от $Z = 0$ до $Z > Z_c$ за характерное время $\tau \gg m^{-1}$. Сколько частиц(античастиц) рождается в таком эксперименте? Рассмотреть случаи $\tau \gg R, \tau \ll R$.

3. Рассеяние фермионов на космической струне.

Рассмотрим $(2 + 1)$ - мерные массивные фермионы с дробным электрическим зарядом $q > 0$. Фермионы помещены в потенциал Ааронова-Бома

$$A_0 = 0, \quad A_i = -\theta(r - R) \epsilon_{ij} \frac{n_j}{r}, \quad (1)$$

где R — размер центральной части потенциала. Можно грубо полагать, что поле (1) создано вихрем Абрикосова размера R . Ниже будем рассматривать два представления матриц Дирака

$$\alpha^1 = \sigma^1, \quad \alpha^2 = s\sigma^2, \quad \beta = \sigma^3, \quad (2)$$

отличающиеся значением параметра $s = \pm 1$.

- Показать, что представления (2) не эквивалентны, т.е. не могут быть переведены друг в друга преобразованием

$$\alpha^i \rightarrow U\alpha^i U^\dagger, \quad \beta \rightarrow U\beta U^\dagger,$$

где U — унитарная матрица. Параметр s будем отождествлять с удвоенным спином фермиона.

- Рассмотрим фермионы в поле вихря нулевого размера, $R = 0$. Наложив условие регулярности волновой функции при $r = 0$, найти точные решения уравнения Дирака. Вычислить амплитуду рассеяния на вихре фермиона, который изначально двигался вдоль координаты x^1 . Зависит ли амплитуда от параметра s ?
- Рассмотрим теперь вихрь конечного, но малого размера. Используя условие сшивки при $r = R$, найти собственнo-энергетические волновые функции фермионов, “выживающие” в пределе $R \rightarrow 0$. Совпадают ли они с волновыми функциями, полученными в предыдущем пункте? Найти амплитуду рассеяния на вихре конечного, но малого размера.

Теперь рассмотрим $(3+1)$ -мерное пространство-время. Потенциалу (1) в этом случае соответствует космическая струна — одномерный объект, электрическое поле которого обладает свойством трансляционной инвариантности вдоль координаты x^3 ($A_3 = 0$, а остальные компоненты A_μ даются выражением (1)).

1. Показать, что волновые функции фермионов, обладающих нулевым импульсом вдоль координаты x^3 , описываются $(2+1)$ -мерным уравнением Дирака, причем два уравнения с $s = \pm 1$ описывают две независимые поляризации $\psi_\pm$ четырехмерного фермиона. Показать, что проекция спина на координату x^3 представима в виде $\hat{s}^3 = s\sigma^3/2$. Ниже будем использовать линейно поляризованные фермионы

$$\psi_\gamma = \cos \gamma \psi_+ + \sin \gamma \psi_-.$$

2. Найти дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma(\psi_\gamma \rightarrow \psi_{\gamma'})$ поляризованных фермионов на космической струне.

4. Аксиальная симметрия и доменные стенки.

Рассмотрим в $(3+1)$ измерениях теорию с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1,$$

где

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{e^2}{32\pi^2}\theta F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} + \bar{\psi}i\gamma_\mu D_\mu\psi - M\bar{\psi}e^{i\gamma_5\theta}\psi + \frac{v^2}{2}(\partial_\mu\theta)^2,$$

$$\mathcal{L}_1 = -v^2m^2(1 - \cos\theta),$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $\tilde{F}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}$, A_μ — электромагнитное поле, ψ — фермионное поле, θ — скалярное поле.

1. Найти глобальные симметрии теории, а также глобальные симметрии теории с лагранжианом $\mathcal{L}_0$.
2. Выписать уравнения движения.
3. Найти множество вакуумов и провести их топологическую классификацию. Показать, что в теории имеются классические решения в виде доменных стенок. Найти доменную стенку в явном виде.
4. Изучить моды фермионного поля ψ во внешнем поле доменной стенки. Исследовать вопрос о локализации фермионных состояний на стенке. В тонкостенном пределе найти локализованные моды и написать для них эффективный $(2+1)$ -мерный лагранжиан.

5. Уравнение Клейна-Гордона в поле монополя .

Пусть $A_i^a(\mathbf{x})$, $\phi^a(\mathbf{x})$ — классическое поле монополя в $SU(2)$ -модели, рассмотренное на лекции. Введем в теорию еще одно скалярное поле $\xi(x)$ — дублет относительно калибровочной группы $SU(2)$ — с лагранжианом

$$\mathcal{L}_\xi = (D_\mu \xi)^\dagger (D_\mu \xi) - m^2 \xi^\dagger \xi ,$$

где $D_\mu \xi = (\partial_\mu - ig \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a) \xi$, g — калибровочная константа связи.

1. Считая поле монополя внешним, записать уравнение для поля ξ (схематически это уравнение можно записать в виде $K\xi = 0$; требуется найти оператор K). Используя тот факт, что поле монополя инвариантно относительно пространственных вращений, дополненных калибровочными преобразованиями, найти аналог оператора углового момента (обычно $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$, $\mathbf{p} = -i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$), который коммутирует с оператором K . Найти явный вид низших “монопольных гармоник”, т.е. собственных функций аналога углового момента с наименьшим собственным значением.
2. Рассматривая решения для поля ξ с фиксированной энергией, $\xi = e^{-iEx^0} \xi_E(\mathbf{x})$, записать систему радиальных уравнений для низших монопольных гармоник. Найти решение этой системы при $E \ll m_V, m_H$ (m_V и m_H — массы векторного и хиггсовского полей) вдали от ядра монополя, $r \gg m_V^{-1}, m_H^{-1}$.

6. Вихри в неабелевой теории (6).

Рассмотрим в $(2+1)$ -мерном пространстве-времени теорию с калибровочной группой $SU(2)$ и двумя полями материи $\phi_{1,2}$ в присоединенном представлении с потенциалом

$$V(\phi_1, \phi_2) = \lambda ((\phi_1^a \phi_1^a - v^2)^2 + (\phi_2^a \phi_2^a - v^2)^2 + (\phi_1^a \phi_2^a)^2) ,$$

где $\phi_{1,2}^a$, $a = 1, 2, 3$, — действительные компоненты.

1. Описать множество вакуумов, найти ненарушенную подгруппу.
2. Провести топологическую классификацию решений с конечной энергией.
3. Показать, что в модели имеются топологические солитоны. Подобрать подстановку для векторных и скалярных полей, приводящую уравнения движения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решением которой является солитон. Оценить энергию и размер солитона.

7. Взаимодействие калибровочных бозонов.

Найти взаимодействие калибровочных бозонов Стандартной модели друг с другом и с хиггсовским бозоном. Показать, что эти взаимодействия инвариантны относительно калибровочных преобразований из $U_{em}(1)$.

8. Топологически массивные калибровочные теории в трехмерном пространстве-времени (Дезер, Джекив, Темплтон, 1982).

Рассмотрим теорию одного действительного векторного поля в трехмерном пространстве-времени, $\mu = 0, 1, 2$. Выберем действие в виде

$$S = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + g \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \right),$$

где $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}$ — полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon^{012} = 1$, g — действительная постоянная, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

1) Найти размерность константы g .

2) Показать, что действие инвариантно относительно убывающих на бесконечности калибровочных преобразований

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

($\alpha(x)$ достаточно быстро убывает при $x \rightarrow \infty$).

3) Найти уравнения поля и показать, что они калибровочно инвариантны.

4) Найти спектр физических возбуждений поля (т. е. таких, которые не уничтожаются калибровочными преобразованиями). В частности, найти количество физических степеней свободы, структуру поля в этих модах и зависимость частоты ω от волнового вектора $\mathbf{k}$.

5) Слагаемое $\varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda$ называют лагранжианом Черна-Саймонса. Обобщить это выражение на случай неабелевых калибровочных полей так, чтобы неабелев лагранжиан Черна-Саймонса содержал не более одной производной и был инвариантен, с точностью до полной производной, относительно неабелевых калибровочных преобразований.