Векторные галилеонные поля

Петров Павел Константинович

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, академик РАН, профессор, зав. кафедрой
Рубаков Валерий Анатольевич

24 мая 2018 г.

Невозможность построения калибровочно-инвариантных галилеонных лагранжианов в 4-рёх мерии была показа в работе: Arbitrary p-form Galileons (Deffayet, S. Deser, arXiv:1007.5278). Простейшие некалибровочно-инвариантные варианты с одним даламбертианом, приводящие к уравнениям движения поля не выше второго порядка, - это:

1. $\mathscr{L} = f(F, B, C, D)A^{\theta}\Box A_{\theta} + +L(A_{\mu}, A_{\mu;\nu})$,
2. $\mathscr{L} = f(C, F)A_{\lambda}A^{\theta;\lambda}\Box A_{\theta} + L(A_{\mu}, A_{\mu;\nu})$,

где:

$$B = A_{\mu}A^{\nu}A^{\mu,\lambda}A_{\nu,\lambda}$$

$$C = A^{\lambda,\mu}A_{\mu}A_{\lambda,\nu}A^{\nu}$$

$$D = A^{\nu}A^{\lambda}A_{\nu,\lambda}$$

$$F = A_{\mu}A^{\mu}$$

Условия устойчивости и отсутствия сверхсветовых возмущений над фоновым решением.

Будем работать в плоском пространстве. Выберем однородное и изотропное фоновое решение $A^\mu = (A(t), 0, 0, 0)$ и разложим лагранжиан до второго порядка над ним.

Для второго варианта:

$$\mathscr{L} = f(C, F) A_\lambda A^{\theta,\lambda} \Box A_\theta + L(B, C, D, F)$$

$$\delta\mathscr{L} = K_{01}(\delta A^{0,i}\delta A_0^{;i}) + K_{00}(\delta A^{0,0}\delta A_{0,0}) + K_{10}(\delta A^{i,0}\delta A^{i}_{,0}) + \\ + K_{11}(\delta A^{i,j}\delta A^{i,j}) + (\ldots)(\delta A^0 \delta A_0) + (\ldots)(\delta A^i \delta A^i) + (\ldots)(\delta A^\lambda \delta A_{0,\lambda}),$$

где:

$$K_{00} = 2f_{CC}A^5\dot{A}^3\ddot{A} + 3A^3\dot{A}\ddot{A}f_C - \frac{d}{dt}(f_C A^3 \dot{A}^2) - 2f_F A^2 \ddot{A} - \\ - 2f_C \dot{A}^3 A^2 - f\dot{A} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(fA) + \\ + 2\dot{A}^2 A^4 (L_{BB} + L_{CC}) + 4L_{BC}A^4\dot{A}^2 + A^2(L_B + L_C)$$

$$K_{01} = -\dot{A}^3 A^2 f_C - \frac{1}{2}(f\dot{A}) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(fA) - L_B A^2 - f_F A^2 \dot{A}$$

$$K_{10} = -f_C A^3 \dot{A}\ddot{A} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(fA) - L_C A^2$$

$$K_{11} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(fA)$$

Для первого варианта:

$$\mathscr{L} = f(F, B, C, D)A^{\theta}\Box A_{\theta} + L(B, C, D, F)$$

$$\delta\mathscr{L} = K_{01}(\delta A^{0,i}\delta A_{0}^{;i}) + K_{00}(\delta A^{0,0}\delta A_{0,0}) + K_{10}(\delta A^{i,0}\delta A^{i}_{,0}) + \\ + K_{11}(\delta A^{i,j}\delta A^{i,j}) + (...)(\delta A^{0}\delta A_{0}) + (...)(\delta A^{i}\delta A^{i}) + (...)(\delta A^{\lambda}\delta A_{0,\lambda}),$$

где:

$$K_{01} = -L_B A^2 - A^3\ddot{A}f_B + f - \\ - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(2A^3\dot{A}(f_B + f_C) + A^3 f_D) + 2A^2\dot{A}^2(f_B + f_C) + \\ + 2A^2\dot{A}f_D + 2A^2 f_F$$

$$K_{10} = f - L_C A^2 - A^3\ddot{A}f_C$$

$$K_{00} = 2\dot{A}^2 A(L_{BB} + L_{CC}) + 4L_{BC}A^4\dot{A} + \frac{1}{2}A^4 L_{DD} +$$
$$+ 2A^4\dot{A}(L_{BD} + L_{CD}) + 2A^5\dot{A}^2\ddot{A}(f_{BB} + f_{CC}) + \frac{1}{2}A^5\ddot{A}f_{DD} +$$
$$+ 4f_{BC}A^5\dot{A}^2\ddot{A} + 2A^5\dot{A}\ddot{A}(f_{CD} + f_{BD}) + A^3\ddot{A}(f_B + f_C) -$$
$$- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(2A^3\dot{A}(f_B + f_C) + A^3 f_D) - f - 2A^2\dot{A}^2(f_B + f_C) -$$
$$- 2A^2\dot{A}f_D - 2A^2 f_F + A^2(L_C + L_B)$$

$$K_{11} = -f$$

Для двух вариантов условия устойчивости при больших энергиях принимают вид:

$$\begin{cases} K_{00} > 0 \\ K_{01} < 0 \\ K_{10} > 0 \\ K_{11} < 0 \end{cases}$$

А условие отсутствия сверхсветовых возмущений имеет вид:

$$\begin{cases} |K_{00}| > |K_{01}| \\ |K_{10}| > |K_{11}| \end{cases}$$

Условия устойчивости и отсутствия сверхсветовых возмущений и уравнения движения оказываются непротиворечивыми и имеют решения как для первого варианта, так и для второго:
Для случая:

$$\mathscr{L} = (C^n + \alpha B^n)A^\mu \Box A_\mu + kB^{n+\frac{2}{3}} + lC^{n+\frac{2}{3}},$$

$$A^\mu = \{\beta t^{-1}, 0, 0, 0\}$$

$$\begin{cases} k < -l(\frac{U_n}{Q_n} + 1) \\ \\ kW_n + l(U_n + W_n) > 0 \\ \\ k + l > 0, \end{cases}$$

где:

$$\beta = (\frac{U_n}{k+l})^{\frac{3}{2}};$$

$$Q_n = \frac{2n}{n+\frac{2}{3}};$$

$$W_n = \frac{2n + 2(1+\alpha)(2n^2 - 8n + 1)}{n+\frac{2}{3}} +$$

$$+ \frac{2 + 2(1+\alpha)(6n^2 + 7n + 1)(n - \frac{1}{3})}{(n+\frac{2}{3})(6n+1)};$$

$$U_n = \frac{1 + (1+\alpha)(6n^2 + 7n + 1)}{(n+\frac{2}{3})(6n+1)}.$$

1. $0 < n \leq n_1$,
   $0 < 1+\alpha$;
2. $n_1 < n < n_2$,
   $0 < 1+\alpha < -\frac{1}{(n-\frac{1}{3})(6n^2+7n+1)+(6n+1)(2n^2-8n+1)}$;
3. $n_2 \leq n$,
   $0 < 1+\alpha$;

где:

$$(n-\frac{1}{3})(6n^2+7n+1)+(6n+1)(2n^2-8n+1)=0 \qquad (0.1)$$

n_1 - меньший положительный корень уравнения (0.1), а n_2 - больший положительный корень того же уравнения. Значения n_1 и n_2:

$$n_1 = \frac{-\sqrt{103}+11}{9} \approx 0.0946...$$

$$n_2 = \frac{\sqrt{103}+11}{9} \approx 2.3499...$$

Для случая:

$$\mathscr{L} = D^2 A^\mu \Box A_\mu + kB^2 + lC^2 + vF^6$$

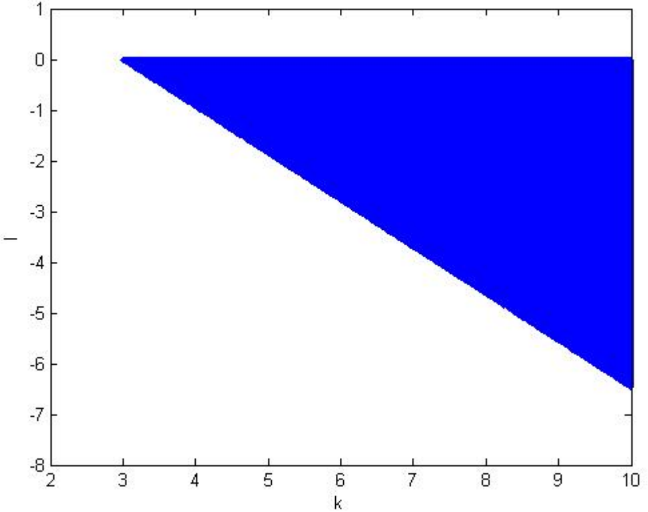
Уравнение движения имеет вид:

$$\beta^4 = \frac{3k + 3l - 5}{v}$$

Условия устойчивости и отсутствия сверхсветовых возмущений:

$$\begin{cases} l > 3 - k \\ l < 0 \\ l > \frac{36-12k}{13} \\ v > 0 \end{cases} \tag{0.2}$$

Область значений параметров (k, l), которая является решением системы (0.2), изображена на рисунке ниже:



Для случая:

$$\mathscr{L} = C^n A^{\mu,\theta} A_\theta \Box A_\mu + kB^{n+1} + lC^{n+1}.$$

Обозначим:

$$Q_n = \frac{4n+1}{n+1} + \frac{6n^2+9n-1}{(n+1)(6n+3)},$$

$$W_n = -\frac{n(6n^2+9n-1)}{(n+1)(6n+3)} + \frac{2n^2+8n+\frac{5}{2}}{n+1},$$

$$U_n = \frac{6n^2+9n-1}{(n+1)(6n+3)}.$$

Тогда устойчивое решение имеет вид:

$$A^\mu = \{\beta t^{-1}, 0, 0, 0\},$$

где:

$$\beta = -\frac{U_n}{(k+l)}.$$

При этом k и l должны удовлетворять условиям:

при $0 < n < \frac{\sqrt{\frac{35}{3}}-3}{4}$:

$$\begin{cases} k < l(\frac{U_n}{Q_n} - 1) \\ k > l(\frac{U_n}{W_n} - 1) \\ k + l > 0, \end{cases}$$

при $n > \frac{\sqrt{\frac{35}{3}}-3}{4}$:

$$\begin{cases} k < l(\frac{U_n}{W_n} - 1) \\ k > l(\frac{U_n}{Q_n} - 1) \\ k + l < 0. \end{cases}$$

Для того чтобы теория являлась галилеоном в искривлённом пространстве, небходимо, чтобы в тензоре энергии-импульса отсутствовали третьи производные как по метрике, так и по полям.
Тензор энергии-импульса для лагранжиана :

$$\mathscr{L}_{(1)} = f(F, B, C, D)A^{\theta}\Box A_{\theta} + L(A_{\mu}; A_{\mu;\nu}),$$

в старшем порядке имеет вид:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \Rightarrow & f_B\sqrt{-g}g^{\mu\theta}(\delta B\partial_{\mu\theta}F + \delta F\partial_{\mu\theta}B) + \\ & + f_C\sqrt{-g}g^{\mu\theta}(\delta C\partial_{\mu\theta}F + \delta F\partial_{\mu\theta}C) + \\ & + f_D\sqrt{-g}g^{\mu\theta}(\delta D\partial_{\mu\theta}F + \delta F\partial_{\mu\theta}D) + ... \end{aligned} \tag{0.3}$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в (0.3) в старшем порядке.

1. Первое слагаемое:

$$f_B\sqrt{-g}g^{\mu\theta}(\delta B\partial_{\mu\theta}F+\delta F\partial_{\mu\theta}B)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{-g}f_Y g^{\mu\theta}(F^\nu\partial_{\nu\mu\theta}F-F^\nu\partial_{\nu\mu\theta}F)\delta F=0+\dots$$

2. Второе слагаемое:

$$f_C\sqrt{-g}g^{\mu\theta}(\delta C\partial_{\mu\theta}F+\delta F\partial_{\mu\theta}C)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2f_C\sqrt{-g}g^{\xi\psi}A^{\lambda;\theta}A_\theta A^\mu A^\nu A^\rho(\partial_{\xi\psi\rho}A_\lambda-\partial_{\xi\psi\lambda}A_\rho)\delta g_{\mu\nu}+\dots$$

3. Третье слагаемое:

$$f_D\sqrt{-g}g^{\mu\theta}(\delta D\partial_{\mu\theta}F+\delta F\partial_{\mu\theta}D)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -f_D\sqrt{-g}A^\lambda A^\rho A^\mu A^\nu g^{\psi\theta}(\partial_{\psi\theta\lambda}A_\mu\delta g_{\rho\nu}-\partial_{\psi\theta\lambda}A_\rho\delta g_{\mu\nu})=0+\dots$$

Рассмотрим случай, когда:

$$f_C \neq 0$$

Попробуем добавить в лагранжиан первого типа для поля A_ν дополнительное слагаемое вида $P(A_\mu, A_{\nu;\theta}; g_{\xi\psi})$, такое, что при его добавлении сокращались бы третьи производные в тензоре энергии-импульса.
Общий вид для слагаемого P при условии, что рассматриваются только варианты, содержащие тензор кривизны в степени не выше первой, - это:

$$P = R_{\mu\nu\theta\rho} K^{\mu\nu\theta\rho}(A_{\xi;\lambda}; A_\psi),$$

Но, проведя более детальный анализ, получаем, что невозможно подобрать такое слагаемое P, чтобы сократить третьи производные $T_{\mu\nu}$.

Аналогично для второго варианта лагранжиана получаем, что в $T_{\mu\nu}$ остаются третьи производные, а также то, что невозможно добавить такое дополнительное слагаемое в лагранжиан, чтобы избавиться от третьих производных в $T_{\mu\nu}$. Поэтому при условии, что рассматривается только возможность добавления членов, содержащих тензор кривизны в степени не выше первой, общий вид лагранжиана, содержащего один даламбертиан от A_ν, который при этом является галилеоном в пространстве с произвольной метрикой, - это:

$$\mathscr{L}_{(1)}^{gal} = f(B, D, F) A^\theta \Box A_\theta + L(A_\mu; A_{\mu;\nu}).$$

Устойчивое решение, нарушающее изотропное условие энергодоминантности.

Изотропное условие энергодоминантности:

$$T_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} > 0,$$

где n^{ν} - произвольный светоподобный и изотропный вектор. Для упрощения дальнейшего анализа будем рассматривать случай, когда функция f зависит не от трёх переменных, а от одной переменной, содержащей производную, и переменной F. Очевидно, что вариант:

$$f = f(F)$$

$$\mathscr{L} = f(F) A^{\theta} \Box A_{\theta} + L(A_{\mu}; A_{\mu;\nu})$$

не является галилеоном, т.к. $F = A_{\nu} A^{\nu}$, поэтому не представляет интерес для дальнейшего анализа.

Рассмотрим случай, когда:

$$f = f(B, F)$$

$$\mathscr{L} = f(B)A^{\theta}\Box A_{\theta} + L(A_{\mu}; A_{\mu;\nu}),$$

Заметим, что член со вторыми производными в этом варианте аналогичен члену со старшими производными в галилеонном лагранжиане для скалярного поля с точностью до замены:

$$\pi \to F,$$

где π - скалярное поле.

$$f(F, B)[A^{\mu}\Box A_{\mu} + A_{\mu,\nu}A^{\mu,\nu}] \to \frac{1}{2}f(\pi; \frac{1}{4}\pi^{\nu}\pi_{\nu})\Box\pi.$$

Рассмотрим вариант $f = f(D, F)$, тогда лагранжиан имеющий устойчивое решение, принимает вид:

$$\mathscr{L} = D^2 A^\mu \Box A_\mu + kB^2 + lC^2 + vF^6.$$

Устойчивое фоновое решение, нарушающие NEC, имеет вид:

$$A^\mu = (\beta t^{-1}, 0, 0, 0).$$

Уравнение движения принимает вид:

$$\beta^4 = \frac{3k + 3l - 5}{v}$$

Система уравнений на устойчивость фонового решения, нарушения условия NEC и отсутствие сверхсветовых возмущений принимает вид:

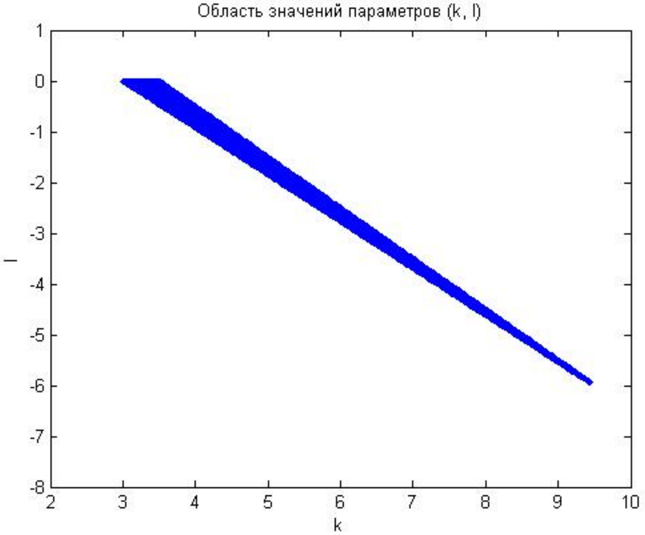
$$\begin{cases} l < 0 \\ l > 3 - k \\ l < 3.5 - k \\ l > \frac{36-12k}{13} \\ v > 0 \end{cases} \tag{0.4}$$

Тензор энергии-импульса имеет вид:

$$T_{00} = 0; \quad T_{i0} = T_{0i} = 0$$

$$T_{ij} = -\beta^8 t^{-12}(4(k+l) - 14)\eta_{ij}$$

Область значений параметров (k, l), которая является решением системы (0.4), изображена на рисунке ниже:



Выводы 1/3

- Построены лагранжианы для векторных полей, содержащие вторые производные, но приводящие к уравнениям поля второго порядка.
- Получены условия устойчивости и условия отсутствия сверхсветовых возмущений для двух вариантов лагранжианов для однородного и изотропного фонового решения в плоском пространстве.
- Для двух вариантов лагранжианов показана возможность существования однородного и изотропного устойчивого решения, удовлетворяющего условиям отсутствия сверхсветовых возмущений над ним.

Выводы 2/3

- В явном виде для двух вариантов лагранжианов найдены устойчивые решения, удовлетворяющие условиям отсутствия сверхсветовых возмущений над ними.
- Показано, что лагранжиан первого типа при зависимости функции f от C невозможно сделать галилеоном в искривлённом пространстве никакими дополнительными членами вида: $R_{\mu\nu\theta\rho}K^{\mu\nu\theta\rho}(A_{\xi,\lambda};A_{\psi})$.
- Доказано, что лагранжиан второго типа невозможно сделать галилеоном в искривлённом пространстве никакими дополнительными членами вида: $R_{\mu\nu\theta\rho}K^{\mu\nu\theta\rho}(A_{\xi,\lambda};A_{\psi})$.
- Найден общий вид лагранжиана, содержащего один даламбертиан от A_{ν}, который является галилеоном в пространстве с произвольной метрикой.

Выводы 3/3

- Показано, что вариант, когда функция f зависит только от двух переменных и F соответственно, является аналогом скалярного галилеона, который уже исследовался в различных работах.
- Найден векторный галилеонный лагранжиан, который не является аналогом скалярного галилеона, т.е. является новым и актуальным для дальнейшего исследования.
- Показано наличие у этого галилеонного лагранжиана устойчивого решения, нарушающего изотропное условие энергодоминантности, что открывает возможность построения различных перспективных космологических теорий, рассматривающих нарушения условия NEC.

Спасибо за внимание!