Вращающиеся бозе-звёзды

Пушная Е.К.
212 группа

МГУ им. М. В. Ломоносова
Физический факультет

Научный руководитель: с.н.с. ОТФ ИЯИ РАН, кандидат физ.-мат. наук Левков Д.Г.

Москва 2018 г.

Постановка задачи

В данной работе мы выясним, как выглядят бозе-звёзды в двух и трёх пространственных измерениях, как описать и проанализировать их вращение, а также стабильны ли они.

Бозе-звезду можно описать волновой функцией

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\phi|^2 d^n x = N,$$

удовлетворяющей системе уравнений Шрёдингера-Пуассона:

$$i\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\Delta\phi + \Phi\phi,$$

$$\Delta\Phi = 4\pi G m|\phi|^2.$$

Особенность

Выразим плотность потока конденсата:

$$j = \frac{i}{2m} \left(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^* \right).$$

Если представить волновую функцию в виде $\phi = \phi_0 e^{i\theta}$,

$$j = \frac{1}{m} \phi_0^2 \nabla(\theta),$$

Так что

$$rot j = 0.$$

Численное нахождение профилей бозе-звёзд

В безразмерных величинах уравнения Шрёдингера-Пуассона для невращающейся звезды принимают вид

$$\Delta\phi_0 = (-1 + 2\Phi)\,\phi_0,$$

$$\Delta\Phi = \phi_0^2,$$

Чтобы решение было регулярным в нуле, необходимо, чтобы поля имели разложения $\phi_0 = c_1 + c_2 r^2 + c_5 r^4 \ldots$, $\Phi = r^2(c_3 + c_4 r^2 + c_6 r^4 \ldots)$. Начальные условия для трёхмерной звезды

$$2c_2 = -\frac{c1}{3}, \quad c_3 = \frac{c_1^2}{6}, \quad 2c_4 = -\frac{c_1^2}{30}$$

Включают одну неопределённую константу c_1; её подберём так, чтобы ϕ_0 и Φ имели нужные асимптотики на бесконечности.

Невращающиеся бозе-звёзды в 3+1 измерениях

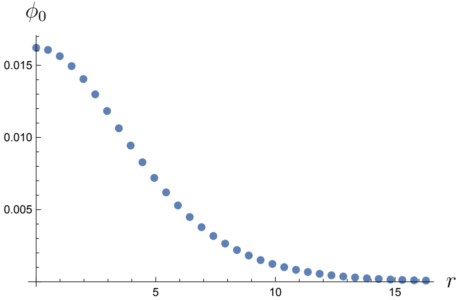

Рис. 1: Профиль трёхмерной бозе-звезды

Бозе-звёзды в 2+1 измерениях

Решение уравнений для вращающейся стационарной звезды можно записать в виде

$$\phi = \phi_0(r)e^{-i\mathcal{E}t}e^{il\varphi}$$

Из соображений регулярности в нуле поля имеют следующие разложения:

$$\phi_0 = r^l(c_1 + c_2r^2 + c_5r^4 ...),$$

$$\Phi = r^{2l+2}(c_3 + c_4r^2 + c_6r^4 ...)$$

l=0

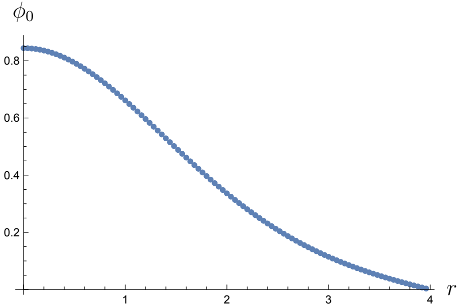

Рис. 2: Профиль бозе-звезды при l=0

l=1

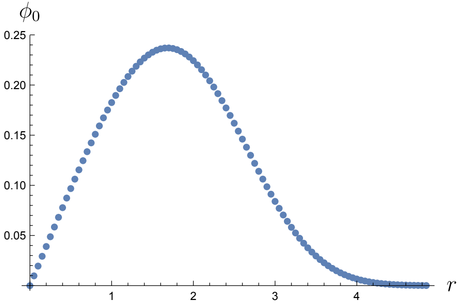

Рис. 3: Профиль бозе-звезды при l=1

l=2

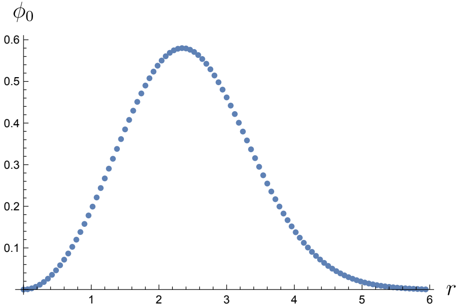

Рис. 4: Профиль бозе-звезды при l=2

Гамильтонова структура

Уравнение Шрёдингера можно записать в гамильтоновом виде:

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\phi^*},$$

$$H = \frac{1}{2}\int d^n x \left[|\nabla\phi|^2 + \Phi|\phi|^2\right].$$

Этот формализм можно обобщить, чтобы из условия экстремума гамильтониана (17b) получалось уравнение Пуассона. Тогда потребуется добавить в H ещё один член:

$$H = \frac{1}{2}\int d^n x \left[|\nabla\phi|^2 + (\nabla\Phi)^2 + \Phi|\phi|^2\right].$$

Решение стационарного уравнения Шрёдингера эквивалентно нахождению эстремума функционала

$$F = \frac{1}{2}\int d^n x \left[|\nabla\phi|^2 + (\nabla\Phi)^2 + \Phi|\phi|^2 + \lambda^2|\phi|^2\right].$$

Возмущения

Будем исследовать полученные решения на устойчивость, анализируя, минимизируют ли они энергию. Будем работать с возмущением

$$\phi = \left[\phi_0(r) + u(r,\varphi,t) + iv(r,\varphi,t)\right] e^{-i\mathcal{E}t} e^{il\varphi},$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Delta^{-1}(2\phi_0 u + u^2 + v^2).$$

Получаем

$$2\delta^2 F = \int d^n x \left[uL_1 u + vL_0 v - u\frac{l}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}v + v\frac{l}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}u \right],$$

$$L_0 = -\Delta + \lambda^2 + 2\Phi + \frac{l^2}{r^2},$$

$$L_1 = -\Delta + \lambda^2 + 2\Phi + \frac{l^2}{r^2} + 4\phi_0\Delta^{-1}\phi_0.$$

Спектральная задача

Требуется, чтобы вторая вариация была положительна. Будем анализировать решения на стабильность в секторах 0 и 1, т.е. представим u и v в виде

$$u = a_0 + a_1 e^{i\varphi},$$
$$v = b_0 + b_1 e^{i\varphi}.$$

Получаем систему уравнений на собственные значения B:

$$L_1 a_0 = E a_0 + \Lambda \phi_0,$$
$$L_0 b_0 = E b_0,$$
$$L_1 x_1 + c y_2 = E x_1,$$
$$L_1 y_1 - c x_2 = E y_1,$$
$$L_0 x_2 - c y_1 = E x_2,$$
$$L_0 y_2 + c x_1 = E y_2.$$

Здесь Λ - множитель Лагранжа, определяемый из условия $\langle a_0 | \phi_0 \rangle = 0$.

Численное нахождение спектра

a_0 и b_0 имеют в нуле разложения вида $r^l(c_1 + c_2 r^2 + c_3 r^4 ...)$. Введём функцию $f = 2\pi \int\limits_0^r a_0 \phi_0 r dr$. Получим три решения данной системы при различных начальных условиях:

$$c_{1a} = 1, 0, 0;$$
$$c_{1b} = 0, 1, 0;$$
$$\Lambda = 0, 0, 1.$$

$\phi_i = \begin{pmatrix} a_{0i}(s) & b_{0i}(s) & f_i(s) \end{pmatrix}$. Искомое решение, для которого $a_0(\infty) = b_0(\infty) = f(\infty)$ представимо как линейная комбинация ϕ_i.

$$q_E = det \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a_{01}(s) & a_{02}(s) & a_{03}(s) \\ b_{01}(s) & b_{02}(s) & b_{03}(s) \\ f_1(s) & f_2(s) & f_3(s) \end{pmatrix} = 0.$$

l=0

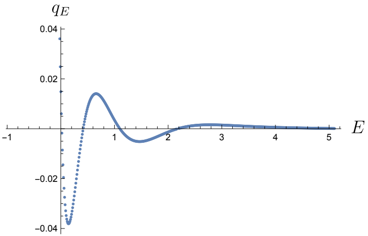

Рис. 5: Зависимость параметра системы от энергии. Энергии, при которых q_E пересекает ноль, и есть искомый спектр.

l=1

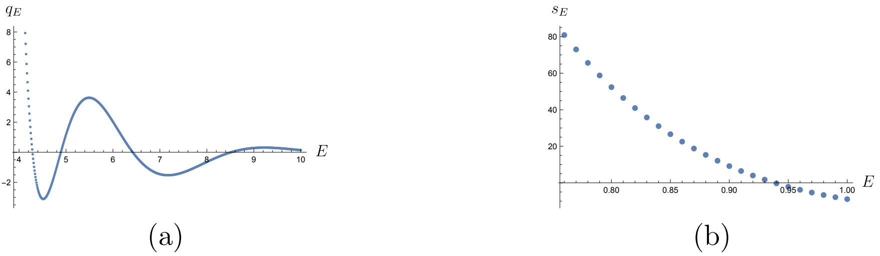

Рис. 6: Зависимость параметров системы от энергии.

l=2

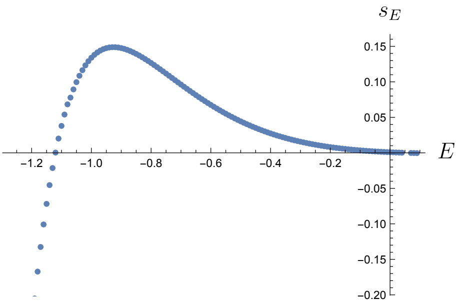

Рис. 7: Зависимость s_E от энергии.

Заключение

- Получены профили невращающейся бозе-звезды в 3D и вращающихся звезд в 2D.
- Изучена стабильность этих объектов.
- Показано, что все невращающиеся бозе-звёзды стабильны.
- Двумерные вращающиеся бозе-звезды с $l=1$ стабильны, а с $l=2$ - нестабильны.

- Vincent B. Klaer, Guy D. Moore "The dark-matter axion mass 2017 JCAP 1711 (2017) no.11, 049 arXiv: 1708.07521 [hep-ph]
- Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теоретическая физика, том 3 "Квантовая Механика. Нерелятивистская теория"
- D.G. Levkov, A.G. Panin and I.I. Tkachev, "Relativistic axi ons from collapsing Bose stars Phys. Rev. Lett. 118 (2017) no.1, 011301 [arXiv:1609.03611]
- Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теоретическая физика, том 9 "Статистическая Физика. Часть 2"
- William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, "Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing". Third edition, C++.
- В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов, "Солитоны и коллапсы: два сценария эволюции нелинейных волновых систем," Успехи Физических Наук, том 182, no 6, июнь 2012

Спасибо за внимание!