Отсутствие статических сферически симметричных кротовых нор в теории Хорндески

Евсеев Олег Александрович

Федеральное Государственное Бюджетное Образовательное
Учреждение Высшего Образования
«Московский Государтсвенный Университет
имени М.В.Ломоносова»

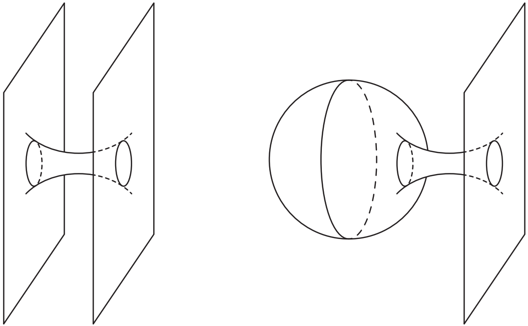
Физический Факультет

Кафедра Физики Частиц и Космологии

25 мая 2018 г.

Содержание

Кротовые норы и полузамкнутые миры



Теорема Пенроуза о Сингулярности

- Некомпактность гиперповерхности Коши.
- Выполнение Изотропного Условия Энергодоминантности (Null Energy Condition, NEC): $T_{\mu\nu}\eta^{\mu}\eta^{\nu} > 0$ для любого светоподобного вектора η^{μ}.

Галилеоны и теория Хорндески

Первое употребление термина «Галилеон»

A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, Phys. Rev. D **79**, 064036 (2009)
doi:10.1103/PhysRevD.79.064036 arXiv:0811.2197 [hep-th].

- Инвариантность уравнений движения относительно замены $\partial^\mu\pi \to \partial^\mu\pi + b^\mu$, где b^μ – постоянный вектор.
- Уравнения движения, не содержащие производных выше второго порядка, несмотря на производную второго порядка в лагранжиане.

Первая статья

G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys., **10**, 363 (1974)
doi:10.1007/BF01807638.

Теория Хорндески

$$S = \int d^4x \sum_{i=2}^{5} \mathcal{L}_i$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 =& K(\phi, X), \\
\mathcal{L}_3 =& -G_3(\phi, X)\Box\phi, \\
\mathcal{L}_4 =& G_4(\phi, X)R + G_{4X}\left[(\Box\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2\right] \\
\mathcal{L}_5 =& G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi \\
& -\frac{1}{6}G_{5X}\left[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3\right],
\end{aligned}$$

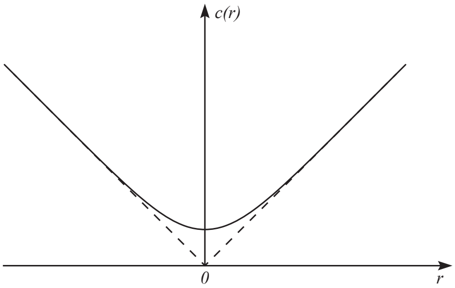
- $X = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi$, $\Box\phi = \nabla_\mu\nabla^\mu\phi$;
- R – скалярная кривизна;
- $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ – тензор Эйнштейна;
- сигнатура метрики $(-,+,+,+)$.

Метрика

Общий вид

$$ds^2 = -a^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{b^2(r)} + c^2(r)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

- Калибровка $a(r) = b(r)$.
- Асимптотики: $a(r) \to 1$, $c(r) \to |r|$ при $r \to \pm\infty$.
- Поведение $c(r)$:



Разложение по сферическим гармоникам

$$s(t,r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}s_{lm}(t,r)Y_l^m(\theta,\varphi),$$

$$V_a(t,r,\theta,\varphi)=\overset{\gamma}{\nabla}_a\Phi_1(t,r,\theta,\varphi)+E_a^b\overset{\gamma}{\nabla}_b\Phi_2(t,r,\theta,\varphi),$$

$$T_{ab}(t,r,\theta,\varphi)=\overset{\gamma}{\nabla}_a\overset{\gamma}{\nabla}_b\Psi_1+\gamma_{ab}\Psi_2(t,r,\theta,\varphi)$$
$$+\frac{1}{2}\left(E_a^c\overset{\gamma}{\nabla}_c\overset{\gamma}{\nabla}_b\Psi_3(t,r,\theta,\varphi)+E_b^c\overset{\gamma}{\nabla}_c\overset{\gamma}{\nabla}_a\Psi_3(t,r,\theta,\varphi)\right),$$

- γ_{ab} – метрика двумерной сферы;
- $\overset{\gamma}{\nabla}_a$ – ковариантная производная в этой метрике;
- $E_{ab}=\sqrt{\det\gamma}\,\varepsilon_{ab}$, ε_{ab} – символ Леви-Чивиты, $\varepsilon_{\theta\varphi}=1$;
- Φ_1, Φ_2, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 – некоторые скалярные функции;
- $Y_l^m(\theta,\varphi)$ – сферические функции.

Возмущения в нечётном секторе (члены, содержащие E_{ab})

$$\delta\phi = 0, \qquad h_{tt} = 0, \qquad h_{tr} = 0, \qquad h_{rr} = 0,$$

$$h_{ta} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} h_{0,lm}(t,r) E_{ab} \partial^b Y_l^m(\theta,\varphi),$$

$$h_{ra} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} h_{1,lm}(t,r) E_{ab} \partial^b Y_l^m(\theta,\varphi),$$

$$h_{ab} = \frac{1}{2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} h_{2,lm}(t,r) \Big[E_a^c \overset{\gamma}{\nabla}_c \overset{\gamma}{\nabla}_b Y_l^m(\theta,\varphi) + E_b^c \overset{\gamma}{\nabla}_c \overset{\gamma}{\nabla}_a Y_l^m(\theta,\varphi) \Big].$$

Лоренц-инвариантность интервала при $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$

$$\xi_t = 0, \qquad \xi_r = 0, \qquad \xi_a = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \Lambda_{lm}(t,r) E_{ab} \partial^b Y_l^m(\theta,\varphi),$$

Лоренц-инвариантность интервала при $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu,$$

- $\xi_t = 0, \qquad \xi_r = 0, \qquad \xi_a = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \Lambda_{lm}(t,r) E_{ab} \partial^b Y_l^m(\theta, \varphi);$
- ∇_μ – ковариантная производная в метрике $g_{\mu\nu}$.

$$h_{0,lm} \to h_{0,lm} + \dot{\Lambda}_{lm}(t,r),$$
$$h_{1,lm} \to h_{1,lm} + \Lambda'_{lm}(t,r) + 2\frac{c'}{c}\Lambda_{lm}(t,r),$$
$$h_{2,lm} \to h_{2,lm} + 2\Lambda_{lm}(t,r).$$

Подход Редже-Уилера при $l \geq 2$

- $h_{2,lm} = 0$;
- $m = 0$ без потери общности.

Лагранжиан возмущений

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{l(l+1)}{4(l-1)(l+2)}\left[\mathcal{A}\dot{q}^2 - \mathcal{B}q'^2 - l(l+1)\mathcal{C}q^2 - V(r)q^2\right],$$

$$\text{где} \qquad \mathcal{A} = \frac{c^2}{a^2}\frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{G}}, \qquad \mathcal{B} = a^2c^2\frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{F}}, \qquad \mathcal{C} = a^2\mathcal{H},$$

- $V(r)$ – эффективный потенциал;
- член, содержащий $\mathcal{C}$, – распространение волн по углам.

Лагранжиан возмущений

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{l(l+1)}{4(l-1)(l+2)} \left[\mathcal{A}\dot{q}^2 - \mathcal{B}q'^2 - l(l+1)\mathcal{C}q^2 - V(r)q^2 \right],$$

$$\text{где} \qquad \mathcal{A} = \frac{c^2}{a^2}\frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{G}}, \qquad \mathcal{B} = a^2 c^2 \frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{F}}, \qquad \mathcal{C} = a^2\mathcal{H},$$

- $V(r)$ – эффективный потенциал;
- член, содержащий $\mathcal{C}$, – распространение волн по углам.

Условия устойчивости

- $\mathcal{F} = 2\left(G_4 + \frac{a^2}{2}\phi' X' G_{5X} - X G_{5\phi}\right) > 0$ – радиальный сектор,

Лагранжиан возмущений

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{l(l+1)}{4(l-1)(l+2)} \left[\mathcal{A}\dot{q}^2 - \mathcal{B}q'^2 - l(l+1)\mathcal{C}q^2 - V(r)q^2\right],$$

$$\text{где} \qquad \mathcal{A} = \frac{c^2}{a^2}\frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{G}}, \qquad \mathcal{B} = a^2c^2\frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{F}}, \qquad \mathcal{C} = a^2\mathcal{H},$$

- $V(r)$ – эффективный потенциал;
- член, содержащий $\mathcal{C}$, – распространение волн по углам.

Условия устойчивости

- $\mathcal{F} = 2\left(G_4 + \frac{a^2}{2}\phi' X' G_{5X} - XG_{5\phi}\right) > 0$ – радиальный сектор,
- $\mathcal{G} = 2\Big[G_4 - 2XG_{4X} + X\left(aa'c'\phi' G_{5X} + G_{5\phi}\right)\Big] > 0$ – духи,

Лагранжиан возмущений

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{l(l+1)}{4(l-1)(l+2)} \left[\mathcal{A}\dot{q}^2 - \mathcal{B}q'^2 - l(l+1)\mathcal{C}q^2 - V(r)q^2\right],$$

$$\text{где} \qquad \mathcal{A} = \frac{c^2}{a^2}\frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{G}}, \qquad \mathcal{B} = a^2c^2\frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{F}}, \qquad \mathcal{C} = a^2\mathcal{H},$$

- $V(r)$ – эффективный потенциал;
- член, содержащий $\mathcal{C}$, – распространение волн по углам.

Условия устойчивости

- $\mathcal{F} = 2\left(G_4 + \frac{a^2}{2}\phi' X' G_{5X} - XG_{5\phi}\right) > 0$ – радиальный сектор,
- $\mathcal{G} = 2\Big[G_4 - 2XG_{4X} + X\left(aa'c'\phi' G_{5X} + G_{5\phi}\right)\Big] > 0$ – духи,
- $\mathcal{H} = 2\left[G_4 - 2XG_{4X} + X\left(a^2\frac{c'}{c}\phi' G_{5X} + G_{5\phi}\right)\right] > 0$ – угловой сектор.

Лагранжиан возмущений

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{l(l+1)}{4(l-1)(l+2)}\left[\mathcal{A}\dot{q}^2 - \mathcal{B}q'^2 - l(l+1)\mathcal{C}q^2 - V(r)q^2\right],$$

где $\mathcal{A} = \frac{c^2}{a^2}\frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{G}}, \quad \mathcal{B} = a^2c^2\frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{F}}, \quad \mathcal{C} = a^2\mathcal{H},$

- $V(r)$ – эффективный потенциал;
- член, содержащий $\mathcal{C}$, – распространение волн по углам.

Условия устойчивости

- $\underline{\mathcal{F} = 2\left(G_4 + \frac{a^2}{2}\phi' X' G_{5X} - XG_{5\phi}\right) > 0}$ – радиальный сектор,
- $\mathcal{G} = 2\Big[G_4 - 2XG_{4X} + X\left(aa'c'\phi' G_{5X} + G_{5\phi}\right)\Big] > 0$ – духи,
- $\mathcal{H} = 2\left[G_4 - 2XG_{4X} + X\left(a^2\frac{c'}{c}\phi' G_{5X} + G_{5\phi}\right)\right] > 0$ – угловой сектор.

Возмущения в чётном секторе (члены, не содержащие E_{ab})

$$\delta\phi = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \delta\phi_{lm}(t,r) Y_l^m(\theta,\varphi), \;\; h_{tt} = a^2 \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} H_{0,lm}(t,r) Y_l^m(\theta,\varphi),$$

$$h_{tr} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} H_{1,lm}(t,r) Y_l^m(\theta,\varphi), h_{rr} = \frac{1}{a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} H_{2,lm}(t,r) Y_l^m(\theta,\varphi),$$

$$h_{ta} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \beta_{lm}\partial_a Y_l^m(\theta,\varphi), \qquad h_{ra} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \alpha_{lm}\partial_a Y_l^m(\theta,\varphi),$$

$$h_{ab} = c^2 \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \left[K_{lm}(t,r)\gamma_{ab} Y_l^m(\theta,\varphi) + G_{lm}(t,r)\overset{\gamma}{\nabla}_a \overset{\gamma}{\nabla}_b Y_l^m(\theta,\varphi)\right].$$

Лоренц-инвариантность интервала при $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu,$$

- ∇_μ – ковариантная производная в метрике $g_{\mu\nu}$.

Разложение калибровочного преобразования

$$\xi_0 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} T_{lm}(t,r) Y_l^m(\theta,\varphi),$$

$$\xi_r = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} R_{lm}(t,r) Y_l^m(\theta,\varphi),$$

$$\xi_a = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \Theta_{lm}(t,r) \partial_a Y_l^m(\theta,\varphi).$$

Калибровочные преобразования возмущений

$$H_{0,lm}(t,r) \to H_{0,lm}(t,r) + \frac{2}{a^2}\dot{T}_{lm}(t,r) - 2\frac{a'}{a}b^2 R_{lm}(t,r)$$

$$H_{1,lm}(t,r) \to H_{1,lm}(t,r) + \dot{R}(t,r) + T'(t,r) - 2\frac{a'}{a}T(t,r)$$

$$H_{2,lm}(t,r) \to H_{2,lm}(t,r) + 2b^2 R'_{lm}(t,r) - 2bb' R_{lm}(t,r)$$

$$\beta_{lm}(t,r) \to \beta_{lm}(t,r) + T_{lm}(t,r) + \dot{\Theta}_{lm}(t,r)$$

$$\alpha_{lm}(t,r) \to \alpha_{lm}(t,r) + R_{lm}(t,r) + \Theta'_{lm}(t,r) - 2\frac{c'}{c}\Theta_{lm}(t,r)$$

$$K_{lm}(t,r) \to K_{lm}(t,r) + 2b^2\frac{c'}{c}R_{lm}(t,r)$$

$$G_{lm}(t,r) \to G_{lm}(t,r) + \frac{2}{c^2}\Theta_{lm}(t,r)$$

- Фиксация калибровки: $\beta(t,r)=0$, $K(t,r)=0$ и $G(t,r)=0$.

Лагранжиан возмущений

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathcal{K}_{ij}\dot{v}^i\dot{v}^j - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{ij}v^{i\prime}v^{j\prime} - \frac{1}{2}\mathcal{Q}_{ij}v^i v^{j\prime} - \frac{1}{2}\mathcal{M}_{ij}v^i v^j,$$

- $i = \overline{1,2}$, $j = \overline{1,2}$;
- $v^1 \equiv \psi$, $v^2 \equiv \delta\phi$;
- $H_0 = -\dfrac{2}{2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi'}\left(\dfrac{1}{a^2}\psi - c'\Xi\,\delta\phi' - l(l+1)c'\mathcal{H}\,\alpha\right)$,
- $$\Xi = 2c^2\Big[-XG_{3X} + 2a^2\frac{c'}{c}\phi'\left\{G_{4X} + 2XG_{4XX} - (XG_{5\phi})_X\right\} + G_{4\phi} + 2XG_{4\phi X} - \frac{1}{c^2}XG_{5X} + a^2\frac{c'^2}{c^2}(3XG_{5X} + 2X^2G_{5XX})\Big].$$

Лагранжиан возмущений

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathcal{K}_{ij}\dot{v}^i\dot{v}^j - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{ij}v^{i\prime}v^{j\prime} - \frac{1}{2}\mathcal{Q}_{ij}v^i v^{j\prime} - \frac{1}{2}\mathcal{M}_{ij}v^i v^j,$$

- $i = \overline{1,2}$, $j = \overline{1,2}$;
- $v^1 \equiv \psi$, $v^2 \equiv \delta\phi$;
- $H_0 = -\dfrac{2}{2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi'}\left(\dfrac{1}{a^2}\psi - c'\Xi\,\delta\phi' - l(l+1)c'\mathcal{H}\,\alpha\right)$,
- $$\Xi = 2c^2\Big[-XG_{3X} + 2a^2\frac{c'}{c}\phi'\left\{G_{4X} + 2XG_{4XX} - (XG_{5\phi})_X\right\} + G_{4\phi} + 2XG_{4\phi X} - \frac{1}{c^2}XG_{5X} + a^2\frac{c'^2}{c^2}(3XG_{5X} + 2X^2G_{5XX})\Big].$$

Условия устойчивости

- $\mathcal{K}_{11} > 0$, $\det\mathcal{K} > 0$ – отсутствие духов.

Лагранжиан возмущений

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathcal{K}_{ij}\dot{v}^i\dot{v}^j - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{ij}v^{i\prime}v^{j\prime} - \frac{1}{2}\mathcal{Q}_{ij}v^i v^{j\prime} - \frac{1}{2}\mathcal{M}_{ij}v^i v^j,$$

- $i = \overline{1,2},\ j = \overline{1,2};$
- $v^1 \equiv \psi,\ v^2 \equiv \delta\phi;$
- $H_0 = -\dfrac{2}{2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi'}\left(\dfrac{1}{a^2}\psi - c'\Xi\,\delta\phi' - l(l+1)c'\mathcal{H}\,\alpha\right),$
- $$\Xi = 2c^2\Big[-XG_{3X} + 2a^2\frac{c'}{c}\phi'\left\{G_{4X} + 2XG_{4XX} - (XG_{5\phi})_X\right\} + G_{4\phi} + 2XG_{4\phi X} - \frac{1}{c^2}XG_{5X} + a^2\frac{c'^2}{c^2}(3XG_{5X} + 2X^2G_{5XX})\Big].$$

Условия устойчивости

- $\mathcal{K}_{11} > 0$, $\underline{\det\mathcal{K} > 0}$ – отсутствие духов.

Условия устойчивости

$$\det \mathcal{K} = \frac{4(l-1)(l+2)\left(2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi'\right)^2 \mathcal{F}\left(2\mathcal{P}_1 - \mathcal{F}\right)}{l(l+1)a^4\mathcal{H}^2\phi'^2\left(2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi'\right)^2} > 0,$$

$$\text{где } \mathcal{P}_1 = \frac{\left(2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi'\right)}{2c^2\mathcal{H}^2} \cdot \frac{d}{dr}\left[\frac{c^4\mathcal{H}^4}{\left(2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi'\right)^2}\right].$$

Условия устойчивости

$$\det \mathcal{K} = \frac{4(l-1)(l+2)\left(2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi'\right)^2 \mathcal{F}\left(2\mathcal{P}_1 - \mathcal{F}\right)}{l(l+1)a^4\mathcal{H}^2\phi'^2\left(2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi'\right)^2} > 0,$$

$$\text{где } \mathcal{P}_1 = \frac{\left(2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi'\right)}{2c^2\mathcal{H}^2} \cdot \frac{d}{dr}\left[\frac{c^4\mathcal{H}^4}{\left(2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi'\right)^2}\right].$$

$$2\mathcal{P}_1 - \mathcal{F} > 0$$

Запрещающая Теорема

Условия устойчивости

- нечётный сектор: $\mathcal{F} > 0$;
- чётный сектор: $2\mathcal{P}_1 - \mathcal{F} > 0$;

$$Q = \frac{2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi'}{c^2\mathcal{H}^2} \;\Rightarrow\; 2\mathcal{P}_1 - \mathcal{F} = -2\frac{Q'}{Q^2} - \mathcal{F} > 0,$$

$$\frac{Q'}{Q^2} < -\frac{1}{2}\mathcal{F} \xrightarrow{\int \text{ от } r \text{ до } r' > r} Q^{-1}(r) - Q^{-1}(r') < -\frac{1}{2}\int\limits_r^{r'}\mathcal{F}\,dr.$$

Запрещающая Теорема

- $Q^{-1}(r) < 0$ при каком-то значении r.

$$Q^{-1}(r') > Q^{-1}(r) + \frac{1}{2}\int\limits_{r}^{r'} \mathcal{F}\, dr;$$

- $Q^{-1}(r') > 0$ при каком-то значении r'.

$$Q^{-1}(r) < Q^{-1}(r') - \frac{1}{2}\int\limits_{r}^{r'} \mathcal{F}\, dr.$$

Если $\int\limits_{r}^{r'} \mathcal{F}\, dr$ расходится при $r \to \pm\infty$, теорема доказана.

Запрещающая Теорема

- $Q^{-1}(r) < 0$ при каком-то значении r.

$$Q^{-1}(r') > Q^{-1}(r) + \frac{1}{2}\int\limits_{r}^{r'} \mathcal{F}\,dr;$$

- $Q^{-1}(r') > 0$ при каком-то значении r'.

$$Q^{-1}(r) < Q^{-1}(r') - \frac{1}{2}\int\limits_{r}^{r'} \mathcal{F}\,dr.$$

Если $\int\limits_{r}^{r'} \mathcal{F}\,dr$ расходится при $r \to \pm\infty$, теорема доказана.

Восстановление ОТО на больших расстояниях от горловины

$$\begin{cases} G_4 \to M_{Pl}^2/2 \\ G_5 \to 0 \end{cases} \quad \text{при } r \to \pm\infty \Rightarrow \mathcal{F} \to M_{Pl}^2. \tag{1}$$

Выводы

- Проведён анализ чётного и нечётного сектора возмущений методом Редже-Уилера при $l \geq 2$, получены условия устойчивости.
- Сформулирована и доказана запрещающая теорема для статических сферически симметричных кротовых нор в теории Хорндески.

Спасибо за внимание!