ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

«ОТСУТСТВИЕ СТАТИЧЕСКИХ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ КРОТОВЫХ НОР В ТЕОРИИ ХОРНДЕСКИ»

Выполнил студент

243м группы:

Евсеев Олег Александрович

____
подпись студента

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук, академик РАН, профессор, зав. кафедрой

Рубаков Валерий Анатольевич

____
подпись научного руководителя

Допущена к защите 19 мая 2018 г.

Зав. кафедрой _______________________________
подпись зав. кафедрой

Москва

2018 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Кротовые норы [1–6] и полузамкнутые миры (мешки) [7–10] – это пространственные конфигурации с горловиной, соединяющей либо два пространства Минковского, либо пространство Минковского с замкнутым пространством, соответственно. Построение таких конфигураций гипотетически возможно только в теориях, нарушающих изотропное условие энергодоминантности (Null Energy Condition, NEC) [1–3, 11–13], заключающееся в том, что тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ подчиняется соотношению

$$T_{\mu\nu}\eta^{\mu}\eta^{\nu} > 0 \tag{1}$$

для любого светоподобного вектора η^{μ}.

Изотропное условие энергодоминантности довольно сложно нарушить так, чтобы в получившейся теории не возникало ни духовых, ни градиентных неустойчивостей. В случае скалярного поля с Лагранжианом, содержащим только первые производные поля по времени и пространтвенным координатам, было показано, что нарушение NEC неизбежно влечёт за собой появление таких неустойчивостей [14]. Этот факт способствует развитию интереса к теориям, содержащим вторые производные поля в Лагранжиане, но лишённым третьих производных в уравнениях движения, поскольку в таких теориях возможно построение стабильных конфигураций, нарушающих NEC [15–20]. Теория Хорндески (обобщённые Галилеоны с модификацией гравитации) – самая общая теория, удовлетворяющая такому свойству: уравнения движения второго порядка, несмотря на вторые производные в Лагранжиане [21]. Эта теория впервые была открыта в незамеченной работе Хорндески в 1974 году [21], переоткрыта в другом контексте уже в 1992 году Д. Б. Фаирли, Й. Говаерцом и А. Морозовым [22–24] и набрала популярность в последние годы [15, 17–19, 25–37].

Теория Хорндески описывается следующим Лагранжианом [15, 21, 28, 38]:

$$S = \int d^4x \sum_{i=2}^{5} \mathcal{L}_i \tag{2}$$

$$\mathcal{L}_2 = K(\phi, X),$$
$$\mathcal{L}_3 = -G_3(\phi, X)\Box\phi,$$
$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X)R + G_{4X}\left[(\Box\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2\right]$$
$$\mathcal{L}_5 = G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi - \frac{1}{6}G_{5X}\left[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3\right],$$

где $X = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi$, $\Box\phi = \nabla_\mu\nabla^\mu\phi$, R – скалярная кривизна, а $G_{\mu\nu}$ – тензор Эйнштейна ($G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$), сигнатура метрики $(-, +, +, +)$.

Как было показано ранее, асимтотически плоские статические сферически симметричные Лоренцевы кротовые норы [39,40] и соответствующие полузамкнутые миры [41] нестабильны в теории $\mathcal{L}_3$ с минимальной связью с гравитацией, т.е. при $G_4 = M_{Pl}^2/2$, $G_5 = 0$.

Целью данной работы является расширение доказательства нестабильности асимтотически плоских статических сферически симметричных Лоренцевых кротовых нор на общий случай теории Хорндески (2). Доказательство аналогичной (с точностью до замены радиальной координаты на время) запрещающей теоремы для космологических решений с отскоком для $\mathcal{L}_3$ было приведено в [42] и обобщено на случай взаимодействия Галилеонного поля с дополнительным скалярным полем [43]. Несколько позже это доказательство было расширено на всю теорию Хорндески [44] и теорию с несколькими Галилеонами [45].

В главе 1 приведены некоторые результаты, полученные Т. Кобаяши, Х. Мотохаши и Т. Суяма [46,47], а именно, некоторые условия устойчивости для теории Хорндески. Кроме того, в этой главе формулируется формализм Редже-Уилера для возмущений метрики и скалярного поля в сферических координатах. Так, в разделе 1.1 рассмотрен нечётный сектор возмущений, а в разделе 1.2 – чётный.

В главе 2, с использованием полученных ранее условий устойчивости, доказана соответствующая запрещающая теорема для кротовых нор в теории Хорндески.

В работе показано, что в теории Хорндески асимтотически плоские статические сферически симметричные Лоренцевы кротовые норы нестабильны либо в духовом, либо в градиентном секторе.

1. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Мы рассматриваем статические сферически симметричные Лоренцевы кротовые норы. Самая общая форма метрики, описывающая их:

$$ds^2 = -a^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{b^2(r)} + c^2(r)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \tag{3}$$

При удобной фиксации калибровки

$$a(r) = b(r) \tag{4}$$

метрика принимает вид:

$$ds^2 = -a^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{a^2(r)} + c^2(r)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right),$$

где при описании кротовой норы функции $a(r)$ и $c(r)$ имеют следующее асимтотическое поведение при $r \to \pm\infty$:

$$a(r) \to 1, \quad c(r) \to r,$$

причём $c(r) > 0$ ограничено снизу, достигая своего минимума в точке $r = 0$, см. рисунок 1.

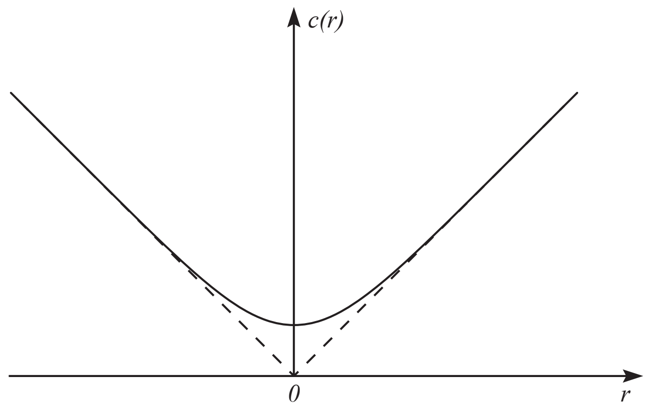

Рисунок 1 – Поведение $c(r)$ для кротовой норы

Т. Кобаяши, Х. Мотохаши и Т. Суяма в своей работе [46,47] получили условия стабильности для возмущений над такой фоновой метрикой, используя разложение по сферическим гармоникам в рамках формализма Редже-Уилера [48–50], описанного ниже.

Мы рассматриваем возмущения метрики $h_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = g^0_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{5}$$

где $g^0_{\mu\nu}$ обозначает фоновую метрику. Возмущения $h_{\mu\nu}$ состоят из h_{tt}, h_{tr} и h_{rr}, являющихся скалярами относительно вращений двумерной сферы, h_{ta} и h_{ra}, представляющих собой векторы относительно тех же вращений, и h_{ab} – тензора ранга $\binom{0}{2}$ относительно вращений сферы S^2. Здесь и далее a и b принимают значения θ или φ. Скалярное поле ϕ также является скаляром относительно вращений двумерной сферы.

Любой скаляр s, вектор V_a и (симметричный) тензор T_{ab} ранга $\binom{0}{2}$ могут быть разложены по сферическим гармоникам следующим образом:

$$s(t,r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} s_{lm}(t,r)Y_l^m(\theta,\varphi), \tag{6}$$

$$V_a(t,r,\theta,\varphi) = \overset{\gamma}{\nabla}_a\Phi_1(t,r,\theta,\varphi) + E_a^b\overset{\gamma}{\nabla}_b\Phi_2(t,r,\theta,\varphi), \tag{7}$$

$$\begin{aligned} T_{ab}(t,r,\theta,\varphi) = {} & \overset{\gamma}{\nabla}_a\overset{\gamma}{\nabla}_b\Psi_1 + \gamma_{ab}\Psi_2(t,r,\theta,\varphi) \\ & + \frac{1}{2}\left(E_a^c\overset{\gamma}{\nabla}_c\overset{\gamma}{\nabla}_b\Psi_3(t,r,\theta,\varphi) + E_b^c\overset{\gamma}{\nabla}_c\overset{\gamma}{\nabla}_a\Psi_3(t,r,\theta,\varphi)\right), \end{aligned} \tag{8}$$

где γ_{ab} – метрика двумерной сферы; $\overset{\gamma}{\nabla}_a$ – ковариантная производная в этой метрике[1]; $E_{ab} = \sqrt{\det\gamma}\,\varepsilon_{ab}$, ε_{ab} – символ Леви-Чивиты, $\varepsilon_{\theta\varphi} = 1$; Φ_1, Φ_2, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 –

[1] Несмотря на то, что символы Кристоффеля для метрики γ_{ab} и для угловой части метрики $g_{\mu\nu}$ совпадают, разница между $\overset{\gamma}{\nabla}_a$ и ∇_a существенна, например при действии на угловую часть четырёхвектора (которая сама по себе является вектором относительно вращений двумерной сферы):

$$\overset{\gamma}{\nabla}_a V_b = \partial_a V_b - \Gamma^c_{ab}V_c,$$

$$\nabla_a V_b = \partial_a V_b - \Gamma^\mu_{ab}V_\mu = \partial_a V_b - \Gamma^t_{ab}V_t - \Gamma^r_{ab}V_r - \Gamma^c_{ab}V_c = \overset{\gamma}{\nabla}_a V_b - \Gamma^t_{ab}V_t - \Gamma^r_{ab}V_r.$$

некоторые скалярные функции; $Y_l^m(\theta,\varphi)$ – сферические функции. Всё вышесказанное позволяет нам переписать любой скаляр, вектор и тензор ранга $\binom{0}{2}$ через сферические гармоники, применяя разложение (6) к функциям Φ_1, Φ_2, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3. Далее мы будем называть члены, не содержащие E_{ab}, «чётными», а остальные – «нечётными». Чётные моды умножаются на фактор $(-1)^l$ при преобразовании чётности $(\theta,\varphi) \to (\pi-\theta, \pi+\varphi)$, в то время как нечётные домножаются на фактор $(-1)^{l+1}$, что (при $l=0$) обусловило их названия.

1.1 Нечётный сектор

Слагаемые, содержащие E_{ab}, для каждого возмущения записываются как

$$\delta\phi = 0, \quad h_{tt} = 0, \quad h_{tr} = 0, \quad h_{rr} = 0, \tag{9}$$

$$h_{ta} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} h_{0,lm}(t,r)E_{ab}\partial^b Y_l^m(\theta,\varphi), \tag{10}$$

$$h_{ra} = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} h_{1,lm}(t,r)E_{ab}\partial^b Y_l^m(\theta,\varphi), \tag{11}$$

$$h_{ab} = \frac{1}{2}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} h_{2,lm}(t,r)\Big[E_a^c \overset{\gamma}{\nabla}_c \overset{\gamma}{\nabla}_b Y_l^m(\theta,\varphi) + E_b^c \overset{\gamma}{\nabla}_c \overset{\gamma}{\nabla}_a Y_l^m(\theta,\varphi)\Big]. \tag{12}$$

Не все эти переменные физичны, поскольку мы можем задействовать Лоренц-инвариантность интервала и, дав 4-вектору координат приращение $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$, занулить некоторые из них. Здесь ξ^μ – инфинитезимальное преобразование, которое в нечётном секторе записывается как

$$\xi_t = 0, \quad \xi_r = 0, \quad \xi_a = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \Lambda_{lm}(t,r)E_{ab}\partial^b Y_l^m(\theta,\varphi), \tag{13}$$

где $\Lambda_{lm}(t,r)$ – произвольные функции времени и r. Возмущения метрики изменяются при таком калибровочном преобразовании следующим образом:

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu, \tag{14}$$

где ∇_μ – ковариантная производная в метрике $g_{\mu\nu}$. Для нечётного сектора находим

$$h_{0,lm} \to h_{0,lm} + \dot{\Lambda}_{lm}(t,r), \tag{15}$$

$$h_{1,lm} \to h_{1,lm} + \Lambda'_{lm}(t,r) + 2\frac{c'}{c}\Lambda_{lm}(t,r), \tag{16}$$

$$h_{2,lm} \to h_{2,lm} + 2\Lambda_{lm}(t,r), \tag{17}$$

где точка обозначает дифференцирование по времени t, а штрих – по радиусу r в сферических координатах. Поскольку выражение для калибровочного преобразования $h_{2,lm}$ не содержит производных, мы можем полностью зафиксировать калибровку, положив $h_{2,lm} = 0$ при $l \geq 2$. Такая фиксация калибровки носит имя Редже-Уилера [48]. Для $l = 1$ h_{ab} обращается в ноль тождественно, поэтому мы вынуждены использовать другое калибровочное условие. Более подробно этот подход описан в [46], а для доказательства запрещающей теоремы нам необходимо только одно условие устойчивости, которое, в частности, можно вывести при $l \geq 2$.

Поскольку мы рассматриваем фиксированные значения l и m, а соответствующие моды возмущений не перемешиваются между собой, далее мы будем опускать индексы l и m во всех формулах. Дополнительное преимущество подхода Редже-Уилера заключается в том, что уравнения движения не зависят от m, поэтому мы можем без потери общности положить $m = 0$ [46, 48, 51]. В таком случае сферические функции переходят в полиномы Лежандра:

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m\big(\cos\theta\big)e^{im\varphi} \xrightarrow[m=0]{} \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}}P_l\big(\cos\theta\big). \tag{18}$$

Действие, разложенное до второго порядка по возмущениям, принимает вид

$$S^{(2)} = \int dtdr\mathcal{L}^{(2)}, \tag{19}$$

где мы проинтегрировали по углам θ и φ. $\mathcal{L}^{(2)}$ здесь определяется формулой

$$\mathcal{L}^{(2)} = a_1 h_0^2 + a_2 h_1^2 + a_3 \left(\dot{h}_1^2 + {h_0'}^2 - 2\dot{h}_1 h_0' + 4\frac{c'}{c}\dot{h}_1 h_0 \right). \tag{20}$$

Коэффициенты в Лагранжиане (20) представлены следующими выражениями:

$$a_1 = \frac{l(l+1)}{2c^2} \left[\frac{d}{dr}\Big(cc'\mathcal{H}\Big) + \frac{(l-1)(l+2)}{2a^2}\mathcal{F} \right], \tag{21}$$

$$a_2 = -\frac{l(l+1)}{2} a^2 \left[\frac{(l-1)(l+2)}{2c^2}\mathcal{G} \right], \tag{22}$$

$$a_3 = \frac{l(l+1)}{4}\mathcal{H}, \tag{23}$$

в которых применены уравнения поля для фонового решения и

$$\mathcal{F} = 2\left(G_4 + \frac{a^2}{2}\phi' X' G_{5X} - X G_{5\phi} \right), \tag{24}$$

$$\mathcal{G} = 2\Big[G_4 - 2XG_{4X} + X\big(aa'c'\phi' G_{5X} + G_{5\phi}\big) \Big], \tag{25}$$

$$\mathcal{H} = 2\left[G_4 - 2XG_{4X} + X\left(a^2\frac{c'}{c}\phi' G_{5X} + G_{5\phi} \right) \right]. \tag{26}$$

Следуя [52], перепишем Лагранжиан (20) в следующем виде:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \left[a_1 - 2\frac{(cc'a_3)'}{c^2} \right] h_0^2 + a_2 h_1^2 + a_3 \left(\dot{h}_1 - h_0' + 2\frac{c'}{c}h_0 \right)^2, \tag{27}$$

или, вводя новое вспомогательное поле q:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \left[a_1 - 2\frac{(cc'a_3)'}{c^2} \right] h_0^2 + a_2 h_1^2 + a_3 \left[2q\left(\dot{h}_1 - h_0' + 2\frac{c'}{c}h_0 \right) - q^2 \right]. \tag{28}$$

Интегрируя по частям и перенося тем самым все производные на q, сделаем h_0 и h_1 вспомогательными полями. Варьируя по h_0 и по h_1, мы приходим к алгебраическим выражениям, из которых h_0 и h_1 находятся в виде

$$h_0 = -\frac{\big(c^2 a_3 q\big)'}{c^2 a_1 - 2\big(cc'a_3\big)'}, \quad h_1 = \frac{a_3}{a_2}\dot{q}. \tag{29}$$

Теперь, подставляя h_0 и h_1 в действие, найдём Лагранжиан, зависящий только от одной переменной q:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{l(l+1)}{4(l-1)(l+2)} \left[\mathcal{A}\dot{q}^2 - \mathcal{B}q'^2 - l(l+1)\mathcal{C}q^2 - V(r)q^2 \right], \tag{30}$$

где

$$\mathcal{A} = \frac{c^2}{a^2}\frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{G}}, \quad \mathcal{B} = a^2 c^2 \frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{F}}, \quad \mathcal{C} = a^2 \mathcal{H}, \tag{31}$$

а $V(r)$ – эффективный потенциал, явный вид которого не существенен для доказательства запрещающей теоремы. Член в Лагранжиане (30), содержащий $\mathcal{C}$, соответствует распространению волн по углам, поскольку содержит множитель $l(l+1)$, т.е., возвращаясь от разложения по сферическим гармоникам к дифференциальным операторам, двумерный Лапласиан.

Таким образом, рассмотрение нечётного сектора даёт нам следующие условия устойчивости:

$\mathcal{F} > 0$, чтобы избежать градиентных нестабильностей по r, (32)

$\mathcal{G} > 0$, чтобы избежать духовых неустойчивостей, (33)

$\mathcal{H} > 0$, чтобы избежать градиентных нестабильностей в угловом секторе. (34)

Как мы увидим в главе 2, условие (32) – единственное из трёх, существенное для доказательства запрещающей теоремы.

1.2 Чётный сектор

Слагаемые, не содержащие E_{ab}, т.е. чётный сектор возмущений [48]:

$$\delta\phi = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \delta\phi_{lm}(t,r) Y_l^m(\theta,\varphi), \qquad h_{tt} = a^2 \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} H_{0,lm}(t,r) Y_l^m(\theta,\varphi), \tag{35}$$

$$h_{tr} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} H_{1,lm}(t,r) Y_l^m(\theta,\varphi), \qquad h_{rr} = \frac{1}{a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} H_{2,lm}(t,r) Y_l^m(\theta,\varphi), \tag{36}$$

$$h_{ta} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \beta_{lm}\partial_a Y_l^m(\theta,\varphi), \qquad h_{ra} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \alpha_{lm}\partial_a Y_l^m(\theta,\varphi), \tag{37}$$

$$h_{ab} = c^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \Big[K_{lm}(t,r) \gamma_{ab} Y_l^m\big(\theta,\varphi\big) + G_{lm}(t,r) \overset{\gamma}{\nabla}_a \overset{\gamma}{\nabla}_b Y_l^m\big(\theta,\varphi\big) \Big]. \tag{38}$$

Здесь следует отметить, что в чётном секторе возмущение присутствует также и у скалярного поля ϕ. Как и в нечётном секторе, некоторые из вышеперечисленных возмущений нефизичны и могут быть откалиброваны соответствующим преобразованием $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$. Ниже приведены три калибровочные функции [48]:

$$\xi_0 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} T_{lm}(t,r) Y_l^m\big(\theta,\varphi\big), \quad \xi_r = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} R_{lm}(t,r) Y_l^m\big(\theta,\varphi\big),$$

$$\xi_a = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \Theta_{lm}(t,r) \partial_a Y_l^m\big(\theta,\varphi\big), \tag{39}$$

где $T_{lm}(t,r)$, $R_{lm}(t,r)$ и $\Theta_{lm}(t,r)$ – произвольные функции t и r. Используя (14), мы вновь находим, как преобразуются под действием калибровки возмущения:

$$H_{0,lm}(t,r) \to H_{0,lm}(t,r) + \frac{2}{a^2}\dot{T}_{lm}(t,r) - 2\frac{a'}{a} b^2 R_{lm}(t,r) \tag{40}$$

$$H_{1,lm}(t,r) \to H_{1,lm}(t,r) + \dot{R}(t,r) + T'(t,r) - 2\frac{a'}{a} T(t,r) \tag{41}$$

$$H_{2,lm}(t,r) \to H_{2,lm}(t,r) + 2b^2 R'_{lm}(t,r) - 2bb' R_{lm}(t,r) \tag{42}$$

$$\beta_{lm}(t,r) \to \beta_{lm}(t,r) + T_{lm}(t,r) + \dot{\Theta}_{lm}(t,r) \tag{43}$$

$$\alpha_{lm}(t,r) \to \alpha_{lm}(t,r) + R_{lm}(t,r) + \Theta'_{lm}(t,r) - 2\frac{c'}{c}\Theta_{lm}(t,r) \tag{44}$$

$$K_{lm}(t,r) \to K_{lm}(t,r) + 2b^2 \frac{c'}{c} R_{lm}(t,r) \tag{45}$$

$$G_{lm}(t,r) \to G_{lm}(t,r) + \frac{2}{c^2}\Theta_{lm}(t,r) \tag{46}$$

Из соображений общности мы не использовали в этих выражениях калибровку метрики (4). Далее мы снова будем опускать индексы l и m, поскольку соответствующие моды возмущений не смешиваются.

Теперь мы можем полностью зафиксировать калибровку, положив $\beta(t,r) = 0$, $K(t,r) = 0$ и $G(t,r) = 0$, и, подставив возмущения метрики и поля в действие (2), получить квадратичный Лагранжиан, зависящий от $\delta\phi$, H_0, H_1, H_2 и α.

Этот подход применим, как и в нечётном секторе, только при $l \geq 2$, поскольку при $l = 1$ возмущение метрики h_{ab} зависит не от K и G по отдельности, а от кобинации $K - G$, что оставляет нам дополнительную степень свободы, которую можно использовать, например, для того чтобы положить $\delta\phi = 0$. При $l = 0$ α, β и G обращаются в ноль тождественно, что делает калибровочное преобразование ξ_a бесполезным. ξ_r можно зафиксировать, положив $K = 0$, а ξ_t можно использовать, чтобы занулить H_0 или H_1. Полностью эти случаи разобраны в [47], а для нашего рассмотрения достаточно случая $l \geq 2$.

В этом случае H_0 и H_1 превращаются во вспомогательные поля и могут быть сразу исключены из Лагранжиана, оставляя его зависящим только от $\delta\phi$, H_2 и α. Кроме этого, остаётся связь, зависящая от $\delta\phi$, $\delta\phi'$, $\delta\phi''$, H_2, H_2', α и α'.

Мы переопределяем поле, используя новую переменную ψ, следующим образом:

$$H_0 = -\frac{2}{2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi'}\left(\frac{1}{a^2}\psi - c'\Xi\,\delta\phi' - l(l+1)c'\mathcal{H}\,\alpha\right), \tag{47}$$

где $\mathcal{H}$ – выражение, определённое в (26),

$$\begin{aligned}\Xi = \; & 2c^2\Big[-XG_{3X} + 2a^2\frac{c'}{c}\phi'\left\{G_{4X} + 2XG_{4XX} - (XG_{5\phi})_X\right\} \\ & + G_{4\phi} + 2XG_{4\phi X} - \frac{1}{c^2}XG_{5X} + a^2\frac{c'^2}{c^2}(3XG_{5X} + 2X^2G_{5XX})\Big].\end{aligned} \tag{48}$$

Такая замена переменных позволяет нам исключить из связи одновременно вторые производные $\delta\phi$ и первые производные α, делая эту связь алгебраическим уравнением на α. Наконец, исключая α, мы приходим к Лагранжиану, зависящему от двух переменных (ψ и $\delta\phi$):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathcal{K}_{ij}\dot{v}^i\dot{v}^j - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{ij}v^{i\prime}v^{j\prime} - \frac{1}{2}\mathcal{Q}_{ij}v^iv^{j\prime} - \frac{1}{2}\mathcal{M}_{ij}v^iv^j, \tag{49}$$

где $v^1 \equiv \psi$, $v^2 \equiv \delta\phi$, а i и j пробегают значения от 1 до 2. Выражения для матриц[1] $\mathcal{G}_{ij}$, $\mathcal{Q}_{ij}$ и $\mathcal{M}_{ij}$ слишком громоздки и, кроме того, не существенны для доказательства теоремы, поэтому не приведены в данной работе. $\mathcal{K}_{ij}$, с другой стороны, даёт

[1]Не следует путать $\mathcal{G}_{ij}$ как матрицу коэффициентов в Лагранжиане (49) и $\mathcal{G}$ из (25).

нам два условия отсутствия духовых неустойчивостей, которые играют определяющую роль в нашем доказательстве. Духи отсутствуют, когда

$$\mathcal{K}_{11} > 0, \qquad \det \mathcal{K} > 0. \tag{50}$$

Мы будем использовать в нашем доказательстве только второе условие:

$$\det \mathcal{K} = \frac{4(l-1)(l+2)\big(2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi'\big)^2 \mathcal{F}\big(2\mathcal{P}_1 - \mathcal{F}\big)}{l(l+1)a^4\mathcal{H}^2\phi'^2\big(2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi'\big)^2} > 0, \tag{51}$$

где $l \geq 2$ и

$$\mathcal{P}_1 = \frac{(2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi')}{2c^2\mathcal{H}^2} \cdot \frac{d}{dr}\left[\frac{c^4\mathcal{H}^4}{\big(2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi'\big)^2}\right], \tag{52}$$

или, учитывая условие (32), просто

$$2\mathcal{P}_1 - \mathcal{F} > 0. \tag{53}$$

2. ЗАПРЕЩАЮЩАЯ ТЕОРЕМА

Условия устойчивости, используемые нами в доказательстве, даются формулами (32) и (53). Введём переменную

$$Q = \frac{2cc'\mathcal{H} + \Xi\phi'}{c^2\mathcal{H}^2},$$

и перепишем (53) в следующей форме:

$$2\mathcal{P}_1 - \mathcal{F} = -2\frac{Q'}{Q^2} - \mathcal{F} > 0,$$

или

$$\frac{Q'}{Q^2} < -\frac{1}{2}\mathcal{F}. \tag{54}$$

Проинтегрировав это выражение от r до $r' > r$, мы получаем (ср. [40]):

$$Q^{-1}(r) - Q^{-1}(r') < -\frac{1}{2}\int\limits_r^{r'}\mathcal{F}\,dr. \tag{55}$$

Пусть $Q^{-1}(r) < 0$ при каком-то значении r. Тогда перепишем (55) следующим образом:

$$Q^{-1}(r') > Q^{-1}(r) + \frac{1}{2}\int\limits_r^{r'}\mathcal{F}\,dr, \tag{56}$$

и заметим, что если определённый интеграл в правой части неравенства (56) расходится при $r' \to +\infty$, то $Q^{-1}(r')$ в какой-то момент должно стать положительным, т.е. $Q^{-1}(r^*) = 0$ в какой-то точке r^*, следовательно, Q сингулярно в этой точке, точнее, на двумерной сфере радиуса r^*.

Аналогично, пусть $Q^{-1}(r') > 0$ при каком-либо значении r', тогда запишем (55) как

$$Q^{-1}(r) < Q^{-1}(r') - \frac{1}{2}\int\limits_r^{r'}\mathcal{F}\,dr, \tag{57}$$

и увидим, что если интеграл расходится при $r \to -\infty$, то $Q^{-1}(r)$ должно в какой-то момент стать отрицательным, что приведёт к сингулярному Q на двумерной сфере радиуса r^*, где r^* задаётся условием $Q^{-1}(r^*) = 0$.

Будем предполагать, что вдали от кротовой норы восстанавливается общая теория относительности:

$$\begin{cases} G_4 \to M_{Pl}^2/2 \\ G_5 \to 0 \end{cases} \text{при } r \to \pm\infty. \tag{58}$$

Выражение (24) тогда приводит к $\mathcal{F}(r) \to M_{Pl}^2$ при $r \to \pm\infty$, т.е. интеграл в формуле (55) расходится как при $r' \to +\infty$, так и при $r \to -\infty$, что завершает доказательство теоремы.

ВЫВОДЫ

В данной работе была рассмотрена теория Хорндески, описывающаяся Лагранжианом (2) в применении к построению стабильных статических сферически симметричных Лоренцевых кротовых нор.

Для получения условий устойчивости конфигурации возмущения над фоновым решением были разложены по сферическим гармоникам и разбиты на «чётные» и «нечётные» моды. Был проведён анализ отдельно чётного и нечётного секторов возмущений для $l \geq 2$ методом Редже-Уилера: для каждого из них были откалиброваны сдвигом $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ нефизические степени свободы, произведена подстановка связей в Лагранжиан возмущений, после чего в нечётном секторе остался Лагранжиан с одной степенью свободы, а в чётном – с двумя.

В работе был воспроизведён результат Т. Кобаяши, Х. Мотохаши и Т. Суяма [46, 47] для условий устойчивости как в чётном, так и в нечётном секторе для мод с $l \geq 2$. На основании полученных условий устойчивости была сформулирована и доказана запрещающая теорема, утверждающая невозможность построения стабильных статических сферически симметричных Лоренцевых кротовых нор в теории Хорндески при условии восстановления общей теории относительности вдали от кротовой норы в обоих соединяемых ею пространствах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Запрещающая теорема, представленная в настоящей работе показывает, что статические сферически симметричные Лоренцевы кротовые норы не могут быть построены в теории Хорндески. Доказанная теорема – достаточно общая и, помимо Лагранжиана теории Хорндески (2), опирается только на расходимость интеграла

$$\int_{r}^{r'} \mathcal{F}\, dr,$$

как при $r \to -\infty$, так и при $r \to +\infty$, требование достаточно естественное, если мы хотим восстановить пространство-время Минковского вдали от кротовой норы в обоих мирах, которые она соединяет.

Чтобы связать наши обозначения со статьёй [40], где аналогичная теорема доказывается для $\mathcal{L}_3$ и минимальной связи с гравитацией, заметим, что в теории кубичного Галилеона ($\mathcal{L}_3$ с минимальной связью), т.е. в теории с $G_4 = M_{Pl}^2/2$, $G_5 = 0$, мы имеем

$$Q = \frac{\mathcal{Q}}{M_{Pl}^2}, \quad \mathcal{F} = M_{Pl}^2,$$

где $\mathcal{Q}$ – переменная, введённая В. Рубаковым в [40]. Таким образом, неравенство (55) полностью согласуется с соответствующим выражением в [40].

Несмотря на всю общность доказанной запрещающей теоремы, остаётся возможность для построения стабильной кротовой норы в расширенной теории Хорндески (beyond Horndeski theory), как это было сделано для случая космологического решения с отскоком [53–56].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] M. S. Morris and K. S. Thorne, Am. J. Phys. Vol.56 (1988) 395. doi:10.1119/1.15620

[2] M. S. Morris, K. S. Thorne and U. Yurtsever, Phys. Rev. Lett. Vol.61 (1988) 1446. doi:10.1103/PhysRevLett.61.1446

[3] M. Visser, "Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking", Woodbury, USA: AIP (1995) 412 p

[4] D. Hochberg and M. Visser, Phys. Rev. D Vol.58 (1998) 044021 doi:10.1103/PhysRevD.58.044021, arXiv:gr-qc/9802046.

[5] I. D. Novikov, N. S. Kardashev and A. A. Shatskiy, Phys. Usp. Vol.50 (2007) 965 [Usp. Fiz. Nauk Vol.177 (2007) 1017]. doi:10.1070/PU2007v050n09ABEH006381

[6] A. Shatskiy, I. D. Novikov and N. S. Kardashev, Phys. Usp. Vol.51 (2008) 457 doi:10.1070/PU2008v051n05ABEH006581, arXiv:0810.0468 [gr-qc].

[7] V. P. Frolov, M. A. Markov and V. F. Mukhanov, Phys. Rev. D Vol.41 (1990) 383 doi:10.1103/PhysRevD.41.383.

[8] E. I. Guendelman, Int. J. Mod. Phys. D Vol.19 (2010) 1357 doi:10.1142/S021827181001724X, arXiv:1003.3975 [gr-qc].

[9] S. V. Chernov and V. I. Dokuchaev, Class. Quant. Grav. Vol.25 (2008) 015004 doi:10.1088/0264-9381/25/1/015004, arXiv:0709.0616 [gr-qc].

[10] V. I. Dokuchaev and S. V. Chernov, JETP Lett. Vol.85 (2007) 595 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. Vol.85 (2007) 727] doi:10.1134/S0021364007120016, arXiv:1208.5249 [gr-qc].

[11] M. Visser, Phys. Rev. D Vol.39 (1989) 3182
doi:10.1103/PhysRevD.39.3182, arXiv:0809.0907 [gr-qc].

[12] M. Visser, Nucl. Phys. B Vol.328 (1989) 203
doi:10.1016/0550-3213(89)90100-4, arXiv:0809.0927 [gr-qc].

[13] J. L. Friedman, K. Schleich and D. M. Witt, Phys. Rev. Lett. Vol.71 (1993) 1486
Erratum: [Phys. Rev. Lett. Vol.75 (1995) 1872]
doi:10.1103/PhysRevLett.75.1872, doi:10.1103/PhysRevLett.71.1486,
arXiv:gr-qc/9305017.

[14] S. Dubovsky, T. Gregoire, A. Nicolis and R. Rattazzi, JHEP Vol.0603 (2006) 025
doi:10.1088/1126-6708/2006/03/025, arXiv:hep-th/0512260.

[15] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, Phys. Rev. D Vol.79 (2009) 064036
doi:10.1103/PhysRevD.79.064036, arXiv:0811.2197 [hep-th].

[16] P. Creminelli, A. Nicolis and E. Trincherini, JCAP Vol.1011 (2010) 021
doi:10.1088/1475-7516/2010/11/021, arXiv:1007.0027 [hep-th].

[17] G. Goon, K. Hinterbichler and M. Trodden, Phys. Rev. Lett. Vol.106 (2011) 231102
doi:10.1103/PhysRevLett.106.231102, arXiv:1103.6029 [hep-th].

[18] G. Goon, K. Hinterbichler and M. Trodden, JCAP Vol.1107 (2011) 017
doi:10.1088/1475-7516/2011/07/017, arXiv:1103.5745 [hep-th].

[19] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, Prog. Theor. Phys. Vol.126 (2011) 511
doi:10.1143/PTP.126.511, arXiv:1105.5723 [hep-th].

[20] V. A. Rubakov, Phys. Usp. Vol.57 (2014) 128 [Usp. Fiz. Nauk Vol.184 (2014) no.2, 137]
doi:10.3367/UFNe.0184.201402b.0137, arXiv:1401.4024 [hep-th].

[21] G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. Vol.10 (1974) 363
doi:10.1007/BF01807638.

[22] D. B. Fairlie, J. Govaerts and A. Morozov, Nucl. Phys. B Vol.373 (1992) 214
doi:10.1016/0550-3213(92)90455-K, arXiv:hep-th/9110022.

[23] D. B. Fairlie and J. Govaerts, Phys. Lett. B Vol.281 (1992) 49
doi:10.1016/0370-2693(92)90273-7, arXiv:hep-th/9202056.

[24] D. B. Fairlie and J. Govaerts, J. Math. Phys. Vol.33 (1992) 3543
doi:10.1063/1.529904, arXiv:hep-th/9204074.

[25] G. R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, Phys. Lett. B Vol.485 (2000) 208
doi:10.1016/S0370-2693(00)00669-9, arXiv:hep-th/0005016.

[26] M. A. Luty, M. Porrati and R. Rattazzi, JHEP Vol.0309 (2003) 029
doi:10.1088/1126-6708/2003/09/029, arXiv:hep-th/0303116.

[27] A. Nicolis and R. Rattazzi, JHEP Vol.0406 (2004) 059
doi:10.1088/1126-6708/2004/06/059, arXiv:hep-th/0404159.

[28] C. Deffayet, G. Esposito-Farese and A. Vikman, Phys. Rev. D Vol.79 (2009) 084003
doi:10.1103/PhysRevD.79.084003, arXiv:0901.1314 [hep-th].

[29] C. de Rham and A. J. Tolley, JCAP Vol.1005 (2010) 015
doi:10.1088/1475-7516/2010/05/015, arXiv:1003.5917 [hep-th].

[30] K. Kamada, T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, Phys. Rev. D Vol.83 (2011) 083515
doi:10.1103/PhysRevD.83.083515, arXiv:1012.4238 [astro-ph.CO].

[31] E. Babichev, C. Deffayet and R. Ziour, Int. J. Mod. Phys. D Vol.18 (2009) 2147
doi:10.1142/S0218271809016107, arXiv:0905.2943 [hep-th].

[32] C. Deffayet, O. Pujolas, I. Sawicki and A. Vikman, JCAP Vol.1010 (2010) 026 doi:10.1088/1475-7516/2010/10/026, arXiv:1008.0048 [hep-th].

[33] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, Phys. Rev. Lett. Vol.105 (2010) 231302
doi:10.1103/PhysRevLett.105.231302, arXiv:1008.0603 [hep-th].

[34] O. Pujolas, I. Sawicki and A. Vikman, JHEP Vol.1111 (2011) 156 doi:10.1007/JHEP11(2011)156, arXiv:1103.5360 [hep-th].

[35] C. Charmousis, E. J. Copeland, A. Padilla and P. M. Saffin, Phys. Rev. D Vol.85 (2012) 104040
doi:10.1103/PhysRevD.85.104040, arXiv:1112.4866 [hep-th].

[36] R. Kolevatov, Phys. Rev. D Vol.92 (2015) no.12, 123532 doi:10.1103/PhysRevD.92.123532, arXiv:1508.00046 [hep-th].

[37] R. Kolevatov, S. Mironov, V. Rubakov, N. Sukhov and V. Volkova, Phys. Rev. D Vol.96 (2017) no.12, 125012
doi:10.1103/PhysRevD.96.125012, arXiv:1708.04262 [hep-th].

[38] C. Deffayet, X. Gao, D. A. Steer and G. Zahariade, Phys. Rev. D Vol.84 (2011) 064039
doi:10.1103/PhysRevD.84.064039, arXiv:1103.3260 [hep-th].

[39] V. A. Rubakov, Teor. Mat. Fiz. Vol.187 (2016) no.2, 338 [Theor. Math. Phys. Vol.187 (2016) no.2, 743]
doi:10.1134/S004057791605010X, arXiv:1509.08808 [hep-th].

[40] V. A. Rubakov, Theor. Math. Phys. Vol.188 (2016) no.2, 1253 [Teor. Mat. Fiz. Vol.188 (2016) no.2, 337]
doi:10.1134/S0040577916080080, arXiv:1601.06566 [hep-th].

[41] O. A. Evseev and O. I. Melichev, Phys. Rev. D Vol.96 (2017) no.2, 024030 doi:10.1103/PhysRevD.96.024030, arXiv:1607.01721 [hep-th].

[42] M. Libanov, S. Mironov and V. Rubakov, JCAP Vol.1608 (2016) no.08, 037 doi:10.1088/1475-7516/2016/08/037, arXiv:1605.05992 [hep-th].

[43] R. Kolevatov and S. Mironov, Phys. Rev. D Vol.94 (2016) no.12, 123516 doi:10.1103/PhysRevD.94.123516, arXiv:1607.04099 [hep-th].

[44] T. Kobayashi, Phys. Rev. D Vol.94 (2016) no.4, 043511 doi:10.1103/PhysRevD.94.043511, arXiv:1606.05831 [hep-th].

[45] S. Akama and T. Kobayashi, Phys. Rev. D Vol.95 (2017) no.6, 064011 doi:10.1103/PhysRevD.95.064011, arXiv:1701.02926 [hep-th].

[46] T. Kobayashi, H. Motohashi and T. Suyama, Phys. Rev. D Vol.85 (2012) 084025 Erratum: [Phys. Rev. D Vol.96 (2017) no.10, 109903] doi:10.1103/PhysRevD.96.109903, doi:10.1103/PhysRevD.85.084025, arXiv:1202.4893 [gr-qc].

[47] T. Kobayashi, H. Motohashi and T. Suyama, Phys. Rev. D Vol.89 (2014) no.8, 084042 doi:10.1103/PhysRevD.89.084042, arXiv:1402.6740 [gr-qc].

[48] T. Regge and J. A. Wheeler, Phys. Rev. Vol.108 (1957) 1063. doi:10.1103/PhysRev.108.1063

[49] F. J. Zerilli, Phys. Rev. Lett. Vol.24 (1970) 737. doi:10.1103/PhysRevLett.24.737

[50] H. Motohashi and T. Suyama, Phys. Rev. D Vol.84 (2011) 084041 doi:10.1103/PhysRevD.84.084041, arXiv:1107.3705 [gr-qc].

[51] A. Ganguly, R. Gannouji, M. Gonzalez-Espinoza and C. Pizarro-Moya, arXiv:1710.07669 [gr-qc].

[52] A. De Felice, T. Suyama and T. Tanaka, Phys. Rev. D Vol.83 (2011) 104035 doi:10.1103/PhysRevD.83.104035, arXiv:1102.1521 [gr-qc].

[53] P. Creminelli, D. Pirtskhalava, L. Santoni and E. Trincherini, JCAP Vol.1611 (2016) no.11, 047 doi:10.1088/1475-7516/2016/11/047, arXiv:1610.04207 [hep-th].

[54] Y. Cai, Y. Wan, H. G. Li, T. Qiu and Y. S. Piao, JHEP Vol.1701 (2017) 090 doi:10.1007/JHEP01(2017)090, arXiv:1610.03400 [gr-qc].

[55] Y. Cai and Y. S. Piao, JHEP Vol.1709 (2017) 027 doi:10.1007/JHEP09(2017)027, arXiv:1705.03401 [gr-qc].

[56] R. Kolevatov, S. Mironov, N. Sukhov and V. Volkova, JCAP Vol.1708 (2017) no.08, 038 doi:10.1088/1475-7516/2017/08/038, arXiv:1705.06626 [hep-th].