Условия сдачи экзамена по курсу “Классические калибровочные поля” (весна 2018)

Оценка за экзамен выставляется по результатам устной сдачи решенных дома задач из приведенного ниже списка. Студенты, не сдавшие задачу с коллоквиума к экзамену не допускаются. Все задачи рекомендуются для разбора. Одна из них фиксируется в течение семестра в качестве обязательной для разбора у доски. Кроме того, для получения оценки "отлично необходимо сдать дополнительную задачу (ее нельзя сдавать лектору или семинаристам).

Задачи к экзамену по курсу “Классические калибровочные поля” (весна 2018)

1. Ленты вокруг мексиканской шляпы.
Рассмотрим теорию двух действительных скалярных полей ϕ^a, $a = 1, 2$, в (1+1)–мерном пространстве-времени. Лагранжиан выберем в виде (по повторяющемуся индексу a подразумевается суммирование)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^a\partial_\mu\phi^a - \frac{\lambda}{4}\left(\phi^a\phi^a - v^2\right)^2 - \varepsilon\phi^1 \ .$$

1. Найти размерности констант λ, v и ε.

2. Найти основное состояние и спектр малых возмущений около него при малых ε.

3. Показать, что при достаточно малых ε в модели имеется солитон — статический локальный минимум функционала энергии, являющийся решением уравнений поля и имеющий конечную энергию.

4. Показать, что этот солитон можно продеформировать в основное состояние так, что все промежуточные полевые конфигурации будут иметь конечную энергию. Таким образом, солитон не имеет топологической природы.

5. Оценить высоту энергетического барьера между солитоном и основным состоянием при малых ε.

2. Локализованные моды на доменной стенке. Изучим доменные стенки в теории действительного скалярного поля φ с потенциалом

$$V = \begin{cases} \lambda(|\varphi| - v)^2, & |\varphi| > \varphi_0, \\ C_0 - C_1\varphi^2 & |\varphi| \le \varphi_0, \end{cases}$$

где константы $C_0 = \lambda v^2\left(1 - \frac{\varphi_0}{v}\right)$ и $C_1 = \lambda\left(\frac{v}{\varphi_0} - 1\right)$ подобраны с учетом непрерывности функции V. Устойчивы ли стенки? Найти число локализованных мод в зависимости от значений параметров модели.

3. Абелева модель Хиггса и сверхпроводимость.
Рассмотрим абелеву модель Хиггса, в которой A_μ – обычное электромагнитное поле, а скалярное поле ϕ соответствует конденсату куперовских пар электронов; знак перед $m^2|\phi|^2$ в лагранжиане зависит от внешних условий.

1. Записать уравнения движения в терминах **E** и **B**, определить ток и электрическое сопротивление. Показать, что в вакууме $\phi = v$ имеет место эффект Мейсснера для магнитного поля и равенство нулю электрического сопротивления.

2. При изменении параметров системы, когда становится $m^2 < 0$, в ней образуются вихри Абрикосова, внутри которых $\phi \approx 0$, а снаружи $\phi \approx v$. Пусть λ – константа самодействия скалярного поля (зависящая от свойств материала), а e – калибровочная константа (электрический заряд). Почему в сверхпроводнике II рода ($\lambda \gg e^2$) образуется решетка из большого числа N вихрей с топологическим числом 1 каждый, а в сверхпроводнике I рода ($\lambda \ll e^2$) образуется один большой вихрь с топологическим числом N, то есть в большом объеме внутри вихря эффективно восстанавливается обычная фаза $\phi = 0$?

4. Липатон.
Рассмотрим модель одного скалярного поля в $(3+1)$–мерном пространстве-времени с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \ ,$$

где $\lambda > 0$. Скалярный потенциал $V(\varphi) = -\frac{\lambda}{4}\varphi^4$ не ограничен снизу, поэтому основное состояние в модели отсутствует. Грубо говоря, основное состояние соответствует полю $\varphi = \infty$. Тем не менее, можно задать следующие вопросы:

1. Является ли состояние $\varphi = 0$ устойчивым относительно малых возмущений с конечной энергией?

2. Если да, найти в явном виде евклидов пузырь, соответствующий распаду состояния $\varphi = 0$ туннельным образом. Считая, что $\lambda \ll 1$, найти квазиклассическую экспоненту для вероятности распада.

3. * Изучить линейные возмущения над полученным солитоном в евклидовой теории.

5. E–шары. Рассмотрим в (3+1) измерениях теорию комплексного скалярного поля ϕ с потенциалом $V(\phi)$, допускающим существование Q-шаров:

$$V(\phi) = v^2 M^2 \quad \text{при } |\phi| \to \infty,$$

$$V(\phi) = M^2|\phi|^2 \quad \text{при } |\phi| \to 0.$$

Пусть поле ϕ взаимодействует с абелевым калибровочным полем (электромагнитным), заряд поля e.

1. Для произвольного заряда e доказать соотношение

   $$dE/d\omega = \omega dQ/d\omega,$$

   где E – энергия солитона, Q – его заряд, а ω – параметр в анзаце, $\phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}F(r)$.

2. Найти зависимость $E(Q)$ при $e = 0$ и построить соответствующий график.

3. Используя теорию возмущений, найти первую нетривиальную поправку при малом e. Оценить изменение в $E(Q)$. Как полученный результат соотносится с кулоновским отталкиванием. Работает ли теория возмущений при больших зарядах Q?

6. БПС-вихрь на H^2. Уравнения для вихря в абелевой медели Хиггса могут быть сведены к уравнениям первого порядка при определенном соотношении между константой самодействия скалярного поля λ и электрическом зарядом e.

1. Разобраться с этим утверждением в плоском пространстве. Соответствующее соотношение называют условием Богомольного-Прасада-Соммерфилда (БПС). Воспользоваться оригинальными работами или, например, книгой А.С. Шварца, §3.

2. Пусть пространство образует гиперболоид H^2 с постоянной отрицательной кривизной. Внешнюю пространственную метрику можно выбрать как

$$dl^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - x^2 - y^2)^2}(dx^2 + dy^2),$$

   $R = \mathrm{const}$ – параметр. При помощи БПС-процедуры для статического решения получить уравнения первого порядка. Следуют ли из них уравнения второго порядка?

3. Решить полученные урвнения.

7. Сфалерон в абелевой модели Хиггса. Найти сфалерон в абелевой модели Хиггса в $(1 + 1)$-мерном пространстве-времени.

8. Потенциал взаимодействия вихрей. Рассмотрим абелеву модель Хиггса в $(2+1)$-мерном пространстве-времени. Пусть масса хиггсовского бозона m_H много больше массы векторного бозона m_V.

1) Найти энергию взаимодействия двух вихрей с одной намоткой, находящихся на расстоянии r друг от друга, в следующих случаях:

1. $r \gg m_V^{-1}$, большие расстояния;

2. в пределе $m_H^{-1} \gg r \gg m_V^{-1}$, считая что

$$|\ln(rm_V)| \gg 1, \qquad |\ln(rm_H)| \gg 1.$$

2) То же для пары вихрь-антивихрь.

9. Сдвиговая симметрия. Пусть лагранжиан действительного поля ϕ является произвольной функцией $X = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$,

$$\mathcal{L} = F(X).$$

Найти симметрии и вакуумы теории. Какие из этих вакуумов классически стабильны? Все ли возмущения над этими вакуумами имеют положительную энергию? Проиллюстрировать результаты на примере $F(X) = (X - X_0)^2$, где X_0 – параметр. Происходит ли спонтанное нарушение симметрии? Выполняется ли теорема Голдстоуна?

10. Взаимодействие на границе. Рассмотрим двумерную теорию действительного скалярного поля $\phi(t, x)$ с действием

$$S = \frac{1}{2} \int dt \int_0^\infty d\mathrm{x} \left[(\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2 \right] - \mu \int dt \left[1 - \cos(\phi(t, 0)) \right].$$

Взаимодействие в этой теории локализовано при $x = 0$.

1) Найти вакуумы модели при $m = 0$.

2) Что представляют из себя похожие решения при малой, но ненулевой массе, $m \ll \mu$?

3) Найти сфалероны при $m \neq 0$.

4) При $m = 0$ найти инстантоны, соответствующие переходам между вырожденными вакуумами. Чему равно евклидово действие на этих решениях? Как оно изменяется при добавлении малой массы m.

11. Вихри в теории Черна-Саймонса.

Найти явный профиль полей вихря в работе: R. Jackiw and S. Y. Pi, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 2969. doi:10.1103/PhysRevLett.64.2969

12. V–потенциал.

Рассмотрим теорию одного комплексного скалярного поля ϕ в $(d+1)$-мерном пространстве-времени с лагранжианом

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - \lambda |\phi|, \tag{1}$$

где $\lambda > 0$.

(a) Найти размерность параметра λ.

(b) Найти глобальную симметрию и сохраняющийся заряд Q.

(c) Описать множество вакуумов. Что можно сказать о малых возмущениях около вакуума в модели (1)? Регуляризовать потенциал вблизи малых значений поля. Что происходит с массой возбуждений над вакуумом в пределе снятия регуляризации?

(d) Показать, что в модели имеются солитонные решения с конечным зарядом Q и конечной энергией E, то есть Q-шары. Найти зависимость $E(Q)$ для таких решений, обсудить устойчивость.

(e) Для $d = 1, 2, 3$ найти Q-шары в явном виде. Изучить поведение поля вдали от центра Q-шара.