ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова"

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

МАГИСТРСКАЯ РАБОТА

Полевые конфигурации, нарушающие изотропное условие энергодоминантности, в теориях с высшими производными.

Выполнил студент
243м группы
Меличев Олег

____
(подпись студента)

Научный руководитель
академик В. А. Рубаков

____
(подпись научного руководителя)

Допущен к защите
Заф. кафедрой ________________
(подпись зав. кафедрой)

Москва
2018 г.

Содержание

Введение.

Предметом данной работы являются скалярные теории с лагранжианами, содержащими производные второго порядка, однако приводящими к уравнениям поля, не содержащим производные выше второго порядка [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Они позволяют создавать стабильные конфигурации, нарушающие изотропное условие энергодоминантности (Null Energy Condition, NEC):

$$T_{\mu\nu}\eta^{\mu}\eta^{\nu} > 0, \tag{1}$$

для любого светоподобного вектора η^{μ}.

В данной работе рассматривается скалярное поле с действием следующего вида:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}, \qquad \mathcal{L} = \sum_{i=2}^{5}\mathcal{L}_i, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_2 = G_2(\phi, X),\\
&\mathcal{L}_3 = -G_3(\phi, X)\Box\phi,\\
&\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X)R + G_{4X}\left[(\Box\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2\right],
\end{aligned}$$

где $X = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi$, $\Box\phi = \nabla_\mu\nabla^\mu\phi$, R - тензор Риччи, G_2, G_3, G_4 - некие произвольные функции, сигнатура метрики выбрана положительно определенной, $(-,+,+,+)$. Эти модели представляют большой интерес, потому как при определенных условиях не содержат ни духовых, ни градиентных неустойчивостей, которые часто возникают в моделях, нарушающих NEC.

В рамках этой теории была предложена модель, являющаяся одной из альтернатив инфляционной космологии, так называемый «Галилеонный Генезис» [2]. В этой модели Вселенная стартует с бесконечного отрицательного времени и плоского пространства Минковского, постепенно плотность энергии поля галилеона начинает расти и при приближении к $t = 0$ происходит переход к инфляционной стадии, или же сразу в стадию разогрева, а после в горячую стадию.

Положим метрику однородной Вселенной равной

$$ds^2 = -N(t)^2dt^2 + a(t)^2dx_idx^i. \tag{3}$$

В асимптотике $t \to -\infty$ функции $a(t)$, $N(t)$ ведут себя как

$$a \approx 1 + \frac{\chi/\delta}{(-t)^{\delta}}, \qquad N \approx 1 + \frac{\eta_1}{2(-t)^{\xi}}, \tag{4}$$

откуда параметр Хаббла $H = \frac{\dot{a}}{Na}$ получается равным

$$H \approx \frac{\chi}{(-t)^{1+\delta}}. \tag{5}$$

В статье [8] была доказана запрещающая теорема, согласно которой такие теории возможны только если G_4 мало на ранних временах:

$$G_4 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty. \tag{6}$$

Как видно из (2), условие (6) представляет собой, по существу, условие стремления к нулю эффективной массы Планка. Это наталкивает на мысль о том, что решения, удовлетворяющие такому условию, на ранних временах находятся в режиме квантовой гравитации. Так как мы в этой работе касаемся лишь классического описания эволюции, то все наши предыдущие рассуждения, в случае перехода в квантовый режим, теряют смысл. Однако, в действительности, условием того, что решение находится в классическом режиме эволюции и не переходит в квантовый, является не величина эффективной массы Планка, а то, что характерная скорость протекания реакций в системе остается значительно большей характерной скорости изменения ее параметров. В противном случае говорят, что решение находится в режиме сильной связи.

В статье [8] также был предложен конкретный вариант Лагранжиана, допускающий решения, удовлетворяющие (6). Целью данной работы являлось нахождение явного вида этих решений, и исследование его на наличие в нем сильной связи для поля скалярных возмущений.

1 Конкретизация лагранжиана. Нахождение решения.

1.1 Формулировка в терминах ADM-формализма

Воспользовавшись уравнениями Гаусса-Кодацци, можно переписать наш лагранжиан в виде:

$$\mathcal{L} = A_2(t, N) + A_3(t, N)K + A_4(K^2 - K_{ij}^2) + B_4(t, N)R^{(3)}, \tag{7}$$

где

$$G_2 = A_2 - 2XF_\phi, \tag{8}$$
$$G_3 = -2XF_X - F, \tag{9}$$
$$G_4 = B_4, \tag{10}$$

а $F(\phi, X)$ - некая вспомогательная функция, для которой

$$F_X = -\frac{A_3}{(2X)^{\frac{3}{2}}} - \frac{B_{4\phi}}{X}. \tag{11}$$

Мы рассматриваем решение типа «Генезис», для этого выберем фунции лагранжиана таким образом, чтобы можно было обойти запрещающую теорему, эти функции были представлены в статье [8]:

$$A_2 = M_{Pl}^4 f^{-2(\alpha+1)-\delta} a_2(N), \tag{12}$$
$$A_3 = M_{PL}^3 f^{-2\alpha-1-\delta} a_3(N), \tag{13}$$
$$A_4 = -B_4 = -M_{Pl} f^{-2\alpha}, \tag{14}$$

где $2\alpha > 1 + \delta > 0$, а $f(t)$ есть некая функция, имеющая при $t \to -\infty$ асимптотику

$$f \approx c(-t). \tag{15}$$

1.2 Решение уравнений движения

Уравнение движения, полученные из вариации действия по метрике, имеют вид:

$$\epsilon = aN^{-1}\partial_t (NA_2) + 3a\dot{A}_3 H + 6aN\partial_t \left(N^{-1}A_4\right) H^2 = 0 \tag{16}$$
$$\mathcal{P} = A_2 - 6A_4H^2 - N^{-1}\partial_t (A_3 + 4A_4H) = 0 \tag{17}$$

Далее выберем функции $a_2(N)$ и $a_3(N)$ как в статье [8]:

$$a_2 = -\frac{1}{N^2} + \frac{1}{3N^4}, \qquad a_3 = \frac{1}{4N^3}. \tag{18}$$

Теперь, решая уравнения движения, получаем следующие значения коэффициентов:

$$\chi = \frac{\frac{2}{3}M_{Pl}^2 + \frac{cM_{Pl}}{4}(2\alpha + 1 + \delta)}{(8\alpha + 4(1+\delta))c^{2+\delta}}, \tag{19}$$

$$\xi \leq \delta. \tag{20}$$

2 Лагражниан возмущений в общем виде

2.1 Квадратичное действие

Метрика возмущений имеет вид:

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-\left(e^{2\alpha} - e^{-2\zeta}\delta^{ij}\partial_i\beta\partial_j\beta\right)d\eta^2 + 2\partial_i\beta d\eta dx^i + e^{2\zeta}\delta_{ij}dx^i dx^j\right]. \tag{21}$$

И квадратичный лагранжиан возмущений принимает вид [9]

$$\begin{aligned} S_{(2)}[\zeta,\alpha,\beta] = & \int d\eta d^3x a^2\left[-3g_\zeta\zeta'^2 + c\zeta\left(\partial\zeta\right)^2 - 3\mathcal{H}^2 m_\alpha\alpha^2 + \right. && (22)\\ + & \left. 2g_\zeta\partial\alpha\partial\zeta + 6\mathcal{H}f_\alpha\alpha\zeta' + 2g_\zeta\zeta'\partial^2\beta - 2\mathcal{H}f_\alpha\alpha\partial^2\beta\right], && (23)\end{aligned}$$

где

$$g_\zeta = 2G_4 - 4XG_{4X} \tag{24}$$

$$c_\zeta = 2G_4 \tag{25}$$

$$\begin{aligned} m_\alpha = & G_4 - 10XG_{4X} - 28X^2G_{4XX} - 8X^3G_{4XXX} + \\ & + \frac{\dot\phi}{NH}[-3XG_{3X} - 2X^2G_{3XX} + 4X^2G_{4\phi XX} + 8XG_{4\phi X} + G_{4\phi}] + \\ & + \frac{1}{6H^2}[-G_2 - 4X^2G_{2XX} + 4X^2G_{3\phi X} + 2XG_{3\phi}] \end{aligned} \tag{26}$$

$$f_\alpha = 2G_4 - 8XG_{4X} - 8X^2G_{4XX} + \frac{\dot\phi}{NH}[-XG_{3X} + G_{4\phi} + 2XG_{4\phi X}] \tag{27}$$

Однако нам необходимо переписать его в терминах неконформного времени, восстановив при этом $N(t)$. Для этого мы производим замену

$$d\eta \to \frac{N}{a}dt, \qquad \frac{d}{d\eta} \to \frac{a}{N}\frac{d}{dt}. \tag{28}$$

Учитывая, что $\mathcal{H} = Ha$, получаем такое выражение:

$$\begin{aligned} S_{(2)}[\zeta,\alpha,\beta] = \int dtd^3xaN & \left[-3\frac{a^2}{N^2}g_\zeta\dot\zeta^2 + c\zeta\left(\partial\zeta\right)^2 - 3a^2H^2m_\alpha\alpha^2 + \right. \\ & \left. + 2g_\zeta\partial\alpha\partial\zeta + 6\frac{a^2}{N}Hf_\alpha\alpha\dot\zeta + 2\frac{a}{N}g_\zeta\dot\zeta\partial^2\beta - 2aHf_\alpha\alpha\partial^2\beta\right] \end{aligned} \tag{29}$$

Далее, пользуясь формулами перехода в АДМ формализм (8), (9), (10), получаем:

$$g_\zeta = 2B_4 - 4XB_{4X}, \tag{30}$$
$$c_\zeta = 2B_4, \tag{31}$$
$$m_\alpha = B_4 - 10XB_{4X} - 28X^2B_{4XX} - 8X^3B_{4XXX} + $$
$$- \frac{1}{H}[2XA_{3X} + 2X^2A_{3XX}] - \frac{1}{6H^2}[A_2 + 4X^2A_{2XX}], \tag{32}$$
$$f_\alpha = 2B_4 - 8XB_{4X} - 8X^2B_{4XX} - \frac{1}{H}XA_{3X}. \tag{33}$$

А после фиксации калибровки

$$e^{-\phi} = -\sqrt{2Y_0}t \tag{34}$$

получается окончательное выражение в ADM-переменных:

$$g_\zeta = 2B_4 + 2NB_{4N} \tag{35}$$
$$c_\zeta = 2B_4 \tag{36}$$
$$m_\alpha = B_4 - NB_{4N} + 2N^2B_{4NN} + N^3B_{4NNN} + $$
$$- \frac{1}{2H}\left[NA_{3N} + N^2A_{3NN}\right] - \frac{1}{6H^2}\left[A_2 + 3NA_{2N} + N^2A_{2NN}\right] \tag{37}$$
$$f_\alpha = 2B_4 - 2NB_{4N} - 2N^2B_{4NN} + \frac{1}{2H}NA_{3N} \tag{38}$$

Выражение [?] содержит три скаляных переменных. Однако две из них, α и β, могут быть отынтегрированы. Варьируя действие по α и β, получаем:

$$\alpha = \omega\zeta', \tag{39}$$
$$\partial^2\beta = \omega\partial^2\zeta - \sigma\zeta', \tag{40}$$

где введены обозначения

$$\omega(t) = \frac{g_\zeta}{\mathcal{H}f_\alpha}, \qquad \sigma(t) = 3\left(\frac{g_\zeta m_\alpha}{f_\alpha^2} - 1\right). \tag{41}$$

Используя эти уравнения, мы получаем итоговое квадратичное действие для скалярных возмущений:

$$S^{(2)} = \int dtd^3xa^3N^{-1}\frac{\varepsilon_s}{c_s^2}\left(\zeta'^2 - c_s^2a^2N^{-2}\left(\partial_i\zeta\right)^2\right), \tag{42}$$

где

$$\epsilon_s = \frac{1}{aN}\partial_t\left(\frac{a^2 g_\zeta^2}{\mathcal{H} f_\alpha}\right) - c_\zeta, \qquad c_s^2 = \frac{\epsilon_s}{3g_\zeta}\left(1 - \frac{g_\zeta m_\alpha}{f_\alpha^2}\right)^{-1}.$$

2.2 Кубическое действие

Члены третьего порядка в лагранжиане возмущений также были получены в статье [9]

$$\begin{aligned}
S_{(3)}[\zeta,\alpha,\beta] = \int d\eta d^3x \; a^2 \Big\{ & g_\zeta \left[-9\zeta\zeta'^2 + 2\zeta'\left(\zeta\partial^2\beta + \partial_i\zeta\partial^i\beta\right) - \right.\\
& \left. -\alpha\left(\partial_i\zeta\right)^2 + \left(\partial_i\beta\right)^2\partial^2\zeta - \frac{1}{2}\zeta\left(4\alpha\partial^2\zeta - \left(\partial^2\beta\right)^2 + \left(\partial_i\partial_j\beta\right)^2\right)\right]\\
& + c_\zeta\zeta\left(\partial_i\zeta\right)^2 - 9\mathcal{H}^2 m_\alpha\alpha^2\zeta + 2\mathcal{H} f_\alpha\alpha\left(9\zeta\zeta' - \zeta\partial^2\beta - \partial_i\zeta\partial^i\beta\right)\\
& + \lambda_2\alpha\left[3\zeta'^2 - 2\zeta'\partial^2\beta + \frac{1}{2}\left(\left(\partial^2\beta\right)^2 - \left(\partial_i\partial_j\beta\right)^2\right)\right]\\
& - \lambda_3\mathcal{H}\alpha^2\left(3\zeta' - \partial^2\beta\right) - \lambda_4\alpha^2\partial^2\zeta + \frac{\lambda_5}{2}\mathcal{H}^2\alpha^3\Big\},
\end{aligned} \tag{43}$$

где

$$\lambda_2 = 2B_4 - 2NB_{4N} - 2N^2 B_{4NN}, \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3 = & 2B_4 - 2NB_{4N} + 4N^2 B_{4NN} + 2N^3 B_{4NNN} - \\
& - \frac{1}{2H}\left[NA_{3N} + N^2 A_{3NN}\right],
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\lambda_4 = 2B_4 + 6NB_{4N} + 2N^2 B_{4NN}, \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_5 = & 2B_4 - 2NB_{4N} - 2N^2 B_{4NN} - 8N^3 B_{4NNN} - 2N^4 B_{4NNNN} + \\
& + \frac{1}{H}\left[NA_{3N} + 3N^2 A_{3NN} + N^3 A_{3NNN}\right] + \\
& + \frac{1}{3H^2}\left[A_2 + 7NA_{2N} + 6N^2 A_{2NN} + N^3 A_{2NNN}\right].
\end{aligned} \tag{47}$$

Как и в квадратичном действии, мы можем избавиться от переменных α и β. Используя выражения (?), получаем:

$$
\begin{aligned}
&S_{(3)}[\zeta] = \int d\eta d^3 x a^2 \left\{ \Lambda_1 \zeta'^3 + \Lambda_2 \zeta'^2 \zeta + \Lambda_3 \zeta'^2 \partial^2 \zeta + \Lambda_4 \zeta' \zeta \partial^2 \zeta + \right.\\
&+ \Lambda_5 \zeta' \left(\partial_i \zeta\right)^2 + \Lambda_6 \zeta \left(\partial_i \zeta\right)^2 + \Lambda_7 \zeta' \left(\partial^2 \zeta\right)^2 + \Lambda_8 \zeta \left(\partial^2 \zeta\right)^2 + \\
&+ \Lambda_9 \partial^2 \zeta \left(\partial_i \zeta\right)^2 + \Lambda_{10} \zeta' \left(\partial_i \partial_j \zeta\right)^2 + \Lambda_{11} \zeta \left(\partial_i \partial_j \zeta\right)^2 + \\
&+ \Lambda_{12} \zeta' \partial_i \zeta \partial^i \psi + \Lambda_{13} \partial^2 \zeta \partial_i \zeta \partial^i \psi + \Lambda_{14} \partial^2 \zeta \left(\partial_i \psi\right)^2 + \\
&\left. + \Lambda_{15} \zeta' \left(\partial_i \partial_j \psi\right)^2 + \Lambda_{16} \zeta \left(\partial_i \partial_j \psi\right)^2 + \Lambda_{17} \zeta' \partial_i \partial_j \zeta \partial^i \partial^j \psi + \Lambda_{18} \zeta \partial_i \partial_j \zeta \partial^i \partial^j \psi \right\}, \qquad (48)
\end{aligned}
$$

значения коэффициентов $\Lambda_1 - \Lambda_{18}$ приведены в Приложении A.

3 Сильная связь

3.1 Предварительные соображения

Мы вводим новую переменную

$$\varphi = \gamma_s \zeta, \quad \gamma_s = \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{c_s^2}}, \tag{49}$$

что позволяет канонизировать действие для скалярных возмущений. Квадратичная часть принимает вид:

$$S^{(2)} = \int d\eta d^3 x a^2 \Big(\frac{1}{2} \varphi'^2 - \frac{1}{2} \big(\nabla \varphi\big)^2 + \dots \Big). \tag{50}$$

Отметим, что $[\zeta] = 0$, $[\varphi] = 1$, $[\gamma_s] = 1$.

3.2 Анализ

Для решения поставленной задачи, необходимо найти поведение коэффициенов в кубическом действии канонизиованного поля скалярных возмущений. Для этого был разработан новый формализм, подробно изложенный в Приложении B. Там же получены результаты вычисления асимптотик этих коэффициентов при $t \to -\infty$. Здесь мы приводим полученные результаты:

$$\Lambda_{knp}(t) \sim (-t)^{x+3\alpha-\frac{3}{2}\delta-k-p} \nu_a(t) \nu_N(t) \qquad \text{при } t \to -\infty, \tag{51}$$

а их размерность равна

$$\big[\Lambda_{knp}(t)\big] = 1 - a - b + k + p. \tag{52}$$

В случае $\big[\Lambda_{ijklmnp}(t)\big] > 0$ то член нам соответсвующая диаграмма сходится.

В случае $\big[\Lambda_{ijklmnp}(t)\big] = 0$ мы должны потребовать $\Lambda_{ijklmnp}(t) \ll 1$ (чтобы была применима теория возмущений) или, в теорминах времени:

$$x + 3\alpha - \frac{3}{2}\delta - k - p < 0. \tag{53}$$

Здесь мы предполагаем, что использованная комбинация не обращается в ноль. Так как $1 - a - b + k + p = \left[\Lambda_{knp}\right] = 0$ мы можем избавиться от $k + p$, получив

$$x + 3\alpha - \frac{3}{2}\delta < a + b - 1. \tag{54}$$

Наконец, в случае $\left[\Lambda_{ijklmnp}\right] < 0$ мы имеем

$$\ngeq_{ijklmnp} = \left(\Lambda_{ijklmnp}\right)^{\frac{1}{1-a-b+i+j+k+p}}, \quad \left[\ngeq_{ijklmnp}\right] = 1. \tag{55}$$

.

Мы можем теперь сравнить результаты $\ngeq_{ijklmnp}$ со скоростью изменения параметров системы, скажем, Ω.

$$H \sim \frac{1}{(-t)^{1+\delta}}, \tag{56}$$

$$\frac{\Omega'}{\Omega} \sim \frac{1}{-t}, \tag{57}$$

Режим сильно связи избегается, когда

$$T_{knp} \ll T_H \quad \text{and} \quad T_{knp} \ll -t, \tag{58}$$

В итоге, получается следующее условие:

$$x + 3\alpha - \frac{3}{2}\delta < a + b - 1, \tag{59}$$

Посчитав асимптотики переменных Λ (см. Приложение A), мы получаем, что сильной связи удается избежать, в случае если выполняется следующее соотнощение между параметрами:

$$\boxed{\delta < \frac{1}{4}, \qquad 2 - 3\delta \geq 2\alpha > 1 + \delta.} \tag{60}$$

Выводы

- В данной работе были получены формулы перехода между ковариантным и ADM формализмами для теории Хорндески. Воспроизведен результат, полученный в статье [10].

- Для конкретного решения типа «галилеоннный Генезис» найдено решение в асимптотике ранних времен.

- Показано, что в некоторой области параметров сильная связь отсутствует на ранних временах.

Заключение

В рамках этой теории была предложена модель, являющаяся одной из альтернатив инфляционной космологии, так называемый «Галилеонный Генезис» [2]. В этой модели Вселенная старнует с бесконечного отрицательного времени и плоского пространства Минковского, постепенно плотность энергии поля галилеона начинает расти и при приближении к $t = 0$ происходит переход к инфляционной стадии или же разогрев и переход на горячую стадию.

Целью работы являлось нахождение решения, удовлетворяющего условию (6), в асимптотике $t \to -\infty$ и исследование его на наличие в нем сильной связи для поля скалярных возмущений.

Заметим, что в статье [8], где был предложен исходый лагранжиан для обхода запрещающей теоремы, были представлены графики решений для $\delta = 1/2$, которое, как было показано, содержит проблему сильной связи.

A Неканонизированное кубическое действие для ζ

Выражения для коэффициентов кубического действия:

$$\Lambda_1 = \lambda_2 \omega \left(3 + 2\sigma + \frac{\sigma^2}{2}\right) - \lambda_3 \mathcal{H} \omega^2 (3 + \omega) + \frac{\lambda_5}{2} \mathcal{H}^2 \omega^3, \tag{61}$$

$$\Lambda_2 = -g_\zeta \left(9 + 2\sigma - \frac{\sigma^2}{2}\right) + 2\mathcal{H} f_\alpha \omega (9 + \sigma) - 9\mathcal{H}^2 m_\alpha \omega^2, \tag{62}$$

$$\Lambda_3 = -\lambda_2 \omega^2 (2 + \sigma) - \lambda_4 \omega^2 + \lambda_3 \mathcal{H} \omega^3, \tag{63}$$

$$\Lambda_4 = -g_\zeta \omega \sigma - 2\mathcal{H} f_\alpha \omega^2, \tag{64}$$

$$\Lambda_5 = g_\zeta \omega - 2\mathcal{H} f_\alpha \omega^2, \tag{65}$$

$$\Lambda_6 = c_\zeta, \tag{66}$$

$$\Lambda_7 = \frac{\lambda_2}{2} \omega^3, \tag{67}$$

$$\Lambda_8 = g_\zeta \frac{\omega^2}{2}, \tag{68}$$

$$\Lambda_9 = g_\zeta \omega^2, \tag{69}$$

$$\Lambda_{10} = -\frac{\lambda_2}{2} \omega^3, \tag{70}$$

$$\Lambda_{11} = -g_\zeta \frac{\omega^2}{2}, \tag{71}$$

$$\Lambda_{12} = -2g_\zeta \sigma + 2\mathcal{H} f_\alpha \omega \sigma, \tag{72}$$

$$\Lambda_{13} = -2g_\zeta \omega \sigma, \tag{73}$$

$$\Lambda_{14} = g_\zeta \sigma^2, \tag{74}$$

$$\Lambda_{15} = -\frac{\lambda_2}{2} \omega \sigma^2, \tag{75}$$

$$\Lambda_{16} = -g_\zeta \frac{\sigma^2}{2}, \tag{76}$$

$$\Lambda_{17} = \lambda_2 \omega^2 \sigma, \tag{77}$$

$$\Lambda_{18} = g_\zeta \omega \sigma. \tag{78}$$

$$\tag{79}$$

Зависимость от времени коэффициентов кубического действия:

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_1 \sim \Lambda_{15} \sim (-t)^{1-2\alpha+3\delta},\\
&\Lambda_2 \sim \Lambda_{14} \sim \Lambda_{16} \sim (-t)^{-2\alpha+2\delta},\\
&\Lambda_3 \sim \Lambda_{17} \sim (-t)^{2-2\alpha+3\delta},\\
&\Lambda_4 \sim \Lambda_{13} \sim \Lambda_{18} \sim (-t)^{1-2\alpha+2\delta},\\
&\Lambda_5 \sim (-t)^{1-2\alpha+\delta},\\
&\Lambda_6 \sim (-t)^{-2\alpha},\\
&\Lambda_7 \sim \Lambda_{10} \sim (-t)^{3-2\alpha+3\delta},\\
&\Lambda_8 \sim \Lambda_9 \sim \Lambda_{11} \sim (-t)^{2-2\alpha+2\delta},\\
&\Lambda_{12} \sim (-t)^{-2\alpha+\delta}.
\end{aligned}
$$

B Формализм подсчета канонизированного действия

Основная проблема состоит в том, что путем интегрирования по частям, члены могут превращаться друг в друга и в другие члены. Поэтому, необходимо не только переопределить переменную в действии, но также и показать, что условия, которые мы должны бужем потребовать для отсутствия сильной связи, не будут зависеть от того, в каком виде оно записано.

Мы обозначаем за

$$\left(\zeta^3(')^a(\partial)^b\right) \tag{80}$$

любой член, имеющий a производных по η и b производных по пространственным переменным, e.g.

$$\zeta''\zeta'\partial_i\partial^i\zeta \in \zeta^3(')^3(\partial)^2, \tag{81}$$

$$(\zeta')^2\partial_i\partial^i\zeta' \in \zeta^3(')^3(\partial)^2, \tag{82}$$

$$(\zeta')^2\psi = (\zeta')^2\partial^{-2}\zeta' \in \zeta^3(')^3(\partial)^{-2}. \tag{83}$$

Заметим, что, например, (81) и (82) представлены в нашем формализме одинаково. В случае $a = 0$ или $b = 0$ мы будем опускать $(')^0$ и $(\partial)^0$ соответственно.

Рассмотрим член

$$\mathcal{A} \equiv A \cdot \Big(\zeta^3(')^a(\partial)^b\Big), \tag{84}$$

входящий в кубический лагранжиан, где $A = A(t)$ есть функция, имеющая следующую асимптотику при $t \to -\infty$:

$$A \to A_0(-t)^x, \quad A_0 = const, \tag{85}$$

x - некоторое вещественное число, $[A] = 4 - a - b$ так как $[\mathcal{L}] = 4$ и $[\zeta] = 0$.

Прежде всего, мы должны заменить $(')$ на $(\dot{})$, то есть производные по конформному времени η на производные по обычному t. Заметим, что $a(t), N(t) \to const$ при $t \to -\infty$, поэтому удобно записать наш член (84) как:

$$\mathcal{A} = \sum_{i=0}^{(a-1)} \sum_{j=0}^{(a-1-i)} A(t)a_{ij}(t)\Big(a(\dot{})^i\Big)\Big(N(\dot{})^j\Big)\Big(\zeta^3(\dot{})^{a-i-j}(\partial)^b\Big). \tag{86}$$

Минус один в пределах отражает тот факт, что превая производная ζ не может подействовать на a или N, так как $\zeta' = \frac{a}{N}\dot{\zeta}$. Видно, что $a_{ij} \to const$ при $t \to -\infty$, однако важно, что a_{ij} может содержать $a(t)$ и/или $N(t)$. Переписывая через φ (см. Eq. (49)), мы получаем

$$\mathcal{A} = \sum_{i=0}^{(a-1)} \sum_{j=0}^{(a-1-i)} \sum_{k=0}^{(a-i-j)} A(t)a_{ijk}(t)\Big(a(\dot{})^i\Big)\Big(N(\dot{})^j\Big)\times \tag{87}$$

$$\times\Big(\gamma_s^{-3}(\dot{})^k\Big)\Big(\varphi^3(\dot{})^{a-i-j-k}(\partial)^b\Big), \tag{88}$$

где a_{ijk} - некоторые новые вещественные коэффициенты, зависящие от структуры исходного члена[1]

Мы можем теперь перебрасывать производные с одного члена на другой, получая при этом другие члены. Здесь мы объясняем наши обозначения:

$$\overbrace{A(t)}^{1}\overbrace{a_{ijk}(t)}^{2}\overbrace{\Big(a(\dot{})^i\Big)}^{3}\overbrace{\Big(N(\dot{})^j\Big)}^{4}\overbrace{\Big(\gamma_s^{-3}(\dot{})^k\Big)}^{5}\overbrace{\Big(\varphi^3(\dot{})^{a-i-j-k}(\partial)^b\Big)}^{6}. \tag{89}$$

[1]Здесь мы видим преимущества нашего формализма: мы не должны фокусироваться на конкретной структуре члена.

- Если мы возьмем произвоные с 3, 4, 5 или 6 множителей и преребросим на один из этих же множителей, то структура их членов не изменится, с единственной разницей, что следует изменить пределы муммирования для i и j с $a-1$ на a.

- Если мы возьмем производные с 3, 4, 5 или 6 множителей и перебросим их на 2, мы получим снова члены такой же структуры, но с большими i и/или j.

- Наконец, если мы возьмем производные с 3, 4, 5 или 6 множителей и преребросим их на 1 множитель, мы получим члены новой структуры: $\Big(A(t)(\,^{\cdot}\,)^d\Big)$, где d - неотрицательное целое число.

Предположим, что мы возьмем l, m, n и p производных с 3, 4, 5 и 6 множителей соответственно, тогда мы запишем $\mathcal{A}$ как:

$$\mathcal{A} = \sum_{i=0}^{a}\sum_{j=0}^{a-i}\sum_{k=0}^{(a-i-j)}\sum_{l=0}^{i}\sum_{m=0}^{j}\sum_{n=0}^{k}\sum_{p=0}^{(a-i-j-k)} \Lambda_{ijklmnp}(t)\Big(\varphi^3(\,^{\cdot}\,)^{a-i-j-k-p}(\partial)^b\Big), \tag{90}$$

где

$$\Lambda_{ijklmnp}(t) = a_{ijklmnp}(t)\Big(A(t)(\,^{\cdot}\,)^{l+m+n+p}\Big)\Big(a(\,^{\cdot}\,)^{i-l}\Big)\Big(N(\,^{\cdot}\,)^{j-m}\Big)\Big(\gamma_s^{-3}(\,^{\cdot}\,)^{k-n}\Big) \tag{91}$$

и как и ранее $a_{ijklmnp}(t) \to const$ при $t \to -\infty$.

Теперь нам необходимо вычислить две вещи: размерность $\Lambda_{ijklmnp}(t)$ и их поведение при $t \to -\infty$. Первое вычисляется просто:

$$\big[\Lambda_{ijklmnp}(t)\big] = 1 - a - b + i + j + k + p, \tag{92}$$

но чтобы вычислить второе нам необходимо использовать асимптотическое поведение $a(t)$ и $N(t)$, точнее, ем необходимо потребовать, что

$$\dot{a}(t) \ll \frac{1}{-t} \text{ or } \dot{a}(t) \sim \frac{1}{-t} \text{ at } t \to -\infty, \tag{93}$$

$$\dot{N}(t) \ll \frac{1}{-t} \text{ or } \dot{N}(t) \sim \frac{1}{-t} \text{ at } t \to -\infty, \tag{94}$$

что в случае рассматриваемого решения типа «галилеонный Генезис» выполяется:

$$a(t) = 1 + \frac{1}{(-t)^\delta} \Rightarrow \dot{a}(t) \sim \frac{1}{(-t)^{1+\delta}},\ \delta > 0, \tag{95}$$

$$N(t) = 1 + \frac{1}{(-t)^\xi} \Rightarrow \dot{N}(t) \sim \frac{1}{(-t)^{1+\xi}},\ \xi > 0. \tag{96}$$

В этом случае у нас есть условия (93) и (94), и асимптотическое поведение множителей 3 и 4 может быть вычислено:

$$\left(a(\dot{\ })^{i-l}\right) \sim (-t)^{-(i-l)}\nu_a(t), \tag{97}$$

$$\left(N(\dot{\ })^{j-m}\right) \sim (-t)^{-(i-l)}\nu_N(t), \tag{98}$$

где $\nu_a(t)$, $\nu_N(t)$ стемятся либо к нулю, либо к некоторой постоянной при $t \to -\infty$, а явные выражения для них могут быть разичными даже в рамках одного члена в нашем формализме, например, ($i = j = 2$, $l = m = 0$):

$$a\ddot{a} \sim (-t)^{-2-\delta} \Rightarrow \nu_a(t) = (-t)^{-\delta}, \tag{99}$$

$$\dot{a}^2 \sim (-t)^{-2-2\delta} \Rightarrow \nu_a(t) = (-t)^{-2\delta}, \tag{100}$$

$$a^2 \sim (-t)^{-0} \Rightarrow \nu_a(t) = 1. \tag{101}$$

В итоге получаем:

$$\Lambda_{ijklmnp}(t) \sim (-t)^{x+3\alpha-\frac{3}{2}\delta-i-j-k-p}\nu_a(t)\nu_N(t) \qquad \text{as } t \to -\infty. \tag{102}$$

В нашем же случае, для теории Хорндески, $i = j = l = m = 0$ и получаются следующие результаты. Коэффициенты кубического действия следующим образом зависят от времени:

$$\Lambda_{knp}(t) \sim (-t)^{x+3\alpha-\frac{3}{2}\delta-k-p}\nu_a(t)\nu_N(t) \qquad \text{при } t \to -\infty, \tag{103}$$

а их размерность равна

$$\left[\Lambda_{knp}(t)\right] = 1 - a - b + k + p. \tag{104}$$

C Транс-Планковская проблема в теории Хорндески

Есть, однако, еще одна трудность: так как φ есть обычное скалярное поле, безмассовое в асимптотике $t \to -\infty$, и не имеющее потенциала, решением уравнения движения является плоская волна. Определяя импульс обрезания k_C, мы получаем квантованное поле

$$\widehat{\varphi}(x) = \int^{k_C} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k_0}}\left(e^{ik_\mu x^\mu}\hat{a}_k^+ + e^{-ik_\mu x^\mu}\hat{a}_k^-\right), \tag{105}$$

где $k_\mu k^\mu = 0$ и таким образом $k_0 = \left|\vec{k}\right|$; $\hat{a}_k^-$ и $\hat{a}_k^+ = \left(\hat{a}_k^-\right)^\dagger$ - лестничные операторы.

Мы можем теперь найти вакуумное среднее φ^2:

$$\begin{aligned}
\left\langle\varphi^2\right\rangle &= \left\langle 0\middle|\widehat{\varphi}^\dagger(x)\widehat{\varphi}(x')\middle|0\right\rangle \\
&= \left\langle 0\right| \int^{k_C} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k_0}}\left(e^{ik_\mu x^\mu}\hat{a}_k^+ + e^{-ik_\mu x^\mu}\hat{a}_k^-\right)\times \\
&\qquad \int^{k_C} \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k'_0}}\left(e^{ik'_\mu x^\mu}\hat{a}_{k'}^+ + e^{-ik'_\mu x^\mu}\hat{a}_{k'}^-\right)\left|0\right\rangle \\
&= \int^{k_C} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k_0}} \int^{k_C} \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k'_0}} e^{-i(k_\mu - k'_\mu)x^\mu}\left\langle 0\middle|\hat{a}_k^-\hat{a}_{k'}^+\middle|0\right\rangle \\
&= \int^{k_C} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k_0}} \int^{k_C} \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k'_0}} e^{-i(k_\mu - k'_\mu)x^\mu}(2\pi)^{3/2}\delta^3\left(\vec{k}-\vec{k}'\right) \\
&= \int^{k_C} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}2k_0} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\ 4\pi\int_0^{k_C} k_0^2\frac{dk_0}{2k_0} = \frac{k_C^2}{2\sqrt{2\pi}},
\end{aligned} \tag{106}$$

то есть амплитуда $\varphi(x)$ порядка k_C. Если мы теперь подставим эту амплитуду в уравнение (49) для ζ:

$$\zeta = \sqrt{\frac{c_s^2}{\varepsilon_s}}\varphi, \tag{107}$$

и, требуя, чтобы $\zeta \ll 1$, чтобы можно было пользоваться теорией возмущений, получаем следующее условие для k_C:

$$k_C \ll \sqrt{\frac{c_s^2}{\varepsilon_s}} \sim \frac{1}{(-t)^{\alpha-\frac{\delta}{2}}}, \tag{108}$$

В ходе расширения Вселенной, мы встречаемся с Транс-планковской проблемой: не все импульсы допустимо рассматривать в рамках теории возмущений, а только те, которые достаточно малы, чтобы не вырасти до планковского масштаба. Это возможно если

$$k_C < \frac{1}{(-t)}. \tag{109}$$

Легко видеть, что $2\alpha + \delta < 2$ (см. (60)) и, так как $\delta > 0$, $2\alpha - \delta < 2$ то и:

$$k_C < \frac{1}{(-t)} \ll \frac{1}{(-t)^{\alpha - \frac{\delta}{2}}}. \tag{110}$$

Поледнее неравенство соответсвует (108), что означает, что нам не следует волноваться об условии $\zeta \ll 1$, если мы требуем отсутсвие Транс-планковских мод.

Другими словами, мы можем рассматривать здоровые теории с

$$\frac{1}{(-t)} < k_C \ll \frac{1}{(-t)^{\alpha - \frac{\delta}{2}}}. \tag{111}$$

Заметим, что в нашей модели «галилеонного Генезиса» это неравенство может и не выполняться.

Список литературы

[1] A. Nicolis, R. Rattazzi, E. Trincherini: The galileon as a local modification of gravity, arXiv: 0811.2197v2.

[2] P. Creminelli, A. Nicolis, E. Trincherini: Galilean Genesis: an alternative to inflation, arXiv: 1007.0027v2.

[3] Deffayet C., Esposito-Farèse G. and Vikman A. Phys. Rev. D vol.79(8) 084003 (2009)

[4] Goon G., Hinterbichler K. and Trodden M. Phys. Rev. Lett. vol. 106(23) 231102 (2011) arXiv:1103.6029 [hep-th]

[5] Goon G., Hinterbichler K. and Trodden M. J. Cosmol. Astropart. Phys. vol. 2011(07) 017 (2011)

[6] Kobayashi T., Yamaguchi M. and Yokoyama J Prog. Theor. Phys., vol. 126(3), 511 (2011) arXiv:1105.5723 [hep-th]

[7] В.А.Рубаков: Изотропное условие энергодоминантности и его нарушение, Успехи физических наук, том 184, февраль 2014г., №2.

[8] Tsutomu Kobayashi: Generic instabilities of nonsingular cosmologies in Horndeski theory: A no-go theorem Phys. Rev. D 94, 043511

[9] Xian Gao and Danièle A. Steer Inflation and primordial non-Gaussianities of "generalized Galileons" Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, Volume 2011, December 2011

[10] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama: "Galilean creation of the inflationary universe Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, Volume 2015, July 2015