ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА"

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КУРСОВАЯ РАБОТА

Вращающиеся бозе-звёзды

Выполнила студентка
212 группы
Пушная Е.К.
Научный руководитель:
с.н.с. ОТФ ИЯИ РАН,
кандидат физ.-мат. наук Левков Д.Г.

Москва
2018 г.

Содержание

1 Введение

Исследования движения звёзд во Вселенной показывают, что на них влияет невидимая тёмная материя, гравитационное поле которой во много раз превосходит поле видимой. Поэтому изучение тёмной материи вызывает огромный интерес. Так, одним из кандидатов на частицу подобной материи является сверхлёгкий аксион; его масса должна составлять порядка $2.6 * 10^{-5} eV$. [1]

Спин аксионов 0, так что они бозоны [2] и могут образовывать бозе-конденсат, который собирается в бозе-звёзды, тугие гравитационно-связанные объекты. [3] Описание поведения бозе-конденсата можно найти в третьей главе [4].

В данной работе мы собираемся выяснить, как будут выглядеть бозе-звёзды в двух и трёх пространственных измерениях, как описать и проанализировать их вращение, а также стабильны ли они.

2 Постановка задачи

Если описывать бозе-конденсат волновой функцией ϕ, можно нормировать её на число частиц: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\phi|^2 d^n x = N$, а значит, $|\phi|^2$ приобретает простой физический смысл; это плотность частиц в данной точке пространства, n. Волновая функция удовлетворяет уравнению Шрёдингера:

$$i\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\Delta\phi + \Phi\phi, \tag{1}$$

Где использована система единиц с $\hbar = 1$. $\Delta\Phi = 4\pi G\rho(x_n)$ - гравитационный потенциал конденсата. Мы предполагаем, что звезда стационарна. Тогда решение можно записать в виде:

$$\phi = \phi_0(r, \theta)e^{-i\mathcal{E}t}e^{il\varphi}, \tag{2}$$

ϕ_0 действительно. Для двухмерной бозе-звезды всё совершенно аналогично, с той лишь разницей, что ϕ_0 зависит только от r.

Выразим плотность потока конденсата:

$$j = \frac{i}{2m}\left(\phi\nabla\phi^* - \phi^*\nabla\phi\right). \tag{3}$$

Подставляя в выражение потока $\phi = \phi_0 e^{iQ}$, получаем

$$j = \frac{1}{m}\phi_0^2\nabla(Q), \tag{4}$$

Так что для скорости сверхтекучего движения, $v = j/\phi_0^2$

$$rotv = 0. \tag{5}$$

Мы пришли к важной особенности сверхтекучей жидкости: потенциальности её течения. Она нарушается лишь при возникновении квантовых вихревых нитей: в тех точках, где фаза волновой функции плохо определена, т.е. где ϕ обращается в ноль. Поэтому в решениях для вращающегося бозе-конденсата мы ожидаем увидеть вихрь: точку в звезде, где плотность частиц нулевая. Наша задача - найти профиль бозе-звезды при различных значениях l, а также исследовать полученные решения на стабильность.

3 Невращающиеся бозе-звёзды в 3+1 измерениях

Найдём профиль невращающейся бозе-звезды в трёх пространственных измерениях. Для этого необходимо привести уравнения к иному виду. Подставляя (2) в (1), получаем стационарное уравнение Шрёдингера для невращающейся бозе-звезды:

$$\frac{\Delta}{2m}\phi_0 = \left(-\mathcal{E} + \Phi\right)\phi_0, \tag{6a}$$

$$\Delta\Phi = 4\pi G m \phi_0^2. \tag{6b}$$

Нужно, однако, как-то избавиться от констант. Для этого мы вводим новые переменные: $\Phi' = N_0\Phi$, $\phi_0' = N_1\phi_0$, и делаем координатное преобразование

$r' = \frac{r}{mv_0}$; N_0, N_1 и v_0 - постоянные. Выбирая $N_0 = \frac{1}{2\mathcal{E}}$, $N_1 = \pi G/\mathcal{E}^2$ и $v_0 = 1/(2m^3\mathcal{E})$, получаем

$$\Delta\phi_0 = (-1 + 2\Phi)\,\phi_0, \tag{7a}$$

$$\Delta\Phi = \phi_0^2, \tag{7b}$$

Штрихи опущены из эстетических соображений. Чтобы решение (2) было регулярным в нуле, необходимо, чтобы поля имели разложения $\phi_0 = c_1 + c_2r^2 + c_5r^4...$, $\Phi = r^2(c_3 + c_4r^2 + c_6r^4...)$.

Далее вводим обозначения

$$y_0 = \phi_0, \tag{8a}$$

$$y_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi_0}{\partial r}, \tag{8b}$$

$$y_2 = \Phi_1 = \frac{\Phi}{r^2}, \tag{8c}$$

$$y_3 = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}. \tag{8d}$$

Из уравнений (4) получаем систему, которую будем решать численно:

$$y_0' = ry_1, \tag{9a}$$

$$ry_1' = \left(-1 + 2y_2r^2\right)y_0 - 3y_1, \tag{9b}$$

$$y_2' = ry_3, \tag{9c}$$

$$r^3y_3' = y_0^2 - 6y_2 - 7r^2y_3, \tag{9d}$$

Начальные условия

$$y_1(0) = 2c_2 = -\frac{c1}{3}, \tag{10a}$$

$$y_2(0) = c_3 = \frac{c_1^2}{6}, \tag{10b}$$

$$y_3(0) = 2c_4 = -\frac{c_1^2}{30} \tag{10c}$$

Включают одну неопределённую константу c_1. Решать задачу будем методами перестрелки и Булирша-Штёра [5]: c_1 подберём так, чтобы ϕ_0 и Φ имели нужные асимптотики на бесконечности, а $N = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\phi|^2 d^n x$ существовал. На графике представлен профиль бозе-звезды. Он совпадает с результатом [3] с точностью до перешкалировки, так что методу, используемому в данной работе, можно доверять.

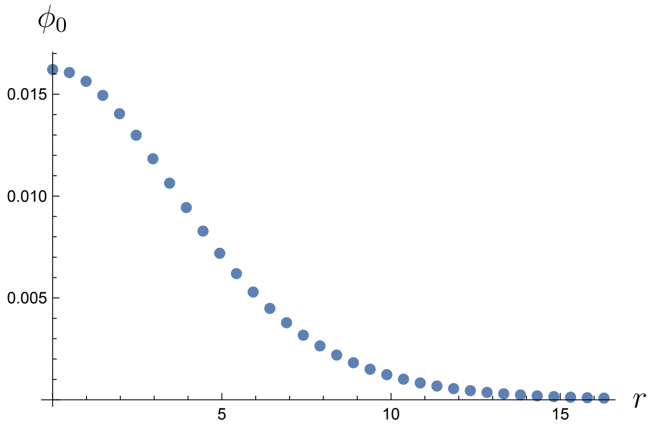


Рис. 1: Профиль трёхмерной бозе-звезды

4 Вращающиеся бозе-звёзды в 2+1 измерениях

В двумерном пространстве можно решить (1) теми же методами, сделав такие же замены. Мы добавим лишь

$$\phi_0 = r^l \phi_1, \tag{11}$$

И получим для l=0:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} = \left(-1 + 2\Phi_1 r^2\right)\phi_1, \tag{12a}$$

$$4\Phi_1 + 5r\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} = \phi_1^2. \tag{12b}$$

Для l=1:

$$\frac{3}{r}\frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2}, = \left(-1 + 2\Phi_1 r^4\right)\phi_1, \tag{13a}$$

$$16\Phi_1 + 9r\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} = \phi_1^2. \tag{13b}$$

l=2:

$$\frac{5}{r}\frac{\partial\phi_1}{\partial r}+\frac{\partial^2\phi_1}{\partial r^2},=\left(-1+2\Phi_1 r^6\right)\phi_1, \tag{14a}$$

$$36\Phi_1+13r\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2}=\phi_1^2. \tag{14b}$$

У изолированной бозе-звезды ϕ_0 стремится к нулю при больших r. Выясним, какие начальные условия нужно выбрать. Подставим $\phi_1 = c_1 + c_2 r^2$, $\Phi_1 = c_3 + c_4 r^2$ в уравнения (12-14). Получаем, для l=0:

$$2c_2 = -\frac{c1}{2}, \tag{15a}$$

$$c_3 = \frac{c_1^2}{4}, \tag{15b}$$

$$2c_4 = \frac{c_1^2}{16}. \tag{15c}$$

Для $l = 1$:

$$2c_2 = -\frac{c_1}{4}, \tag{16a}$$

$$c_3 = \frac{c_1^2}{16}, \tag{16b}$$

$$2c_4 = \frac{c_1^2}{72}. \tag{16c}$$

Для $l = 2$:

$$2c_2 = -\frac{c1}{6}, \tag{17a}$$

$$c_3 = \frac{c_1^2}{36}, \tag{17b}$$

$$2c_4 = \frac{c_1^2}{192}. \tag{17c}$$

Делаем аналогичные замены переменных

$$y_0 = \phi_1, \tag{18a}$$

$$y_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi_1}{\partial r}, \tag{18b}$$

$$y_2 = \Phi_1 = \frac{\Phi}{r^2}, \tag{18c}$$

$$y_3 = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}. \tag{18d}$$

Получаем

$$y_0' = r y_1, \tag{19a}$$

$$r y_1' = (-1 + 2 y_2 r^{2l+2}) y_0 - 2(l+1) y_1, \tag{19b}$$

$$y_2' = r y_3, \tag{19c}$$

$$r^3 y_3' = y_0^2 - 4(l+1)^2 y_2 - (4l+6) r^2 y_3 \tag{19d}$$

Начальные условия для y_i следуют из уравнений (15-18). В них входит неопределённая константа c_1, которую мы используем как параметр перестрелки. Получены решения для $l = 0, 1, 2$:

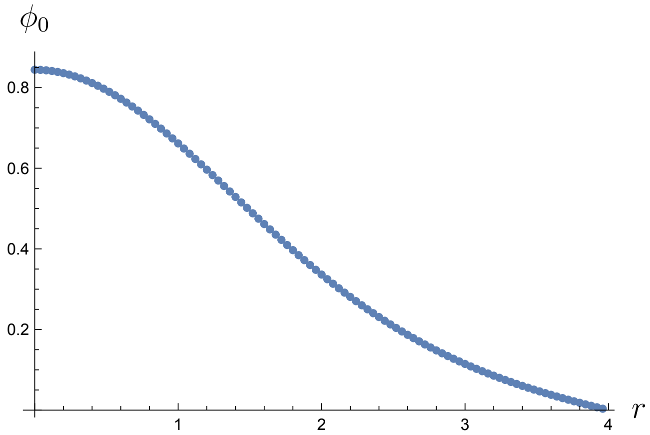


Рис. 2: Профиль бозе-звезды при l=0

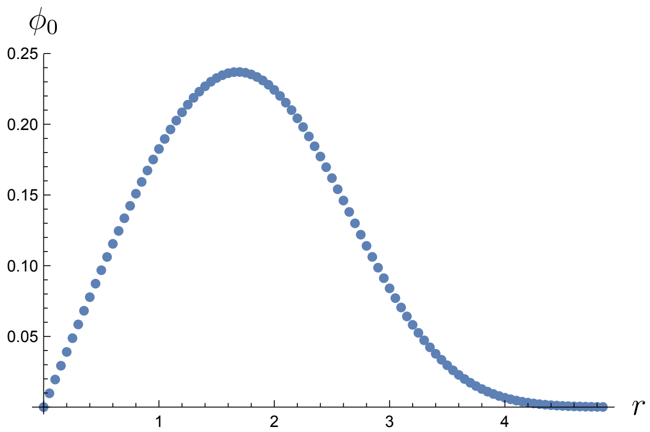


Рис. 3: Профиль бозе-звезды при l=1

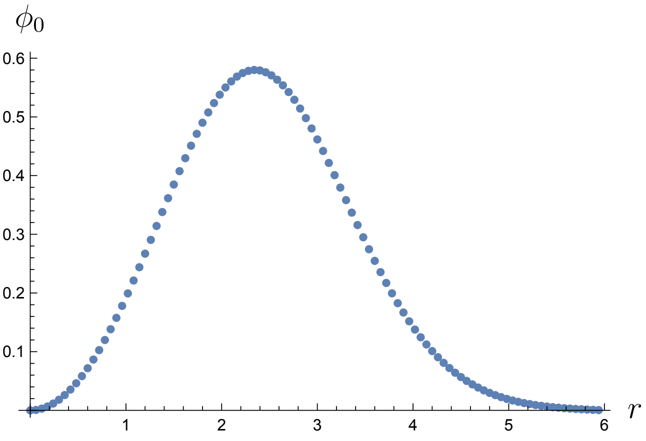


Рис. 4: Профиль бозе-звезды при l=2

5 Стабильность бозе-звёзд

Уравнение (1) можно записать в гамильтоновом виде подобно тому, как это сделали Захаров и Кузнецов в [6]:

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\phi^*}, \tag{20a}$$

$$H = \frac{1}{2}\int d^n x \left[|\nabla\phi|^2 + 2\Phi|\phi|^2\right]. \tag{20b}$$

Этот формализм можно обобщить, чтобы из условия экстремума гамильтониана (17b) получалось уравнение Пуассона. Тогда потребуется добавить в H ещё один член:

$$H = \frac{1}{2}\int d^n x \left[|\nabla\phi|^2 + (\nabla\Phi)^2 + 2\Phi|\phi|^2\right]. \tag{21}$$

Отсюда следует, что решение стационарного уравнения Шрёдингера эквивалентно нахождению эстремума функционала

$$F = \frac{1}{2}\int d^n x \left[|\nabla\phi|^2 + (\nabla\Phi)^2 + 2\Phi|\phi|^2 + \lambda^2|\phi|^2\right]. \tag{22}$$

Последнее слагаемое добавлено из следующих соображений. Нам требуется минимизировать H, сохраняя число частиц $N = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\phi|^2 d^n x$ неизменным, поэтому мы вводим множитель Лагранжа λ^2. Находя вариацию (20) по ϕ^*, получаем уравнение $\lambda^2 = -E$.

Будем исследовать полученные решения на устойчивость, анализируя, минимизируют ли они энергию. Для определённости рассмотрим случай 2D-пространства. Найдём вторую вариацию (22) и потребуем, чтобы она была положительна. Будем работать с возмущением

$$\phi = [\phi_0(r) + u(r,\varphi,t) + iv(r,\varphi,t)]\, e^{-i\mathcal{E}t} e^{il\varphi}, \tag{23a}$$

$$\Phi = \Phi_0 + f, \tag{23b}$$

$$f = \Delta^{-1}(2\phi_0 u + u^2 + v^2). \tag{23c}$$

Получаем

$$2\delta^2 F = \int d^n x \left[uL_1u + vL_0v - 2u\frac{l}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}v + 2v\frac{l}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}u \right], \tag{24a}$$

$$L_0 = -\Delta + \lambda^2 + 2\Phi + \frac{l^2}{r^2}, \tag{24b}$$

$$L_1 = -\Delta + \lambda^2 + 2\Phi + \frac{l^2}{r^2} + 4\phi_0\Delta^{-1}\phi_0. \tag{24c}$$

Пусть $c = 2l/r^2$. При $l = 0$ вклады от u и v независимы, и бозе-звезда стабильна, если удовлетворяет критерию Вахитова-Колоколова [6] $\frac{\partial N}{\partial \mathcal{E}} < 0$.
При $l > 0$ имеем

$$2\delta^2 F = \int d^n x \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 & -c\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ c\frac{\partial}{\partial\varphi} & L_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Задача, таким образом, сводится к отысканию собственных значений оператора B. Если все они положительны, звезда стабильна. Будем работать в секторах 0,1,-1. u и v представим в виде:

$$u = a_{-1}e^{-i\varphi} + a_0 + a_1 e^{i\varphi}, \tag{26a}$$

$$v = b_{-1}e^{-i\varphi} + b_0 + b_1 e^{i\varphi}. \tag{26b}$$

Спектры остаются в изолированных секторах, так как L_1 и L_0 не содержат явной зависимости от φ. Получаем следующую спектральную задачу. Критерием стабильности является положительность собственных значений B.

$$L_1 a_0 = E a_0 + \Lambda \phi_0, \tag{27a}$$

$$L_0 b_0 = E b_0, \tag{27b}$$

$$L_1 a_1 - i c b_1 = E a_1, \tag{27c}$$

$$L_1 a_{-1} + i c b_{-1} = E a_{-1}, \tag{27d}$$

$$L_0 b_1 + i c a_1 = E b_1, \tag{27e}$$

$$L_0 b_{-1} - i c a_{-1} = E b_{-1}. \tag{27f}$$

Здесь Λ - множитель Лагранжа, определяемый из условия $\langle a_0|\phi_0\rangle = 0$. Такое требование обусловлено тем, что мы не рассматриваем произвольные возмущения: только такие, которые сохраняют число частиц.

a_0 и b_0 можно считать вещественными. Сделав замену $a_1 = x_1 + i y_1$, $b_1 = x_2 + i y_2$, приходим к уравнениям

$$L_1 x_1 + c y_2 = E x_1, \tag{28a}$$

$$L_1 y_1 - c x_2 = E y_1, \tag{28b}$$

$$L_0 x_2 - c y_1 = E x_2, \tag{28c}$$

$$L_0 y_2 + c x_1 = E y_2. \tag{28d}$$

Легко убедиться, что похожая подстановка для a_{-1} и b_{-1} приводит к тем же результатам. Таким образом, при анализе невращающейся бозе-звезды следует работать с уравнениями (27ab), а при рассмотрении вращающейся обратиться к системе

$$L_0 a_0 = E a_0 + \Lambda \phi_0, \tag{29a}$$

$$L_1 b_0 = E b_0, \tag{29b}$$

$$L_1 x_1 + c y_2 = E x_1, \tag{29c}$$

$$L_1 y_1 - c x_2 = E y_1, \tag{29d}$$

$$L_0 x_2 - c y_1 = E x_2, \tag{29e}$$

$$L_0 y_2 + c x_1 = E y_2. \tag{29f}$$

Данную систему можно решить численно, причём (29ab) и (29cdef) решаются независимо. От решений остаётся потребовать, чтобы на бесконечности возмущения обращались в ноль, также как $\langle a_0|\phi_0\rangle$. Значения энергии, при которых это выполняется, и есть искомый спектр. Наличие хотя бы одного отрицательного значения указывает на нестабильность.

Рассмотрим подробнее нахождение спектра (29ab). Как и ϕ_0, a_0 и b_0 имеют в нуле разложения вида $r^l(c_1 + c_2 r^2 + c_3 r^4 ...)$. Получается три произвольных параметра: значение Λ, а также c_1 для a_0 и b_0. Есть, кроме того, три требования: $a_0(\infty) = 0$, $b_0(\infty) = 0$, $f = 2\pi \int_0^{+\infty} a_0 \phi_0 r dr = 0$. Получим три решения данной системы при различных начальных условиях:

$$c_{1a} = 1, 0, 0; \tag{30a}$$

$$c_{1b} = 0, 1, 0; \tag{30b}$$

$$\Lambda = 0, 0, 1. \tag{30c}$$

Обозначим решения для случаев 1,2,3 в виде

$$\phi_i = \begin{pmatrix} a_{0i}(s) \\ b_{0i}(s) \\ f_i(s) \end{pmatrix}, \tag{31}$$

где s - некоторое достаточно большое значение r. Искомое решение, которое удовлетворяет всем трём граничным условиям на бесконечности, есть линейная комбинация полученных:

$$\begin{pmatrix} a_0(s) \\ b_0(s) \\ f(s) \end{pmatrix} = k_1\phi_1 + k_2\phi_2 + k_3\phi_3 = 0. \tag{32}$$

Система разрешима тогда и только тогда, когда

$$q_E = det\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a_{01}(s) & a_{02}(s) & a_{03}(s) \\ b_{01}(s) & b_{02}(s) & b_{03}(s) \\ f_1(s) & f_2(s) & f_3(s) \end{pmatrix} = 0. \tag{33}$$

Таким образом, варьируя E и получая три решения для каждого значения, мы сможем увидеть, в каких точках q_E пересекает ноль. Эти точки и будут искомым спектром. Наличие хотя бы одного отрицательного значения E, при котором q_E обращается в ноль, указывает на нестабильность бозе-звезды.

Введём аналогично детерминант 4x4 s_E для системы (28cdef).

Обратимся к анализу решения, полученного для $l = 0$:

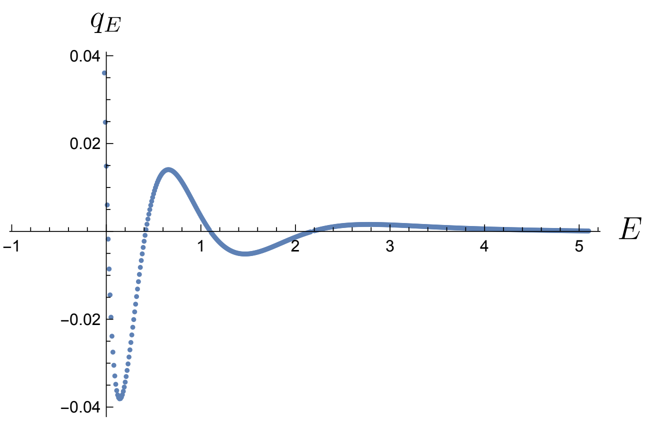
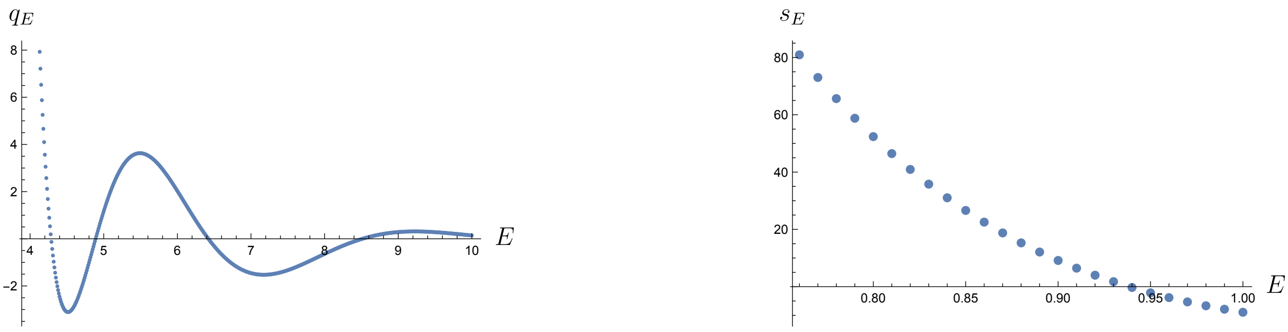


Рис. 5: Зависимость параметра системы от энергии при l=0. Энергии, при которых q_E обращается в ноль - искомый спектр

Отрицательных мод в результате не было обнаружено, так что при $l = 0$ бозе-звезда стабильна.

l=1:



(a) (b)

Рис. 6: Зависимость параметров системы от энергии при l=1. Отрицательных значений нет.

l=2:

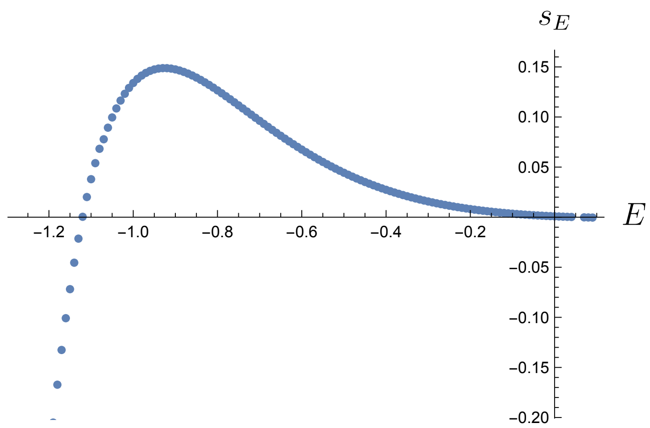


Рис. 7: Зависимость s_E от энергии при l=2.

Среди вращающихся бозе-звёзд в 2D, таким образом, стабильны лишь звёзды с орбитальным моментом $l = 1$.

6 Заключение

- Получены профили невращающейся бозе-звезды в 3D и вращающихся звезд в 2D.
- Изучена стабильность этих объектов.
- Показано, что все невращающиеся бозе-звёзды стабильны.
- Двумерные вращающиеся бозе-звезды с l=1 стабильны, а с l=2 - нестабильны.

7 Список литературы

[1] Vincent B. Klaer, Guy D. Moore "The dark-matter axion mass 2017 JCAP 1711 (2017) no.11, 049 arXiv: 1708.07521 [hep-ph]

[2] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теоретическая физика, том 3 "Квантовая Механика. Нерелятивистская теория"

[3] D.G. Levkov, A.G. Panin and I.I. Tkachev, "Relativistic axi ons from collapsing Bose stars Phys. Rev. Lett. 118 (2017) no.1, 011301 [arXiv:1609.03611]

[4] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теоретическая физика, том 9 "Статистическая Физика. Часть 2"

[5] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, "Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing". Third edition, C++.

[6] В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов, "Солитоны и коллапсы: два сценария эволюции нелинейных волновых систем," Успехи Физических Наук, том 182, no 6, июнь 2012