ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

«ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НЕКОТОРЫХ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ»

Выполнила студент
443 группы
Лысухина Анастасия Владимировна

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
Белокуров Владимир Викторович

Допущена к защите
Зав.кафедрой

Москва
2017

Содержание

1 Введение **2**

2 Уравнение Риккати **4**

2.1 Факторизация гамильтониана. Уравнение Риккати 4

2.2 Общие сведения об каноническом уравнении Риккати 5

2.3 Связь преобразований уравнения Риккати с производной Шварца 6

2.4 Преобразования уравнения Риккати для потенциала Морса . . 7

2.5 Некоторые общие преобразования уравнения Риккати 9

3 Двойственные потенциалы **11**

3.1 Основные понятия 11

3.2 Гармонический осциллятор 14

3.3 Потенциал Калоджеро 15

3.4 Потенциал Морса 18

4 Заключение **21**

5 Список использованных источников **22**

1 Введение

Работа посвящена поиску связей между функциональными интегралами, возникающими в разных квантовомеханических задачах. В статье [12] Виттен рассматривает SYK-модель (модель Сачдева-Йе-Китаева), которая, как предполагается, дуальна к модели черной дыры в 1+1 пространстве. Производящая функция SYK-модели записывается через функциональный интеграл, действие которого является SL(2,R) инвариантным и может быть переписано через производную Шварца от некоторой функции.

С другой стороны, производная Шварца возникает при замене переменных в уравнении Риккати, при изучении квантовомеханических моделей. Уравнение Шредингера может быть сведено к уравнению Риккати, связывающему волновую функцию состояния с нулевой энергией и потенциал взаимодействия. Каноническое уравнение Риккати не меняет свою форму при некоторых заменах переменных, что делает возможным связать некоторые задачи квантовой механики. В этой работе изучаются замены переменных в уравнении Риккати, в надежде, что это прольет свет на преобразования в функциональных интегралах, где тоже возникает производная Шварца.

В квантовой механике небольшое количество задач можно довести аналитически до точного ответа. Возникает вопрос, есть ли что-то общее между этими задачами. Возможно ли используя какие-то общие черты между точно решаемыми задачами и не решаемыми, получать информацию о последних. Некоторые задачи квантовой механики имеют что-то общее. Так, например, в статье Калоджеро [1], изучается парный сингулярный обратно-квадратичный потенциал. В ней показано, что собственные значения задачи Калоджеро с парным взаимодействием частиц отличаются от значений задачи с несколькими независимыми осцилляторами на константу. Затем были явно построены преобразования, сводящие одномерную задачу нескольких тел в потенциале Калоджеро к системе свободных гармонических осцилляторов [2]. Продолжая работу в этом направлении, в статьях [3], [10] были исследованы задачи с “выключенным” гармоническим потенциалом и был предложен универсальный способ, позволяющий связать модель с обратно-квадратичным потенциалом с системой несвязанных свободных частиц.

Способы сведения задач с сингулярным потенциалом к задачам со степенным потенциалом представляют собой большой практический интерес. Это обусловлено распространенным численным методом Монте-Карло, позволяющем получать оценочные значения решений. Но этот метод сталкивается с большими вычислительными сложностями в задачах с сингулярными потенциалами. Однако, для некоторых простых потенциалов хорошо развиты точные численные методы, и полученная связь позволяет применить методы для более сложных задач.

В этой работе будем отталкиваться от теории двойственных потенциалов, которые вводятся в теории суперсимметрии. С помощью такого подхода удалось перейти от линейного дифференциального уравнения Шредингера 2-го порядка к нелинейному дифференциальному уравнению Риккати 1-го порядка, которое связывает волновую функцию состояния с нулевой энергией и потенциал взаимодействия.

В этой работе рассмотрены одномерные одночастичные модели. Здесь предложено два подхода, оба основываются на возможности факторизации гамильтониана. В первом случае, изучено уравнение Риккати, его инвариантность относительно некоторых замен переменных. Преобразования, оставляющие канонический вид уравнения Риккати, позволяют связать волновые функции состояний с нулевой энергией потенциалов, для которых записаны уравнения Риккати. Во втором случае изучается построение двойственных потенциалов и связь их спектров. Особое внимание уделено гармоническому осциллятору, потенциалам Калоджеро и Морс, задаче Кулона.

Интерес к инвариантности канонического уравнения Риккати относительно некоторых замен переменных связан с тем, что при замене переменных в уравнении возникает производная Шварца – и эта же структура возникает при замене переменных в функциональных интегралах квантовомеханических задач.

2 Уравнение Риккати

2.1 Факторизация гамильтониана. Уравнение Риккати

В этой части работы пойдет речь о преобразованиях уравнения Риккати, связывающего потенциал взаимодействия и волновую функцию с нулевой энергией. Для начала покажем, как получается нелинейное дифференциальное уравнение Риккати и уравнения Шредингера, записанного для волновой функции с нулевой энергией.

Рассмотрим случай, когда гамильтониан можно факторизовать, т.е. представить в виде [5]:

$$H = A^+A^-, \quad A^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp\frac{d}{dx} + f(x))$$

Тогда гамильтониан можно переписать через функцию $f(x)$:

$$H = \frac{1}{2}(-\frac{d^2}{dx^2} + f^2(x) - f'(x)),$$

и потенциал примет вид:

$$V(x) = \frac{1}{2}(f^2(x) - f'(x))$$

При заданном потенциале мы можем найти волновую функцию, соответсвующую состоянию системы с нулевой энергией, решая дифференциальное уравнение первого порядка:

$$H\psi_0 = 0, \quad A^+A^-\psi_0 = 0, \quad A^-\psi_0 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + f(x)\right)\psi_0 = 0, \quad \frac{d\psi_0}{dx} + f(x)\psi_0 = 0$$

Таким образом, мы можем перевыразить фунцкию $f(x)$ через функцию ψ_0:

$$f(x) = -\frac{\psi_0'}{\psi_0} = -(ln\psi_0)'$$

Тоже самое можно получить, рассмотрев уравнение Шредингера, записанное для волновой функции с энергией $E = 0$:

$$-\frac{d^2}{2dx^2}\psi_0 + (-E + V)\psi_0 = 0, \quad E == 0, \quad \psi_0'' = 2V\psi_0$$

$$\left(\frac{\psi_0'}{\psi_0}\right)' = \frac{\psi_0''}{\psi_0} - \frac{\psi_0'^2}{\psi_0^2}, \quad \left(\frac{\psi_0'}{\psi_0}\right)' + \frac{\psi_0'^2}{\psi_0^2} = 2V, \quad f(x) = -\frac{\psi_0'}{\psi_0}$$
$$f^2(x) - f'(x) = 2V(x), \quad (*)$$

Таким образом, для заданного потенциала мы можем сразу же найти волновую функцию состояния с нулевой энергией, решая уравнение (*). Это уравнение носит название канонического уравнения Риккати.

2.2 Общие сведения об каноническом уравнении Риккати

Рассмотрим подход, в основе которого лежит то, что каноническое уравнение Риккати сохраняет свою форму при некоторых заменах переменных (некоторые преобразования переводят каноническое уравнение снова в каноническое уравнение, но с другой неоднородностью - потенциалом взаимодействия). Ранее было показано, что имеет место уравнение:

$$f'(x) = f^2(x) - 2V(x), \quad f(x) = -\frac{\psi_0'}{\psi_0}$$

Это и есть уравнение Риккати в каноническом виде. В уравнение Риккати входит потенциал задачи в явном виде. Это уравнение связывает волновую функцию состояния с нулевой энергией и потенциал взаимодействия.

Уравнение Риккати является нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка. Его нельзя разрешить в квадратурах, т.е. нельзя записать решение через конечное число последовательных интегралов. Но если известно частное решение $y_0(x)$, то можно записать общее решение через две квадратуры (теорема [6]):

$$y(x) = y_0(x) + F(x)\left(c - \int F(s)ds\right)^{-1}$$
$$f(x) = e^{2\int y_0(s)ds}$$

Действительно, будем искать решение в виде $y(x) = y_0(x) + z(x)$. Тогда подставив анзац в уравнение Риккати получим:

$$z_x' = z^2 + 2y_0 z$$

Это есть уравнение Бернули. Его решение записывается через две квадратуры.

Уравнение Риккати инвариантно при следующих дробно-линейных заменах переменных:

$$x = \phi(\tilde{x}), \quad y = \frac{a\tilde{y} + b}{c\tilde{y} + d}$$

Существует несколько замен относительно которых каноническое уравнение Риккати переходит в каноническое уравнение Риккати. Так как в уравнение в явном виде входит потенциал взаимодействия, то мы можем с помощью замены переменных переходить от задачи с одним потенциалом, к задаче с другим потенциалом.

Из решения уравнения Рикати можно найти волновую функцию состояния с нулевой энергией, поэтому с помощью таких замен переменных мы получаем связь между волновыми функциями с нулевой энергией разных задач.

2.3 Связь преобразований уравнения Риккати с производной Шварца

Рассмотрим дифференциальный оператор от аналитической функции $g(x)$, называемый производной Шварца:

$$S_g(x) = \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2$$

Интересно, что потенциал модели можно переписать через производную Шварца от некоторой функции $g(x)$. Действительно, пусть $\psi_0(x) = (g'(x))^{-\frac{1}{2}}$, тогда из уравнения Риккати получим:

$$V(x) = \frac{1}{2}(f^2(x) - f'(x)) = -\frac{1}{4}\left[\frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2\right] = -\frac{1}{4}S_g(x),$$

Отметим важное свойство производной Шварца от сложной функции $h(g(x))$:

$$S_{h(g(x))}(x) = S_h(g(x)) * (g'(x))^2 + S_g(x), \quad (**)$$

С другой стороны, при некоторых преобразованиях уравнения Риккати $f'_x = f^2 + F(x)$, тоже может возникать производная Шварца в неоднородном члене уравнения:

$$x = \phi(\xi), \quad y = \frac{1}{\phi'_\xi}\omega(\xi) - \frac{1}{2}\frac{\phi''_{\xi\xi}}{(\phi'_\xi)^2},$$

после замены переменных уравнение Риккати примет вид:

$$\omega'_\xi = \omega^2 + R(\xi), \quad R(\xi) = F(\phi(x))[\phi'(\xi)]^2 + \frac{1}{2}S_\phi(\xi)$$

Таким образом, из-за того что потенциал взаимодействия представляет собой производную Шварца, то замена переменных в уравнении Риккати тесно связана с ранее записанным (**) свойством производной Шварца от сложной функции.

2.4 Преобразования уравнения Риккати для потенциала Морса

Интересно было бы найти и изучить связь между потенциалами взаимодействия и волновыми функциями (с нулевой энергией) точно решаемых задач. Рассмотрим далее замены переменных для канонического уравнения Риккати, с помощью которых можно переходить от моделей с потенциалом Морса к моделям гармонического осциллятора, потенциала Калоджеро и Кулона.

Общий вид преобразований, позволяющий связать многие потенциалы, в которые входить показательная функция, со степенными потенциалами имеет вид [9]:

$$y'_x = y^2 - \frac{\alpha^2}{4} + e^{-2\alpha x} f(e^{-\alpha x}),$$

$$\omega'_\xi = \omega^2 + \frac{1}{\alpha^2} f(\xi),$$

$$\xi = e^{-\alpha x}, \quad w = \frac{1}{-\alpha} e^{\alpha x} y - \frac{1}{2} e^{\alpha x},$$

где $f(e^{-\alpha x})$ произвольная непрерывная функция с аргументом $e^{-\alpha x}$. Тогда обратные преобразования можно записать в виде:

$$x = \frac{-1}{\alpha} ln|\xi|$$

$$y = \omega\xi - \frac{\alpha}{2}$$

Выбирая конкретный вид фукции $f(e^{-\alpha x})$ можно связать уравнение Риккати с потенциалом Морса и уравнения с потенциалами гармонического осциллятора, Калоджеро и одномерного Кулона (см. Таблицу 1).

В таблице 1 в первом столбце выписаны потенциалы Морса, во втором столбце записана функция $f(e^{-\alpha x})$ для каждого конретного частного случая потенциала Морса, а в третьем столбце таблицы – потенциалы взаимодействия, которые получаются после замены переменных при конкретном выборе функции $f(e^{-\alpha x})$:

$-2V(x)$	$f(e^{-\alpha x})$	$-2\widetilde{V}(\xi)$
$-\frac{\alpha^2}{4} + D\left[e^{-4\alpha x} - 2e^{-2\alpha x}\right]$	$-2 + e^{-2\alpha x}$	$\frac{D}{\alpha^2}\xi^2 - \frac{2D}{\alpha^2}$
$-\frac{\alpha^2}{4} + D\left[e^{-4\alpha x} - 2e^{-2\alpha x} + C\right]$	$-2 + e^{-2\alpha x} + \frac{1}{e^{-2\alpha x}}$	$\frac{D}{\alpha^2}\xi^2 + \frac{DC}{\alpha^2}\frac{1}{\xi^2} - \frac{2D}{\alpha^2}$
$-\frac{\beta^2}{4} + D\left[e^{-2\beta x} - 2e^{-\beta x}\right]$	$1 + \frac{-\beta}{e^{-\beta x}}$	$\frac{D}{\beta^2} - \frac{2D}{\beta^2}\frac{1}{\lvert\xi\rvert}$

Таблица 1 - Преобразования потенциалов

Для проверки полученных формул подставим в известную волновую функцию состояния с нулевой энергией потенциала Морса новые переменные и проверим, получим ли мы правильную волновую функцию для другого потенциала.

Рассмотрим переход от потенциала Морса к потенциалу Калоджеро. Можно воспользоваться известным выражением для волновой функции основного состояния потенциала Морса [8], для упрощения положив $\alpha = 1/2, D = 1$, тогда:

$$\psi_0(x) = e^{-e^{-x}} 2^s (e^{-x})^s \equiv exp(-\int y dx),$$

где $s = \frac{\sqrt{-2E}}{2\alpha}$. После замены переменных:

$$\psi_0(\xi) = e^{-\xi} 2^s \xi^s \equiv exp(-\int \omega d\xi - \int \frac{1}{2\xi} d\xi) = \psi_0(\xi) e^{-\int \frac{1}{2\xi} d\xi} = \psi_0(\xi) \frac{1}{\sqrt{\xi}}$$

$=>$ волновая функция имеет вид $\psi_0(\xi) = Ce^{-\xi}\xi^{s-\frac{1}{2}}$, что соответсвует потенциалу Калоджеро.

Заметим также, что при выборе констант таких, что $\beta = 2\alpha$, $-\frac{3}{4}\alpha^2\frac{1}{D} = C$, потенциалы Морса, из которых получаются заменой переменных потенциалы Калоджеро и Кулона, становятся идентичными. Таким образом получаем связь через замену переменных для потенциалов Кулон-Морс-Калоджеро.

2.5 Некоторые общие преобразования уравнения Риккати

Существует не мало других преобразований уравнения Риккати, сохраняющих канонический вид и которые можно использовать для связи волновых функций состояний с нулевой энергией разных гамильтонианов. Итак, рассмотрим замены переменных, такие что:

$f'_x(x) = f^2(x) - 2V(x) \quad => \quad w'_\xi(\xi) = w^2(\xi) - 2\widetilde{V}(\xi)$

Замены переменных представлены в виде Таблицы 2 (1ый и 2ой столбец – вид неоднородности уравнения Риккати до и после замены, 3ий и 4ый – новые переменные):

$-2V(x)$	$-2\widetilde{V}(\xi)$	ξ	ω
$a^2 f(ax+b)$	$f(\xi)$	$ax+b$	y/a
$x^{-4} f(\frac{1}{x})$	$f(\xi)$	$1/x$	$-x^2y - x$
$\frac{1}{(cx+d)^4} f(\frac{ax+b}{cx+d}), \Delta = ad - bc$	$\Delta^{-2} f(\xi)$	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\Delta^{-1}((cx+d)^2 y + c(cx+d))$
$\frac{-\lambda^2}{4} + e^{-2\lambda x} f(-e^{\lambda x})$	$\lambda^{-2} f(\xi)$	$e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} y - \frac{1}{2} e^{\lambda x}$
$\frac{1-n^2}{4x^2} + x^{2n-2} f(ax^n + b)$	$(an)^{-2} f(\xi)$	$ax^n + b$	$\frac{1}{an} x^{1-n} y + \frac{1-n}{2an} x^{-n}$
$\frac{1-n^2}{4x^2} + ax^{2m-2}(bx^m + c)^n$	$a(bm)^{-2}\xi^n$	$bx^m + c$	$\frac{1}{bm} x^{1-m} y + \frac{1-m}{2bm} x^{-m}$
$-\lambda^2 + ach^n(\lambda x) sh^{-n-4}(\lambda x)$	$\lambda^{-2}\xi^n$	$cth(\lambda x)$	$-\frac{1}{\lambda} sh^2(\lambda x) y - sh(\lambda x) ch(\lambda x)$
$\lambda^2 + C sin^n(\lambda x + a) sin^{-n-4}(\lambda x + b)$	$C(\lambda sin(b-a))^{-2}\xi^n$	$\frac{sin(\lambda x + a)}{sin(\lambda x + b)}$	$\frac{sin^2(\lambda x + b)}{sin(b-a)} (\frac{y}{\lambda} + ctg(\lambda x + b))$
$-\frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda^2 tg^2(\lambda x) + a cos^2(\lambda x) sin^n(\lambda x)$	$a\lambda^{-2}\xi^n$	$sin(\lambda x)$	$\frac{y}{\lambda} cos(\lambda x) + \frac{sin(\lambda x)}{2cos^2(\lambda x)}$

Таблица 2 - Некоторые общие преобразования уравнения Риккати

В шестой строке Таблицы 2 предложена замена переменных, которая позволяет связывать степенные потенциалы и потенциалы с обратно-квадратичной зависимостью. К сожалению такая замена переменных не работает в частном случае для пары потенциалов Калоджеро и гармонического осциллятора. Был рассмотрен случай m=1, n=2 (при таких значениях должен был бы теоретически выполняться переход от потенциала взаимодействия Калоджеро к гармоническому осциллятору), однако для таких значений m и n замена становится тривиальной, и перестает работать – такое преобразование только масштабирует исходное уравнение Риккати.

Так же существует еще одна интересная замена переменных, позволяющая свести потенциал со степенной и обратно квадратичной зависимостью к потенциалу с только степенной зависимостью. Однако такой способ тоже не подходит для частного случая Калоджеро-гармонический осциллятор, из-за обнуления констант при попытке потребовать m=2, n=4.

$$y'_x = ay^2 + bx^{n-2} + \frac{c}{x^2}, \quad aA^2 - A + c = 0, \quad \omega = xy + A$$

$$x\omega'_x = a\omega^2 + (1 - 2aA)\omega + bx^n$$

$$x\omega'_x = \alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma x^n, \quad \xi = x^\beta, \quad \eta = yx^{-\beta}, \quad m = \frac{n}{\beta} - 2$$

$$\eta'_\xi = \frac{\alpha}{\beta}\eta^2 + \frac{\gamma}{\beta}\xi^m$$

Тем не менее, такие замены все равно представляют большой интерес для численных расчетов волновых функций с нулевой энергией. Для степенных потенциалов взаимодействия хорошо развиты численные методы, в то время как численные расчеты сингулярных потенциалов связаны с большими трудностями. Поэтому преобразования, сводящие уравнение Риккати с сингулярным потенциалом, к уравнению со степенным, позволяют использовать хорошо разработанные для простых потенциалов численные методы при работе с сингулярными потенциалами.

В дальнейшем было бы интересно рассмотреть замены, переводящие каноническое уравнение Риккати в неканоническое, так как любое уравнение Риккати можно свести к каноническому виду [9] - то есть рассмотреть цепочки из двух замен переменных, то есть цепочки, переводящие каноническое уравнение в каноническое. Возможно в этом случае возникнут новые преобразования, отличные от разобранных.

3 Двойственные потенциалы

3.1 Основные понятия

В данной части работы пойдет речь о так называемых двойственных потенциалах. Рассмотрим и сравним пары двойственных потенциалов, построенные на разных волновых функциях.

В предыдущей работе [4] были изучены подходы к факторизации гамильтонианов. Используя тот факт, что гамильтониан можно представить в виде произведения двух операторов, аналогичных оператору рождения и уничтожения в гармоническом осцилляторе, можно построить теорию двойственных потенциалов[5], спектры и волновые функции которых связаны. Изложим вкратце ниже основные положения этой теории [11].

Теории без взаимодействия.

Введем операторы рождения и уничтожения в виде:

$$Q_+ = qb_- f_+, \quad Q_- = qb_+ f_-$$

, где $b_-, \quad f_-$ - операторы уничтожения одного бозона и одного фермиона соответсвенно, $b_+, \quad f_+$ - операторы рождения. Требуем эрмитовость $Q_+^+ = Q_-$.

Два фермиона не могут находиться в одном состоянии, поэтому операторы $Q_+, \quad Q_-$ обладают свойством: $Q_+^2 = 0, \quad Q_-^2 = 0$. Для удобства введем опреаторы $Q_1, \quad Q_2$:

$$Q_1 = Q_+ + Q_-, \quad Q_2 = -i(Q_+ - Q_-).$$

Можно показать, что:

$$\{Q_1, Q_2\} = 0, \quad Q_1^2 = Q_2^2 = \{Q_+, Q_-\}$$

, где $\{A, B\} = AB + BA$ - антикоммутатор. Обозначим $\{Q_+, Q_-\} \equiv H$. Покажем, что H - это гамильтониан системы бозонов и фермионов. Имеют место соотношения:

$$\{Q_i, Q_j\} = 2H\delta_{ij}, \quad [H, Q_+] = [H, Q_-] = 0$$

С учетом $\{f_+, f_-\} = 1$ получим:

$$\{Q_+, Q_-\} = q^2 \left(b_+ b_- + \frac{1}{2}\right) + q^2 \left(f_+ f_- - \frac{1}{2}\right) = H = H_B + H_F$$

, где $H_B, \quad H_F$ - бозонный и фермионный гамильтонианы.

Важные свойства:

1) Все уровни энергии такого гамильтониана неотрицательны: $E_n \geqslant 0$;

2) Все уровни энергии (кроме нулевого) двукратно вырождены;

3) Для состояния с нулевой энергией : $H|\Psi_0>=0 \quad => \quad ||Q_1|\Psi_0>||^2=0, \quad ||Q_2|\Psi_0>||^2=0$, где Ψ_0 - волновая функция сосотояния с нулевой энергией.

Теории с взаимодействием.

Рассмотрим теории со взаимодействием. Аналогично введем операторы рождения и уничтожения:

$$Q_+ = B_+(b_+, b_-)f_+, \quad Q_- = B_-(b_+, b_-)f_-$$

Обозначения:

$$f_+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad f_- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \Psi = \left(\begin{smallmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{smallmatrix}\right), \quad \sigma_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right).$$

Тогда, используя сигма-матрицу матричный гамильтониан H можно записать в виде:

$$H = \{Q_+, Q_-\} = \frac{1}{2}\,[B_+, B_-] + \frac{1}{2}\{B_+, B_-\}\sigma_3$$

В координатном представлении будем искать операторы рождения и уничтожения в виде:

$$B_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm ip + f(x))$$

, p - импульс, $f(x)$ - некоторая функция от координат.

Тогда, нетрудно показать, что для такого вида операторов рождения и уничтожения гамильтониан имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(p^2 + f^2(x) + f'(x)) & 0 \\ \\ 0 & \frac{1}{2}(p^2 + f^2(x) - f'(x)) \end{pmatrix}$$

Рассмотрим как связаны спектры двойственных потенциалов и потенциалов из квантовомеханических задач. Изучим задачу на собственные значения матричного гамильтониана:

$$H \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \\ \Psi_- \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \\ \Psi_- \end{pmatrix}, \quad E \geqslant 0$$

Если $E = 0$

$$H \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \\ \Psi_- \end{pmatrix} = 0, \quad H = \begin{pmatrix} B_+B_- & 0 \\ \\ 0 & B_-B_+ \end{pmatrix}$$

$$=> \quad B_-|\Psi_+>= 0, \quad B_+|\Psi_- >= 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\pm \frac{d}{dx} + f(x) \right) \Psi_{\mp} = 0$$

$$\Psi_{\pm} = Cexp \left(\pm \int_0^x f(s) ds \right)$$

Видно, что при минимальной возможной энергии, т.е. при $E = 0$, обе волновые функции $\Psi_-, \quad \Psi_+$ с нулевой энергией не могут быть одновременно нормированы. Мы хотим, чтобы волновая функция состояния с нулевой энергией задачи квантовой механики была квадратично интегрируема. Здесь возможны три варианта в зависимости от вида $f(x)$:

1) $||\Psi_+|| = \infty, \quad ||\Psi_-|| = \infty$
2) $||\Psi_+|| = \infty, \quad ||\Psi_-|| < \infty$
3) $||\Psi_+|| < \infty, \quad ||\Psi_-|| = \infty$

Значит нормированная функция Ψ_0 задачи на собственные значения матричного либо единсвтенна, либо не существует. Наиболее распространенный частный случай показательных потенциалов, для которых нормированное состояние существует можно записать в виде: $f(x) = Cx^n$, где n - нечетное число, C - константа.

3.2 Гармонический осциллятор

В рамках теории двойственных потенциалов ,была рассмотрена модель гармонического осциллятора [5]. На основе волновой функции основного сотояния ψ_0 построены два двойственных потенциала, которые в данном случае являются гармоническими осцилляторами:

ψ_0	$f(x) = -\frac{\psi_0'}{\psi_0}$	V_2	E_n	V_1	E_n
$e^{-x^2/2}$	x	$\frac{1}{2}(x^2-1)$	n	$\frac{1}{2}(x^2+1)$	$n+1$

Таблица 3 - Двойственные потенциалы для ψ_0

Потенциал гармонического осциллятора может быть получен, если взять и следующие две волновые функции, описывающие возбужденные состояния осциллятора:

ψ_0	$f(x) = -\frac{\psi_0'}{\psi_0}$	V_2	E_n	V_1	E_n
$\sqrt{2}xe^{-x^2/2}$	$x-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}(x^2-3)$	$n-1$	$\frac{1}{2}(x^2+\frac{2}{x^2}-1)$	$2n+2$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(2x^2-1)e^{-x^2/2}$	$x-\frac{4x}{2x^2-1}$	$\frac{1}{2}(x^2-5)$	$n-2$	$\frac{1}{2}(x^2+\frac{8}{2x^2-1}+\frac{16}{(2x^2-1)^2}-3)$	–

Таблица 4 - Двойственные потенциалы, построенные на волновых функциях возбужденных состояний гармонического осциллятора

Нижний уровень энергии гармонического осциллятора сместился вниз, из-за того что мы взяли за основу волновую функцию не основного состояния.

В работе построены двойственные потенциалы на функциях, которые не принадлежат гильбертову пространству и не квадратично интегрируемы. Начинает прослеживаться закономерность, что если брать за основу при построении двойственных потенциалов одну из волновых функций гармонического осциллятора или соответсвующие им не квадратично-интегрируемые функции, то один из получивщихся потенциалов всегда будет гармоническим. Это продемонстрированно в Таблице 5:

ψ_0	$f(x) = -\frac{\psi_0'}{\psi_0}$	V_2	V_1
$e^{-x^2/2}$	x	$\frac{1}{2}(x^2-1)$	$\frac{1}{2}(x^2+1)$
$\sqrt{2}xe^{-x^2/2}$	$x-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}(x^2-3)$	$\frac{1}{2}(x^2+\frac{2}{x^2}-1)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(2x^2-1)e^{-x^2/2}$	$x-\frac{4x}{2x^2-1}$	$\frac{1}{2}(x^2-5)$	$\frac{1}{2}(x^2+\frac{8}{2x^2-1}+\frac{16}{(2x^2-1)^2}-3)$
$\frac{(8x^3-12x)}{4\sqrt{3}}e^{-x^2/2}$	$\frac{2x^4-9x^2+3}{2x^3-3x}$	$\frac{1}{2}(x^2-7)$	$\frac{1}{2}(x^2+\frac{8}{2x^2-3}+\frac{48}{(2x^2-3)^2}+\frac{2}{x^2}-5)$
$e^{x^2/2}$	$-x$	$\frac{1}{2}(x^2+1)$	$\frac{1}{2}(x^2-1)$
$\sqrt{2}xe^{x^2/2}$	$x+\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}(x^2+3)$	$\frac{1}{2}(x^2+\frac{2}{x^2}+1)$

Таблица 5 - Двойственные потенциалы на основе волновых функций гармонического осциллятора

Видно, что второй двойственный потенциал всегда имеет форму осциллятора, смещенного на энергию волновой функции, на основе которой построен этот потенциал.

3.3 Потенциал Калоджеро

Далее, используя тот же подход, рассмотрим потенциал Калоджеро в одночастичной модели.

Будем факторизовать гамильтониан так: $f(x) = x + \frac{a}{x}$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(p^2+x^2+2a+1+\frac{a(a-1)}{x^2}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(p^2+x^2+2a-1+\frac{a(a+1)}{x^2}) \end{pmatrix}$$

$a = 1$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(p^2+x^2+3) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(p^2+x^2+1+\frac{2}{x^2}) \end{pmatrix}$$

Здесь суперпотенциал $f(x)$ ведет себя как $||\Psi_-|| < \infty$, поэтому квадратично-интегрируемой функцией состояния с нулевой энергией обладает только потенциал V_2. Рассмотрим выражение:

$$\frac{1}{2}(p^2+x^2+1+\frac{2}{x^2})\Psi_-=0$$

Перейдем в квантовую механику и найдем энергию основного состояния потенциала V_2:

$$\frac{1}{2}(p^2+x^2+\frac{2}{x^2})\Psi_-=-\frac{1}{2}\Psi_-$$

энергия основного состояния $E_0=-\frac{1}{2}$. Пусть теперь $a=-1$

$$H=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(p^2+x^2-1+\frac{2}{x^2}) & 0\\ 0 & \frac{1}{2}(p^2+x^2-3)\end{pmatrix}$$

Случай 2):

$$\frac{1}{2}(p^2+x^2-3)\Psi_-=0$$

Переход в КМ:

$$\frac{1}{2}(p^2+x^2)\Psi_-=\frac{3}{2}\Psi_-$$

Итак, гамильтониан с потенциалом Калоджеро можно факторизовать следующим образом:

$$b_\alpha^+=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx}+x+\alpha x^{-1}\right),\quad b_\alpha^-=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx}+x+\alpha x^{-1}\right)$$

Гамильтониан имеет вид:

$$H=b_\alpha^+b_\alpha^-+\frac{1}{2}-\alpha=\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2}+x^2+2x^{-2}\right)$$

Где $\alpha=-2;\ 1$. Операторы не образуют алгебру Гейзенберга, как для гармонического осциллятора. Однако [7], существуют операторы $B^+,\ B^-$,

$$B^+=b_\alpha^+b_{-\alpha}^+=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dx^2}+x^2-2x^{-2}-2x\frac{d}{dx}-1\right)$$

$$B^-=b_\alpha^-b_{-\alpha}^-=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dx^2}+x^2-2x^{-2}+2x\frac{d}{dx}+1\right)$$

которые удовлетворяют соотношению [7]:

$$[B^\pm,H]=\mp 2B^\pm$$

То есть образуют алгберу, похожую на алгебру гармонического осциллятора. С учетом

$$b_\alpha^- \psi_0(x) = 0$$

собственная функция, отвечающая нулевому значению энергии равна:

$$\psi_0(x) = x^{-\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Тогда в соответсвии с $\psi_n = (B^+)^n \psi_0$ можно найти остальные собственные функции и собственные значения энергии

$$\psi_0^{(-2)}(x) = P_{2n+2}(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad E_n = \frac{5}{2} + 2n$$

где полином P_{2n+2} содержит только чётные степени x.

$$\psi_0^{(1)}(x) = (x^{-1} + P_{2n-1}(x)) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad E_n = -\frac{1}{2} + 2n$$

где полином $P_{2n-1}(x)$ содержит только нечётные степени x.

С помощью опрераторов рождения и уничтожения были получены волновые функции 1го и 2го возбужденных состояний и на основе их построены двойственные потенциалы:

ψ_0	$f(x) = -\frac{\psi_0'}{\psi_0}$	V_2	V_1
$\frac{1}{x} e^{-x^2/2}$	$\frac{1}{x} + x$	$\frac{1}{2}(\frac{2}{x^2} + x^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(x^2 + 3)$
$(1 - 2x^2 - \frac{1}{x^2}) e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\frac{2x^4 - x^2 + 1}{x(2x^2+1)}$	$x^2 + \frac{2}{x^2} - 3$	$\frac{1}{2}(x^2 + \frac{8}{2x^2+1} - \frac{16}{(2x^2+1)^2} - 1)$
$x^2 e^{-x^2/2}$	$x - \frac{2}{x}$	$\frac{1}{2}(x^2 + \frac{2}{x^2} - 5)$	$\frac{1}{2}(x^2 + \frac{6}{x^2} - 3)$
$2(x^2 - 1) x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$	$-\frac{x^6 - 10x^4 + 17x^2 - 2}{x^4 - x^2}$	$\frac{1}{2}[\frac{(x^6 - 10x^4 + 17x^2 - 2)^2}{x^4(x^2-1)^2} +$	$\frac{1}{2}[\frac{(x^6 - 10x^4 + 17x^2 - 2)^2}{x^4(x^2-1)^2} -$
		$+ \frac{2x(x^8 - 2x^6 - 7x^4 + 4x^2 - 2)}{x^4(x^2-1)^2}]$	$- \frac{2x(x^8 - 2x^6 - 7x^4 + 4x^2 - 2)}{x^4(x^2-1)^2}]$
$(4x^6 - 22x^4 + 22x^2) e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\frac{22x - 8x^3}{2x^4 - 11x^2 + 11} +$	$\frac{1}{2}(x^2 + \frac{2}{x^2} +$	$\frac{1}{2}(x^2 + \frac{6}{x^2} +$
	$+x - \frac{2}{x}$	$+ \frac{2(6x^2 - 11}{2x^4 - 11x^2 + 11)} - 13)$	$+ \frac{264x^2}{(2x^4 - 11x^2 + 11)^2)^2} +$
			$+ \frac{2(14x^2 + 11)}{2x^4 - 11x^2 + 11} - 11)$
$x^{-\alpha} e^{-x^2/2}$	$x + \frac{\alpha}{x}$	$\frac{1}{2}(x^2 - 2\alpha - \frac{\alpha^2}{x^2})$	$(x + \frac{\alpha}{x})^2 + 1 - \frac{\alpha}{x^2}$

Таблица 6 - Двойственные потенциалы для волновых функций потенциала Калоджеро

Видно, что отталкиваясь от определенных волновых функций гармонического осциллятора или потенциала Калоджера, будут получаться пары двойственных потенциалов осциллятор-Калоджеро. У этих потенциалов будут совпадать спектры энергии, но волновые фукции будут разные. Кроме того у одного из потенциалов всегда не будет нормированного состояния с нулевой энергией.

3.4 Потенциал Морса

Рассмотрим задачу с потенциалом взаимодействия Морса. Найдем для нее основной уровень энергии с помощью метода двойственных потенциалов.

$$V(x) = Ae^{-2\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

Будем функцию $f(x)$ искать в виде $f(x) = -ae^{-\alpha x}+b$ Приравняем потенциал и выражение для потенциала, записанное в терминах функции f(x), из этого соотношения найдем неизвестные константы $\alpha, \quad \beta$:

$$f^2 - f' = 2V(x) + c$$

$$a^2e^{-2\alpha x} - 2abe^{-\alpha x} + b^2 - a\alpha e^{-\alpha x} = 2Ae^{-2\alpha x} + 2Be^{-\alpha x} + c$$

Следовательно:

$$a = \sqrt{2A}$$
$$b = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{B}{\sqrt{A}} - \frac{\alpha}{2}$$

$$f(x) = -ae^{-\alpha x} + b$$

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(p^2 + a^2e^{-2\alpha x} - & 0 \\ -(2ab - a\alpha)e^{-\alpha x} + b^2) & \\ 0 & \frac{1}{2}(p^2 + a^2e^{-2\alpha x} - (2ab + a\alpha)e^{-\alpha x} + b^2) \end{pmatrix}$$

, где $b^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{A} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\frac{B}{\sqrt{A}} + \frac{\alpha^2}{4}$.

Или для записи в виде $f(x) = -\sqrt{2A}e^{-\alpha x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{B}{\sqrt{A}} - \frac{\alpha}{2}$:

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[p^2 + 2Ae^{-2\alpha x} + (2B - 2\alpha\sqrt{2A})e^{-\alpha x} & 0 \\ +\frac{1}{2}\frac{B^2}{A} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\frac{B}{\sqrt{A}} + \frac{\alpha^2}{4}] & \\ 0 & \frac{1}{2}[p^2 + 2Ae^{-2\alpha x} + 2Be^{-\alpha x} \\ & +\frac{1}{2}\frac{B^2}{A} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\frac{B}{\sqrt{A}} + \frac{\alpha^2}{4}] \end{pmatrix}$$

Из вида функции $f(x)$ следует, что для данного потенциала имеет место случай $||\Psi_-|| < \infty$. Тогда можно записать:

$$H_1\Psi_- = 0 * \Psi_-$$

$$\frac{1}{2}\left(p^2 + 2Ae^{-2\alpha x} + 2Be^{-\alpha x} + \frac{1}{2}\frac{B^2}{A} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\frac{B}{\sqrt{A}} + \frac{\alpha^2}{4}\right)\Psi_- = 0 * \Psi_-$$

$$\left(\frac{1}{2}p^2 + Ae^{-2\alpha x} + Be^{-\alpha x}\right)\Psi_- = -\left(\frac{1}{4}\frac{B^2}{A} + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\frac{B}{\sqrt{A}} + \frac{\alpha^2}{8}\right)\Psi_-$$

$$E_0 = -A\left(\frac{1}{4}\frac{B^2}{A} + \frac{\alpha}{2\sqrt{A}}\frac{B}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha^2}{8}\right)$$

Если взять $B = -2A$, то получим известный результат для точно решаемого частного случая потенциала Морса [8]:

$$E_0 = -A\left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2A}} + \frac{\alpha^2}{8A}\right)$$

Получили два двойственных потенциала - оба потенциала Морса, отличающиеся только на константу перед экспонентой. Причем модель с первым потенциалом не имеет нормированного основного состояния. Построим теперь двойственные потенциалы на основе волновой функции ψ_1 для точно решаемого потенциала с параметрами $B = -2A$. Известно [8], что для такого потенциала волновые функции имеют вид:

$$\psi_n = e^{-\frac{\eta}{2}}\eta^s L_n^{2s}(\eta)$$

$$\eta = \left(-\frac{2\sqrt{2A}}{\alpha}e^{-\alpha x}\right), \quad s = \frac{\sqrt{-2E}}{\alpha}, \quad n = \frac{\sqrt{2A}}{\alpha} - \left(s + \frac{1}{2}\right)$$

Тогда для $\alpha = 1, \quad A = 1$ двойственные потенциалы имеют вид:

$$V_2(x) = s^2 - 2\sqrt{2}se^{-x} - \frac{2se^{-x}}{2s - e^{-x} + 1} + \frac{2\sqrt{2}e^{-2x}}{2s - e^{-x} + 1} - \frac{e^{-x}}{2s - e^{-x} + 1} +$$
$$+2e^{-2x} - \sqrt{2}e^{-x},$$
$$V_1(x) = s^2 - 2\sqrt{2}se^{-x} - \frac{2se^{-x}}{2s - e^{-x} + 1} + \frac{2\sqrt{2}e^{-2x}}{2s - e^{-x} + 1} + \frac{e^{-x}}{2s - e^{-x} + 1} +$$
$$+\frac{2e^{-2x}}{(2s - e^{-x} + 1)^2} + 2e^{-2x} + \sqrt{2}e^{-x}.$$

Итак, в этом разделе были рассмотрены двойственные потенциалы, построеные на волновых функциях гармонического осциллятора, потенциала Калоджеро и Морса. Было замечено, что при построении на определенных волновых функциях гармонического осциллятора получаются два двойственных потенциала, один из которых потенциал гармонического осциллятора, а другой - потенциал Калоджеро. И наоборот, при выборе волновых функций потенциала Калоджера как основных, один из двойственных потенциалов имеет форму потенциала гармонического осциллятора.

Кроме того, при построении двойственных потенциалах на основе волновых функций гармонического осциллятора (в том числе и функций, которые формально могут удовлетворять уравнению Шредингера, но не лежат в гильбертовом пространстве и не квадратично-интегрируемы) один из двух получившися потенциалов всегда имеет форму потенциала осциллятора со смещенной энергией основного состояния.

Был подробно рассмотрен потенциал Морса для произвольных констант A, B и найдено основное состояние такой модели. Примечательно, что двойственный потенциал к потенциалу Морса тоже является потенциалом Морса, но с другой константой перед членом $e^{-\alpha x}$. Построены двойственные потенциалы для Морса на волновой функции первого возбужденного состояния ψ_1.

Напомним, что только один из двух двойственных потенциалов имеет квадратично-интегрируемую волновую функцию (для энергии равной нулю), которую можно найти из условия $f(x) = -\frac{\psi_0'}{\psi_0}$.

4 Заключение

Отталкиваясь от возможности переписать линейное дифференциальное уравнение Шредингера для волновой функции с нулевой энергией в виде нелинейного дифференциального уравнения Риккати, которое связывает волновую функцию с нулевой энергией и потенциал взаимодействия, была исследована взаимосвязь некоторых одночастичных квантовомеханических задач.

Были рассмотрены замены переменных в уравнении Риккати, которые оставляют канонический вид уравнения, т.е. были найдены преобразования, связывающие волновые функции с нулевой энергией для разных потенциалов взаимодействия. В том числе, были предложены замены, позволяющие связать задачи с потенциалами взаимодействия Кулона, Морса и Калоджеро.

Была подробно изучена возможность сведения уравнения Риккати, записанного для потенциала Калоджеро, к уравнению, описывающему гармонический осциллятор. Основная проблема в поиске таких преобразований заключается в нелинейности уравнения Риккати.

Построены преобразования для некоторого класса задач с сингулярными потенциалами взаимодействия, сводящие уравнение Риккати к уравнению со степенными потенциалами. Для случая простых степенных потенциалов существуют разработанные методы расчета физических величин. Представляет интерес исследовать как с помощью полученных преобразований эти методы могут быть модифицированы для более сложных потенциалов.

Кроме того были построены пары двойственных потенциалов на основе разных волновых функций, описывающих состояния потенциалов гармонического осциллятора, Калоджеро, Морса. Были рассмотрены сходства пар двойственных потенциалов для некоторых волновых функций потенциалов Калоджеро и гармонического осциллятора. Рассмотрено построение двойственных потенциалов для волновых функций гармонического осциллятора, нележащих в гильбертовом пространстве. С помощью теории двойственных потенциалов найдена энергия основного состояния для обобщенного потенциала Морса.

Представляет интерес изучить, как замены переменных, сохраняющие вид уравнения Риккати, связаны с преобразованием функциональных интегралов.

5 Список использованных источников

[1] F. Calogero, Solution of the OneDimensional NBody Problems with Quadratic and / or Inversely Quadratic Pair Potentials, J. Math. Phys. 12, 419 (1971); doi: 10.1063/1.1665604

[2] N. Gurappa and Prasanta K. Panigrahi, Equivalence of the Calogero-Sutherland model to free harmonic oscillators, Phys. Rev. B volume 59, num 4 15 January 1999-II

[3] A.Galajinsky, O.Lechtenfeld, K.Polovnikov, Calogero models and nonlocal conformal transformations, arXiv:hep-th/0607215v2

[4] А.В. Лысухина, Факторизация гамильтонианов в некоторых задачах квантовой механики

[5] F.Cooper, A.Khare, U.Sukhatme, Supersymmetry and Quantum Mechanics, arXiv:hep-th/9405029

[6] Степанов, Курс дифференциальных уравнений 1950г.

[7] V.V. Belokurov, E.T. Shavgulidze, A quantum mechanical model of "dark matter", arXiv:1403.7464 [math-ph]

[8] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теоретическая физика т.3

[9] В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Москва 2001 физ-мат лит.

[10] D.M. Gitman, I.V. Tyutin, and B.L. Voronov, Oscillator representations for self-adjoint Calogero Hamiltonians, arXiv:0903.5277

[11] T.Wellman, An introduction to Supersymmetry in Quantum Mechanical Systems, 2003

[12] D.Stanford, E.Witten, Fermionic Localization of the Schwarzian Theory, arXiv:1703.04612