ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

"БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА"

# **"ВЕКТОРНЫЕ ГАЛИЛЕОННЫЕ ПОЛЯ"**

Выполнил студент
443 группы:
Петров Павел Константинович

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, академик РАН, профессор, зав. кафедрой
Рубаков Валерий Анатольевич

Москва
2018 г.

# Оглавление

# Введение

Физические модели с галилеонными полями представляют большой интерес, так как позволяют построить теорию с отсутствием как духовых, так и градиентарных неустойчивостей, нарушающую изотропное условие энергодоминантности (NEC):

$$T_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} > 0, \tag{0.0.1}$$

где: $n^{\nu}$ - произвольный изотропный светоподобный вектор.
В свою очередь, теории, нарушающие NEC, интересны тем, что позволяют строить и исследовать множество новых космологических моделей и сценариев, например: "генезис"([5], [7],[14]); "создание вселенной в лаборатории"[11] ; теории с "кротовыми норами"и "горловинами"[6], вселенную с "отскоком"([13], [8], [15])
Впервые теории с галилеонным лагранжианом, т.е. лагранжианом, содержащим вторые производные, но приводящим к уравнениям движения поля второго порядка, были обнаружены в работе Г. Хорндески [10]. В этой работе теорией с галилеонным лагранжианом была теория с классическим скалярным полем. В дальнейшем лагранжиан со скалярными галилеонами был подробно исследован и использован для построения теорий, нарушающих NEC и описывающих различные космологические модели и сценарии.
Следующий естественный шаг - это попытка построения теорий с векторными галилеонными полями.
Основной целью данной работы является построение и изучение векторных галилеонных лагранжианов, а также нахождение устойчивого решения уравнений движения, нарущающего NEC.
Глава 1 посвящена поиску и исследованию лагранжианов для векторных галилеонных полей.
В разделе 1.1 данной работы строятся простейшие варианты лагранжианов для векторных полей, содержащих вторые производные от векторного поля $A^{\mu}$, но приводящих к уравнениям движения поля не выше второго порядка. Раздел 1.2-1.3 посвящён нахождению условий устойчивости в плоском пространстве для лагранжианов, полученных в разделе 1.1. В разделах 1.4-1.5 демонстрируется возможность существования устойчивых решений, а также определяется конкретный вид лагранжианов и условия на значения параметров в этих лагранжианах. Раздел 1.6 посвящён исследованию галилеоннных лагранжианов в кривом пространстве, а именно проверке отсутствия третьих производных как от метрики, так и от полей в тензоре энергии-импульса. Также в разделе 1.6 сделана попытка модификаций модели, являющейся галилеоном в плоском пространстве, в модель, являющуюся галилеоном в пространстве с произвольной метрикой.
Глава 2 посвящена поиску решения для векторных галилеонных полей, позволяющего нарушить условие NEC.

В заключительном разделе данной работы мы подводим итог и даём краткий обзор полученных результатов.

# Глава 1

# Векторные галилеонные поля

## 1.1 Простейшие лагранжианы для векторных галилеонных полей

**Используемые обозначения:**

$$f_{XY} = \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y}$$

$$f_X = \frac{\partial f}{\partial X}$$

Невозможность построения калибровочно-инвариантных лагранжианов в 4-мерии была показа в работе [4].
Поэтому попытаемся построить некалибровочно-инвариантные теории для векторных полей, содержащие производные второго порядка в лагранжиане, но при этом приводящие к уравнениям движения поля с производными не старше второй. Простейшие возможные конструкции, содержащие одну вторую производную от фундаментального поля $A_\mu$ и не сводящиеся интегрированием по частям к лагранжианам первого порядка, это:

$$\mathscr{L}_{(1)} = f(A_\mu; A_{\mu;\lambda})A^\theta \Box A_\theta \tag{1.1.1}$$

$$\mathscr{L}_{(2)} = f(A_\mu; A_{\mu;\xi})A_\lambda A^{\theta;\lambda} \Box A_\theta \tag{1.1.2}$$

$$\mathscr{L}_{(3)} = f(A_\mu; A_{\mu;\xi})A_\lambda A^{\lambda;\theta} \Box A_\theta \tag{1.1.3}$$

Уравнения движения для поля эквивалентны условию:

$$\delta(\sqrt{-g}\mathscr{L}) = 0, \tag{1.1.4}$$

где вариация берётся по $\delta A_\mu$. Рассмотрим вариант (1.1.1), заметим, что с точностью до членов, содержащих младшие производные, он переписывается как:

$$f(A_\mu; A_{\mu;\lambda})A^\theta \Box A_\theta = \frac{1}{2} f(A_\mu; A_{\mu,\lambda})\Box F + ..., \tag{1.1.5}$$

где

$$F = A_\mu A^\mu. \tag{1.1.6}$$

Будем искать лагранжиан для варианта (1.1.1) в виде:

$$\mathscr{L}_{(1)} = \frac{1}{2} f(F;X) \Box F, \tag{1.1.7}$$

где $X = X(A_\mu; A_{\mu;\lambda})$, тогда, расписывая условие (1.1.4) с точностью до членов, содержащих младшие производные, получаем:

$$\delta(\sqrt{-g}\mathscr{L}_{(1)}) = \sqrt{-g} f_X g^{\theta\lambda} (\delta X \partial_{\theta\lambda} F + \delta F \partial_{\theta\lambda} X) + ... = 0 \tag{1.1.8}$$

Видим, что (1.1.8) не содержит производные третьего порядка, если:

$$\delta X \partial_{\theta\lambda} F + \delta F \partial_{\theta\lambda} X = 0 + ... \tag{1.1.9}$$

с точностью до членов со вторыми производными.
Построим все возможные конструкции для $X$, содержащие $A_\mu$ и производные поля в степени не выше второй. Условие (1.1.9) выполняется лишь для :

$$X = B = A_\mu A^\nu A^{\mu;\lambda} A_{\nu;\lambda} \tag{1.1.10}$$

$$X = C = A^{\lambda;\mu} A_\mu A_{\lambda;\nu} A^\nu \tag{1.1.11}$$

$$X = D = A^\nu A^\lambda A_{\nu;\lambda} \tag{1.1.12}$$

Заметим, что для произвольной функция вида: $f = f(F, B, C, D)$ уравнение движения также не будет содержать члены с третьими производными от полей, так как в старшем порядке по производным от поля:

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}\mathscr{L}_{(1)}) =& \delta B \partial_{\theta\lambda} F + \delta F \partial_{\theta\lambda} B + \delta C \partial_{\theta\lambda} F + \delta F \partial_{\theta\lambda} C + \\ &+ \delta D \partial_{\theta\lambda} F + \delta F \partial_{\theta\lambda} D = 0 + ...\end{aligned} \tag{1.1.13}$$

Тогда получаем первый вариант лагранжиана для случая (1.1.1):

$$\mathscr{L}_{(1)} = f(F, B, C, D) A^\theta \Box A_\theta + L(A_\mu; A_{\mu;\nu}) \tag{1.1.14}$$

Рассмотрим вариант (1.1.2). Будем искать лагранжиан для варианта(1.1.2) в виде:

$$\mathscr{L}_{(2)} = f(F;X) A_\lambda A^{\theta;\lambda} \Box A_\theta, \tag{1.1.15}$$

где $X = X(A_\mu; A_{\mu;\lambda})$. При такой структуре лагранжиана (1.1.15) отсутствие третьих производных в уравнениях движения (1.1.4) эквивалентно:

$$f_X (\delta X \Box A_\theta + \Box X \delta A_\theta) = 0 \tag{1.1.16}$$

Построим все возможные конструкции для $X$, содержащие $A_\mu$ и производные поля в степени не выше второй. Условие (1.1.16) выполняется лишь для :

$$X = C = A^{\lambda;\mu} A_\mu A_{\lambda;\nu} A^\nu \tag{1.1.17}$$

Тогда второй лагранжиан, который не содержит третьих производных в уравнениях движения, имеет вид:

$$\mathscr{L}_{(2)} = f(C, F) A_\lambda A^{\theta;\lambda} \Box A_\theta + L(A_\mu; A_{\mu;\nu}) \tag{1.1.18}$$

Рассмотрим вариант (1.1.3). Будем искать лагранжиан для варианта (1.1.3) в виде:

$$\mathscr{L}_{(3)} = f(F; X) A_\lambda A^{\lambda;\theta} \Box A_\theta, \tag{1.1.19}$$

где

$$X = X(A_\mu; A_{\mu;\lambda}). \tag{1.1.20}$$

Так как функция $f$ произвольная, то вариант (1.1.3) не должен содержать третьи производные в уравнениях движения при любом выборе функции $f$, в частности, и при:

$$f = 1 \tag{1.1.21}$$

При таком выборе (1.1.21) функции $f$ условие отсутствия третьих производны в уравнениях движения эквивалентно условию:

$$(A_\lambda \Box A^{\lambda;\theta} - A^\theta \Box A^{\lambda;}{}_\lambda) \delta A_\theta = 0 \tag{1.1.22}$$

Видим, что условие (1.1.22) не выполняется, а значит вне зависимости от выбора $X$ в выражении (1.1.19) вариант (1.1.3) будет содержать третьи производные в уравнениях движения.

Итак, простейшие лагранжианы для векторных полей, содержащие одну вторую производную, но приводящие к уравнениям движения поля второго порядка, это:

$$\mathscr{L}_{(1)} = f(F, B, C, D) A^\theta \Box A_\theta + L(A_\mu; A_{\mu;\nu}) \tag{1.1.23}$$

и

$$\mathscr{L}_{(2)} = f(C, F) A_\lambda A^{\theta;\lambda} \Box A_\theta + L(A_\mu; A_{\mu;\nu}), \tag{1.1.24}$$

где $F$, $B$, и , $D$ - жёстко заданнные конструкции из $A^\nu$ и $A^{\mu;\theta}$, определяемые формулами ниже:

$$F = A_\mu A^\mu \tag{1.1.25}$$

$$B = A_\mu A^\nu A^{\mu;\lambda} A_{\nu;\lambda} \tag{1.1.26}$$

$$C = A^{\lambda;\mu} A_\mu A_{\lambda;\nu} A^\nu \tag{1.1.27}$$

$$D = A^\nu A^\lambda A_{\nu;\lambda} \tag{1.1.28}$$

## 1.2 Условия устойчивости в плоском пространстве для первого варианта лагранжиана

**Используемые обозначения:**

$$A^{\mu} = (A^0, A^i)$$

$$A_{\mu} = (A_0, A_i) = (A^0, -A^i)$$

$$\delta A^{0,i}\delta A_0^{;i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \delta A^0}{\partial x_i}\frac{\partial \delta A_0}{\partial x_i}$$

$$\delta A^{i,0}\delta A^{i}_{,0} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \delta A^i}{\partial x_0}\frac{\partial \delta A^i}{\partial x^0}$$

$$\delta A^{i,j}\delta A^{i,j} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \delta A^i}{\partial x_j}\frac{\partial \delta A^i}{\partial x_j}$$

$$x^{\mu} = (x^0, x^i) = (t, x^i)$$

$$\dot{A}(t) = \frac{dA(t)}{dt}$$

$$\ddot{A}(t) = \frac{d^2A(t)}{dt^2}$$

$$\dddot{A}(t) = \frac{d^3A(t)}{dt^3}$$

$$A^{\mu,\nu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial A_{\nu}}$$

$$A^iA^i = \sum_{i=1}^{3} A^iA^i$$

$i, j$ - трёхмерные индексы. Все остальные индексы - четырёхмерные.

Будем работать в плоском четырёхмерном пространстве с метрикой:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$A^{\mu} = (A^0, A^i)$$

$$A_\mu = (A_0, A_i) = (A^0, -A^i)$$

**Рассмотрим лагранжиан первого типа:**

$$\mathscr{L}_{(1)} = f(B;C;D;F)A^\theta \Box A_\theta + L(A_\mu; A_{\mu;\nu}) \tag{1.2.1}$$

Для удобства дальнейшего анализа будем рассматривать функции $L$ вида:

$$L = L(B;C;D;F). \tag{1.2.2}$$

Как мы увидим ниже (1.2.6 - 1.2.8) такой выбор (1.2.2) структуры функции $L$ оправдан тем, что позволяет добиться ненулевых вкладов в $K_{00}$, $K_{01}$ и $K_{11}$, что в дальнейшем облегчает поиск устойчивого решения (см. раздел 1.4).
При таких предположениях (1.2.2) исходный лагранжиан (1.2.1) принимает вид:

$$\mathscr{L}_{(1)} = f(B;C;D;F)A^\theta \Box A_\theta + L(B;C;D;F). \tag{1.2.3}$$

Выберем однородное и изотропное фоновое решение:

$$A^\mu_{back} = (A(t), 0, 0, 0), \tag{1.2.4}$$

в дальнейшем будем обозначать $A(t)$ за $A$. Разложим лагранжиан до второго порядка над этим фоновым решением, заметим, что члены при вариациях первого порядка обращаются в ноль, так как мы рассматриваем $A(t)$, удовлетворяющую уравнениям движения. После разложения и приведения подобных получаем:

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L}_{(1)} = {}& K_{01}(\delta A^{0,i}\delta A_0^{;i}) + K_{00}(\delta A^{0,0}\delta A_{0,0}) + K_{10}(\delta A^{i,0}\delta A^i_{,0}) + \\ &+ K_{11}(\delta A^{i,j}\delta A^{i,j}) + (...)(\delta A^0\delta A_0) + (...)(\delta A^i\delta A^i) + (...)(\delta A^\lambda \delta A_{0,\lambda}),\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

где:

$$\begin{aligned}K_{00} = {}& 2\dot{A}^2 A(L_{BB} + L_{CC}) + 4L_{BC}A^4\dot{A} + \frac{1}{2}A^4 L_{DD} + \\ &+ 2A^4\dot{A}(L_{BD} + L_{CD}) + 2A^5\dot{A}^2\ddot{A}(f_{BB} + f_{CC}) + \frac{1}{2}A^5\ddot{A}f_{DD} + \\ &+ 4f_{BC}A^5\dot{A}^2\ddot{A} + 2A^5\dot{A}\ddot{A}(f_{CD} + f_{BD}) + A^3\ddot{A}(f_B + f_C) - \\ &- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(2A^3\dot{A}(f_B + f_C) + A^3 f_D) - f - 2A^2\dot{A}^2(f_B + f_C) - 2A^2\dot{A}f_D - \\ &- 2A^2 f_F + A^2(L_C + L_B)\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

$$\begin{aligned}K_{01} = {}& -L_B A^2 - A^3\ddot{A}f_B + f - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(2A^3\dot{A}(f_B + f_C) + A^3 f_D) + \\ &+ 2A^2\dot{A}^2(f_B + f_C) + 2A^2\dot{A}f_D + 2A^2 f_F\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

$$K_{10} = f - L_C A^2 - A^3 \ddot{A} f_C \tag{1.2.8}$$

$$K_{11} = -f \tag{1.2.9}$$

Тогда условия устойчивости при больших энергиях принимают вид:

$$\begin{cases} K_{00} > 0 \\ K_{01} < 0 \\ K_{10} > 0 \\ K_{11} < 0 \\ \end{cases} \tag{1.2.10}$$

А условие на движение возмущений над фоновым решением со скоростью меньше световой имеет вид:

$$\begin{cases} |K_{00}| > |K_{01}| \\ |K_{10}| > |K_{11}| \end{cases} \tag{1.2.11}$$

## 1.3 Условия устойчивости в плоском пространстве для второго варианта лагранжиана

**Рассмотрим лагранжиан второго типа:**

$$\mathscr{L}_{(2)} = f(C;F) A_\lambda A^{\theta;\lambda} \Box A_\theta + L(A_\mu; A_{\mu;\nu}) \tag{1.3.1}$$

Для удобства дальнейшего анализа будем рассматривать функции $L$ вида:

$$L = L(B;C). \tag{1.3.2}$$

Как мы увидим ниже (1.3.5 - 1.3.7), такой выбор (1.3.2) структуры функции $L$ оправдан тем, что позволяет добиться ненулевых вкладов в $K_{00}$, $K_{01}$ и $K_{11}$, что в дальнейшем облегчает поиск устойчивого решения (см. пар. 1.5).
При таких предположениях (1.3.2) исходный лагранжиан (1.3.1) принимает вид:

$$\mathscr{L}_{(2)} = f(C;F) A_\lambda A^{\theta;\lambda} \Box A_\theta + L(B;C). \tag{1.3.3}$$

Выберем такое же фоновое решение (1.2.4), как и для лагранжиана первого типа. Разложим лагранжиан до второго порядка над этим фоновым решением, заметим, что члены при вариациях первого порядка обращаются в ноль, так как мы рассматриваем функцию $A(t)$, удовлетворяющую уравнениям движения. После разложения и приведения подобных получаем:

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L}_{(2)} = K_{01}(\delta A^{0,i}\delta A^{;i}_{0}) + K_{00}(\delta A^{0,0}\delta A_{0,0}) + K_{10}(\delta A^{i,0}\delta A^{i}_{,0}) + \\ + K_{11}(\delta A^{i,j}\delta A^{i,j}) + (...)(\delta A^{0}\delta A_{0}) + (...)(\delta A^{i}\delta A^{i}) + (...)(\delta A^{\lambda}\delta A_{0,\lambda}),\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

где:

$$\begin{aligned}K_{00} = 2f_{CC}A^5\dot{A}^3\ddot{A} + 3A^3\dot{A}\ddot{A}f_C - \frac{d}{dt}(f_C A^3\dot{A}^2) - 2f_F A^2\ddot{A} - \\ - 2f_C\dot{A}^3A^2 - f\dot{A} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(fA) + 2\dot{A}^2A^4(L_{BB} + L_{CC}) + \\ + 4L_{BC}A^4\dot{A}^2 + A^2(L_B + L_C)\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

$$K_{01} = -\dot{A}^3A^2f_C - \frac{1}{2}(f\dot{A}) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(fA) - L_BA^2 - f_FA^2\dot{A} \tag{1.3.6}$$

$$K_{10} = -f_CA^3\dot{A}\ddot{A} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(fA) - L_CA^2 \tag{1.3.7}$$

$$K_{11} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(fA) \tag{1.3.8}$$

В связи с тем что разложение для второго варианта лагранжиана (1.3.4) схоже по структуре с разложением для первого варианта лагранжиана (1.2.5), условия устойчивости при больших энергиях и условие на движение возмущений над фоновым решением со скоростью меньше световой для второго варианта лагранжиана принимают такой же вид, как и для первого варианта лагранжиана. Разница заключается лишь в определении коэффициентов $K_{00}$, $K_{01}$, $K_{10}$ и $K_{11}$. Для второго варианта лагранжиана они определены формулами (1.3.5-1.3.8).

## 1.4 Поиск устойчивого решения для первого варианта лагранжиана

Покажем возможность существования фонового решения уравнений движения для лагранжиана первого типа (1.2.3) , удовлетворяющего условию устойчивости (1.2.10) и условию на движение возмущений над этим фоновым решением со скоростью меньше световой (1.2.11). Для упрощения дальнейшего анализа ограничимся случаями, когда функция $f$ зависит не от 4 переменных, как в варианте (1.2.3), а от меньшего количества переменных.

### 1.4.1 f=f(B,C)

Пусть:

$$f = f(B; C), \tag{1.4.1}$$

при таких предположениях лагранжиан (1.2.3) принимает вид:

$$\mathscr{L} = f(B; C) A^{\mu} \Box A_{\mu} + L(A_{\mu}; A_{\mu;\nu}) \tag{1.4.2}$$

Сделаем ещё одно упрощение, а именно выберем структуру функции $L$, будем считать, что:

$$L(A_{\mu}; A_{\mu;\nu}) = L(B, C) \tag{1.4.3}$$

Тогда исходный лагранжиан принимает вид:

$$\mathscr{L} = f(B; C) A^{\mu} \Box A_{\mu} + L(B, C) \tag{1.4.4}$$

В дальнейшем мы увидим, что такие предположения (1.4.1) и (1.4.2) о структуре функций $L$ и $f$ позволяют удовлетворить как условию (1.2.10), так и условию (1.2.11).

Беря вариацию первого порядка от лагранжиана, получаем уравнение движения для $A$ :

$$\begin{gathered}\Box(fA) + f\ddot{A} + A\ddot{A}[2\dot{A}^2 A(f_B + f_C)] - \frac{d}{dt}(2\ddot{A}A^3\dot{A}[f_B + f_C]) + 2\dot{A}^2 A(L_B + L_C) - \\ - \frac{d}{dt}[2A^2\dot{A}(L_B + L_C)] = 0\end{gathered} \tag{1.4.5}$$

Заметим, что в уравнении движения члены со старшими производными сокращаются, т.е. уравнение движения содержит производные не старше второй от $A^{\mu}$. Выпишем только члены со старшими производными, содержащимися в уравнении движения:

$$\begin{gathered}\Box(fA) - \frac{d}{dt}[A\ddot{A}(2A^2\dot{A}[f_B + f_C])] = \dddot{A}[2A^3\dot{A}(f_B + f_C)] - \\ - \dddot{A}[2A^3\dot{A}(f_B + f_C)] + ... = 0 + ...\end{gathered} \tag{1.4.6}$$

Т.е. видим, что в уравнении движения остались только члены с $\dot{A}$ и $\ddot{A}$, $A$.
Для дальнейшего упрощения выберем конкретный вид функций $f$ и $L$, а именно степенной:

$$f = C^n + \alpha B^n \tag{1.4.7}$$

$$L = kB^m + lC^m, \tag{1.4.8}$$

где $k$, $l$, $m$, $n$ и $\alpha$ - числа. В дальнейшем будем рассматривать случай:

$$n > 0, \tag{1.4.9}$$

так как хотелось бы исследовать физические модели, лагранжианы которых стремятся к нулю или константе при стремлении $A^\mu$ к нулю, т.е. такие:

$$\lim_{A^\mu \to 0} \mathscr{L} = const. \tag{1.4.10}$$

Хотя стоит отметить, что требование (1.4.9) является более сильным, чем требование (1.4.10), но в данной работе будем требовать от рассматриваемых лагранжианов именно (1.4.9), а не (1.4.10).
В дальнейшем хотелось бы, чтобы фоновое решение уравнения движения (1.4.5) имело бы также степенной вид. Для этого достаточно потребовать, чтобы лагранжиан при преобразованиях растяжения и сжатия координат, т.е. преобразованиях вида: $x^\mu \to \lambda x^\mu$, преобразовывался бы как:

$$\mathscr{L} \to \lambda^p \mathscr{L}, \tag{1.4.11}$$

а

$$A_\mu \to \lambda^q A_\mu, \tag{1.4.12}$$

где $p$ и $q$ - некотрые числа. Тогда $A_\mu$ должен иметь степенной вид. Выберем конкретный степенной вид для $A_\mu$:

$$A = \beta t^{-1} \tag{1.4.13}$$

Тогда:

$$q = -1 \tag{1.4.14}$$

И поэтому:

$$m = n + \frac{2}{3} \tag{1.4.15}$$

$$p = -6n - 4 \tag{1.4.16}$$

Рассматриваем только значения $t > 0$ и $n > 0$
При таких предположениях уравнение движения принимает вид:

$$k\beta^{\frac{2}{3}} = -l\beta^{\frac{2}{3}} + \frac{1 + (1+\alpha)(6n^2 + 7n + 1)}{(n + \frac{2}{3})(6n+1)} \tag{1.4.17}$$

Условия устойчивости (1.2.10) и условия на движение возмущений над фоновым решением со скоростью меньше световой (1.2.11) имеют вид:

$$\begin{cases} l\beta^{\frac{2}{3}} < -\frac{2n}{n+\frac{2}{3}} \\ l\beta^{\frac{2}{3}} > -\frac{2n+2(1+\alpha)(2n^2-8n+1)}{n+\frac{2}{3}} - \frac{2+2(1+\alpha)(6n^2+7n+1)(n-\frac{1}{3})}{(n+\frac{2}{3})(6n+1)} \\ 1+\alpha > 0 \end{cases} \tag{1.4.18}$$

Видим, что $l$ всегда будет меньше нуля, т.к. для любого $n > 0$ выполняется:

$$\frac{2n}{n+\frac{2}{3}} > 0,$$

что означает совместность уравнения (1.4.17) и системы (1.4.18).
А исходный лагранжиан принимает вид:

$$\mathscr{L} = (C^n + \alpha B^n)A^\mu \Box A_\mu + kB^m + lC^m \tag{1.4.19}$$

Обозначим:

$$Q_n = \frac{2n}{n+\frac{2}{3}}$$

$$W_n = \frac{2n + 2(1+\alpha)(2n^2 - 8n + 1)}{n+\frac{2}{3}} + \frac{2 + 2(1+\alpha)(6n^2 + 7n + 1)(n - \frac{1}{3})}{(n+\frac{2}{3})(6n+1)}$$

$$U_n = \frac{1 + (1+\alpha)(6n^2 + 7n + 1)}{(n+\frac{2}{3})(6n+1)}$$

В этих обозначениях:

$$\beta = (\frac{U_n}{k+l})^{\frac{3}{2}} \tag{1.4.20}$$

А система (1.4.18) и уравнение (1.4.17) имеют решение при определённом значении параметров $\alpha$, $k$, $l$, а именно:

$$\begin{cases} k < -l(\frac{U_n}{Q_n} + 1) \\ \\ kW_n + l(U_n + W_n) > 0 \\ \\ k + l > 0 \end{cases} \tag{1.4.21}$$

1. $0 < n \leq n_1$,
   $0 < 1 + \alpha$;

2. $n_1 < n < n_2$,
   $0 < 1 + \alpha < -\frac{1}{(n-\frac{1}{3})(6n^2+7n+1)+(6n+1)(2n^2-8n+1)}$;

3. $n_2 \leq n$,
   $0 < 1 + \alpha$;

где:

$$(n-\frac{1}{3})(6n^2+7n+1)+(6n+1)(2n^2-8n+1)=0 \tag{1.4.22}$$

$n_1$ - меньший положительный корень уравнения (1.4.22), а $n_2$ - больший положительный корень того же уравнения. Значения $n_1$ и $n_2$:

$$n_1=\frac{-\sqrt{103}+11}{9}\approx 0.0946...$$

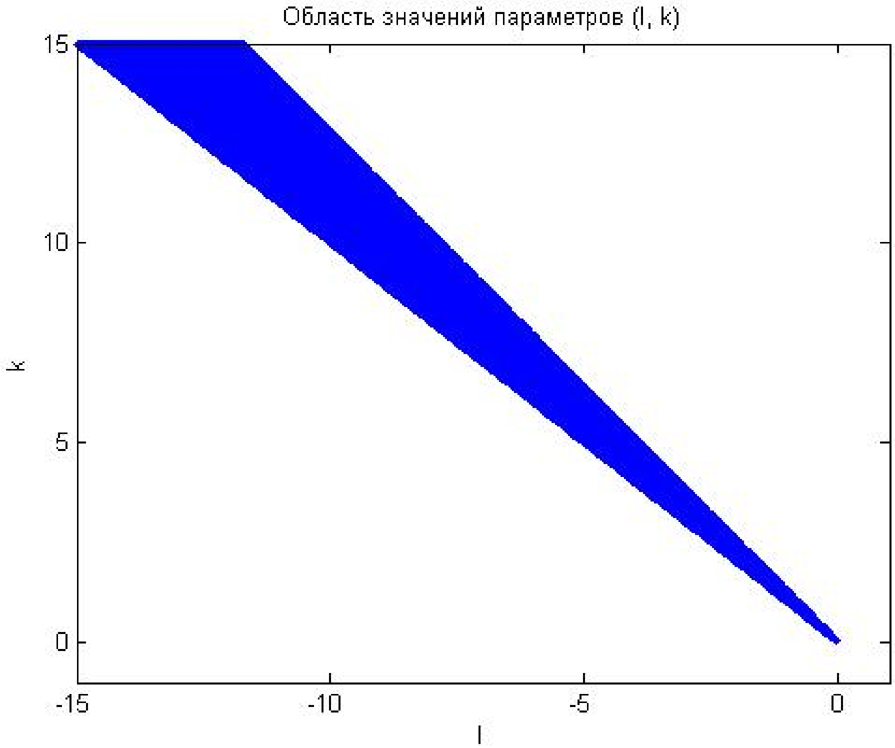
$$n_2=\frac{\sqrt{103}+11}{9}\approx 2.3499...$$

Для иллюстрации решения системы (1.4.21) найдём решения этой системы при конкретных значениях $n$ и $\alpha$.
Система (1.4.21) при значениях $n=3$ и $\alpha=0$ имеет вид:

$$\begin{cases} k>-\frac{175}{144}l \\ \\ k<-\frac{191}{114}l \\ \\ k>-l \end{cases} \tag{1.4.23}$$

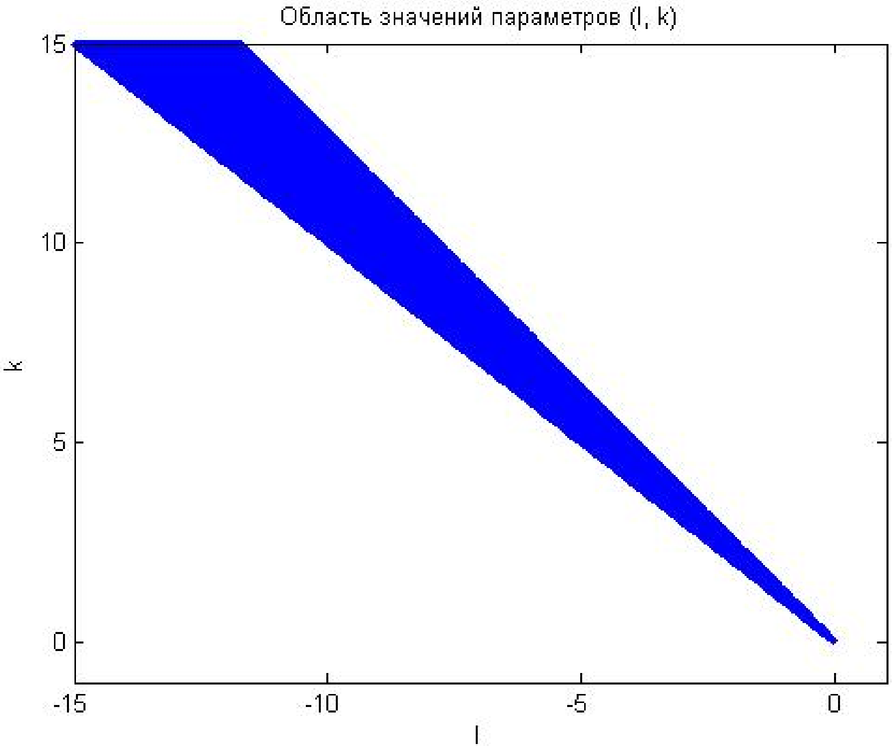
Область значений параметров $(k,l)$, которая является решением системы (1.4.23), изображена на рисунке ниже:

Система (1.4.21) при значениях $n=3$ и $\alpha=1$ имеет вид:




$$\begin{cases} k < -\frac{89}{36} \\ k < -\frac{2099}{1640} \\ k > -l \end{cases} \qquad (1.4.24)$$

Область значений параметров $(k, l)$, которая является решением системы (1.4.24), изображена на рисунке ниже:




## 1.4.2 f=f(D)

Пусть:

$$f = f(D), \tag{1.4.25}$$

при таких предположениях лагранжиан (1.2.3) принимает вид:

$$\mathscr{L} = f(D)A^{\mu}\Box A_{\mu} + L(A_{\mu}; A_{\mu;\nu}) \tag{1.4.26}$$

Сделаем ещё одно упрощение, а именно выберем структуру функции $L$, будем считать, что:

$$L(A_{\mu}; A_{\mu;\nu}) = L(B, C, F) \tag{1.4.27}$$

Тогда исходный лагранжиан принимает вид:

$$\mathscr{L} = f(D)A^{\mu}\Box A_{\mu} + L(B, C, F) \tag{1.4.28}$$

В дальнейшем мы увидим, что такие предположения (1.4.25) и (1.4.26) о структуре функций $L$ и $f$ позволяют удовлетворить как условию (1.2.10), так и условию (1.2.11).

Для дальнейшего упрощения выберем конкретный вид функций $f$ и $L$, а именно степенной:

$$f = D^n \tag{1.4.29}$$

$$L = kB^m + lC^m + vF^w, \tag{1.4.30}$$

где $k$, $l$, $m$, $n$, $w$ и $v$ - числа. Из тех же соображений (1.4.10), что и в разделе 1.4.1 будем рассматривать только значения $n$, удовлетворяющие требованию (1.4.9).
В дальнейшем хотелось бы, чтобы фоновое решение уравнения движения для лагранжиана (1.4.28) имело бы также степенной вид. Для этого достаточно потребовать, чтобы лагранжиан при преобразованиях растяжения и сжатия координат, т.е. преобразованиях вида: $x^\mu \to \lambda x^\mu$, преобразовался бы как:

$$\mathscr{L} \to \lambda^h \mathscr{L}, \tag{1.4.31}$$

а

$$A_\mu \to \lambda^q A_\mu, \tag{1.4.32}$$

где $p$ и $q$ - некотрые числа. Тогда $A_\mu$ должен иметь степенной вид. Выберем конкретный степенной вид для $A_\mu$:

$$A = \beta t^{-1} \tag{1.4.33}$$

Тогда:

$$q = -1 \tag{1.4.34}$$

И поэтому:

$$m = \frac{2}{3}(n+1) \tag{1.4.35}$$

$$w = 2n + 2 \tag{1.4.36}$$

$$h = -4n - 4 \tag{1.4.37}$$

Рассматриваем только значения $t > 0$ и $n > 0$
При таких предположениях уравнение движения принимает вид:

$$x = \frac{3(v_1 + (-1)^n(2n+1))}{(4n+1)}, \tag{1.4.38}$$

где:

$$x = (k+l)\beta^{\frac{2-n}{3}},$$
$$v_1 = v\beta^{n+2}.$$

Условия устойчивости (1.2.10) и условия на движение возмущений над фоновым решением со скоростью меньше световой (1.2.11) имеют вид:

$$\begin{cases} \beta^{3n}((-1)^n(\frac{n}{2}+1)-mk\beta^{\frac{2-n}{3}})<0 \\ \\ \beta^{3n}(-(-1)^n 3n^2+ml\beta^{\frac{2-n}{3}}+2m(m+1)x)+\beta^{3n}((-1)^n(\frac{n}{2}+1)-mk\beta^{\frac{2-n}{3}})>0 \\ \\ l<0 \\ \\ (-1)^n\beta^n>0 \\ \\ \end{cases} \tag{1.4.39}$$

Попробуем найти такое решение системы (1.4.39), чтобы $n$ было минимальным из возможных, а также, чтобы все степени в лагранжиане (1.4.43) были целыми. Минимальное $n$, которое удовлетворяет этим условиям, - это : $n = 2$.
При $n = 2$ система (1.4.39) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} v_1 > 4 \\ 16-4v_1 < l < 0 \end{cases} \tag{1.4.40}$$

А уравнение движения (1.4.38) принимает вид:

$$k+l=\frac{v_1+5}{3} \tag{1.4.41}$$

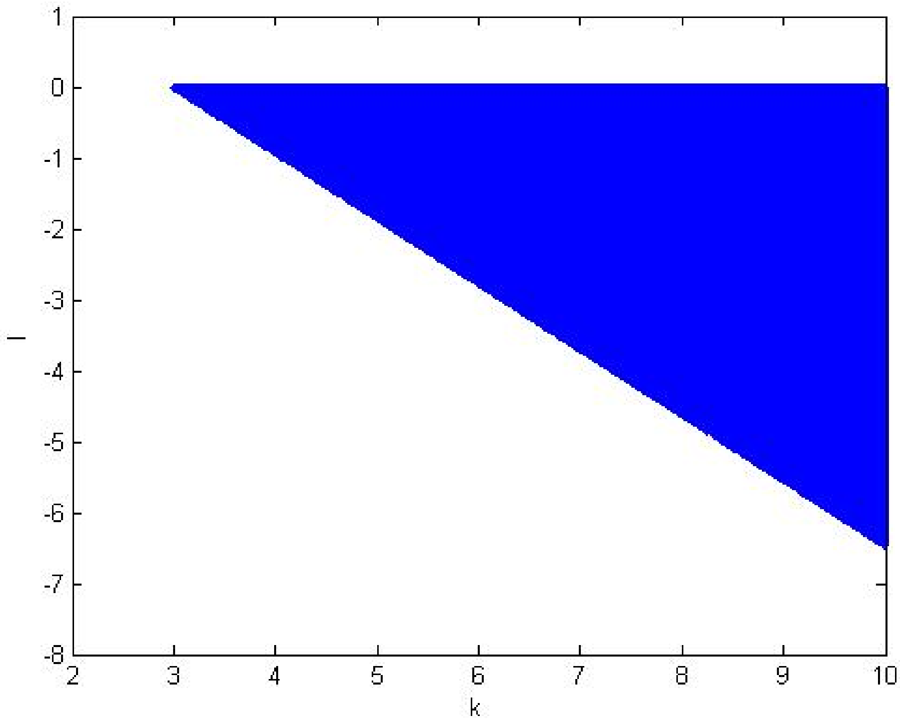
После преобразований система (1.4.40) и уравнение (1.4.41) эквивалентны условиям:

$$\begin{cases} l>3-k \\ l<0 \\ l>\frac{36-12k}{13} \\ \beta=(\frac{3k+3l-5}{v})^{1/4} \\ v>0 \end{cases} \tag{1.4.42}$$

А исходный лагранжин принимает вид:

$$\mathscr{L}=D^2A^{\mu}\Box A_{\mu}+kB^2+lC^2+vF^6 \tag{1.4.43}$$

Область значений параметров $(k, l)$, которая является решением системы (1.4.42), изображена на рисунке ниже:




## 1.5 Поиск устойчивого решения для второго варианта лагранжиана

Покажем возможность существования фонового решения уравнений движения для лагранжиана второго типа (1.3.3) , удовлетворяющего условию устойчивости (1.2.10) и условию на движение возмущений над этим фоновым решением со скоростью меньше световой (1.2.11). В этом разделе условия (1.2.10) и (1.2.11) берутся с коэффициентами $K_{00}$, $K_{01}$, $K_{10}$ и $K_{11}$ для второго варианта лагранжиана, вычисленными по формулам (1.3.5-1.3.8).

Для упрощения дальнейшего анализа ограничимся случаями, когда функция $f$ зависит не от 2 переменных, как в варианте (1.3.3), а от одной переменной $C$. А функция $L$ от переменных $B$ и $C$. При таких предположениях исходный лагранжиан (1.3.3) принимает вид:

$$\mathscr{L} = f(C; F)A^{\mu,\theta}A_{\theta}\Box A_{\mu} + L(B; C), \tag{1.5.1}$$

Беря вариацию первого порядка от лагранжиана, получаем уравнение движения для $A$ :

$$
\begin{aligned}
&2\dot{A}^2A(L_B+L_C)-\frac{d}{dt}(2A^2\dot{A}[L_B+L_C])+2\dot{A}^3A^2\ddot{A}f_C-\frac{d}{dt}(2A^3\dot{A}^2\ddot{A}f_C)+\\
&+\frac{d^2}{dt^2}(\dot{A}Af)-A\dddot{A}f-A\ddot{A}\dot{f}=0
\end{aligned}
\tag{1.5.2}
$$

Заметим, что в уравнении движения члены со старшими производными сокращаются, т.е. уравнение движения содержит производные не старше второй от $A^\mu$. Выпишем только члены со старшими производными, содержащимися в уравнении движения:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt}(2A^3\dot{A}^2\ddot{A}f_C)+\frac{d^2}{dt^2}(\dot{A}Af)-A\dddot{A}f+...=\\
&=\dddot{A}(-2A^3\dot{A}^2f_C+Af-Af)+2\dddot{A}A^3\dot{A}^2f_C+...=0*[\dddot{A}]+...
\end{aligned}
\tag{1.5.3}
$$

Т.е. видим, что в уравнении движения остались только члены с $\dot{A}$, $\ddot{A}$ и $A$. Выберем конкретную форму функций $L$ и $f$, а именно степенную: Пусть

$$f=C^n \tag{1.5.4}$$

$$L=kB^m+lC^m, \tag{1.5.5}$$

где $k$, $l$, $m$ и $n$ - числа. Из тех же соображений (1.4.10), что и в разделе 1.4.2 будем рассматривать только значения $n$, удовлетворяющие требованию (1.4.9). В дальнейшем мы увидим, что такие предположения (1.5.4) и (1.5.5) о структуре функций $L$ и $f$ позволяют удовлетворить как условию (1.2.10), так и условию (1.2.11).
Хотелось бы, чтобы фоновое решение уравнения движения (1.5.3) имело бы также степенной вид. Для этого достаточно потребовать, чтобы лагранжиан при преобразованиях растяжения и сжатия координат, т.е. преобразованиях вида: $x^\mu\to\lambda x^\mu$, преобразовался бы как:

$$\mathscr{L}\to\lambda^p\mathscr{L}, \tag{1.5.6}$$

а

$$A_\mu\to\lambda^qA_\mu, \tag{1.5.7}$$

где $p$ и $q$ - некотрые числа. Тогда $A_\mu$ должен иметь степенной вид. Выберем конкретный степенной вид для $A_\mu$:

$$A=\beta t^{-1} \tag{1.5.8}$$

Тогда:

$$q=-1 \tag{1.5.9}$$

$$m=n+1 \tag{1.5.10}$$

$$p=-6m \tag{1.5.11}$$

Рассматриваем только значения $t > 0$ и $n > 0$.
При таких предположениях уравнение движения принимает вид:

$$k\beta = -l\beta - \frac{6n^2+9n-1}{(n+1)(6n+3)}, \tag{1.5.12}$$

а условия устойчивости эквивалентны системе:

$$\begin{cases} l\beta > \frac{n(6n^2+9n-1)}{(n+1)(6n+3)} - \frac{2n^2+8n+\frac{5}{2}}{n+1} \\ \\ l\beta < -\frac{4n+1}{n+1} - \frac{6n^2+9n-1}{(n+1)(6n+3)} \\ \\ \beta > 0 \end{cases} \tag{1.5.13}$$

Обозначим:

$$Q_n = \frac{4n+1}{n+1} + \frac{6n^2+9n-1}{(n+1)(6n+3)}$$

$$W_n = -\frac{n(6n^2+9n-1)}{(n+1)(6n+3)} + \frac{2n^2+8n+\frac{5}{2}}{n+1}$$

$$U_n = \frac{6n^2+9n-1}{(n+1)(6n+3)}$$

Видим, что $l$ всегда будет меньше нуля, т.к. для любого $n$ выполняется:

$$Q_n > 0,$$

что означает совместность уравнения (1.5.12) и системы (1.5.13).
Заметим, что система (1.5.13) имеет решение при любом $n > 0$, кроме $n = \frac{\sqrt{\frac{35}{3}}-3}{4}$ .
Исходный лагранжиан (1.3.3) принимает вид:

$$\mathscr{L} = C^n A^{\mu,\theta} A_\theta \Box A_\mu + kB^{n+1} + lC^{n+1}, \tag{1.5.14}$$

А устойчивое решение имеет вид:

$$A = \beta t^{-1}, \tag{1.5.15}$$

где:

$$\beta = -\frac{6n^2+9n-1}{(n+1)(6n+3)(k+l)},$$

при этом значении параметров $k$ и $l$ должны удовлетворять условиям:
при $0 < n < \frac{\sqrt{\frac{35}{3}}-3}{4}$:

$$\begin{cases} k < l(\frac{U_n}{Q_n} - 1) \\ \\ k > l(\frac{U_n}{W_n} - 1) \\ \\ k + l > 0, \end{cases} \tag{1.5.16}$$

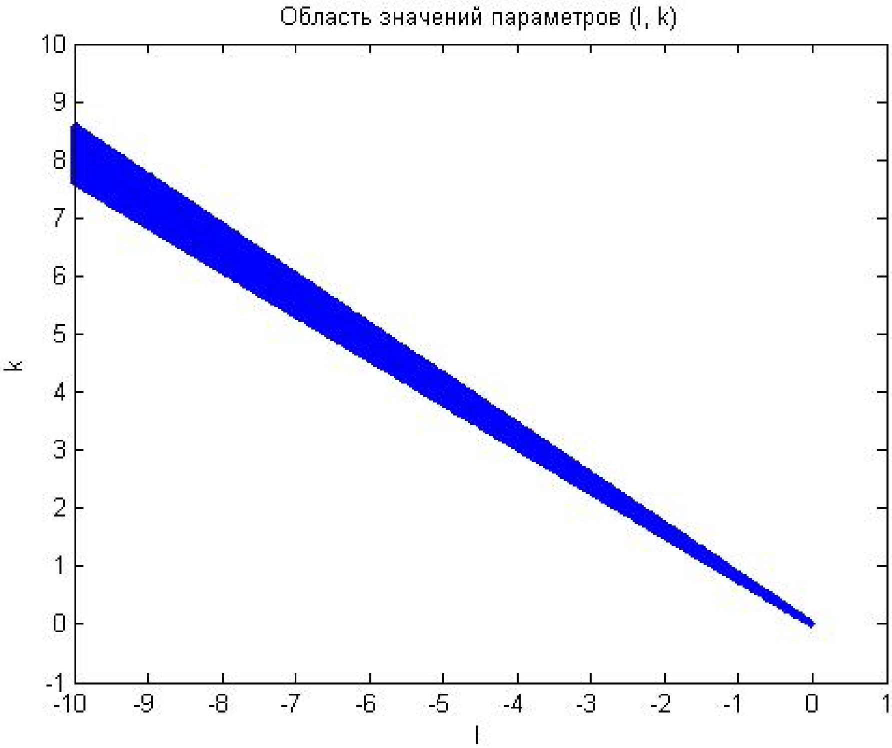
при $n > \frac{\sqrt{\frac{35}{3}}-3}{4}$:

$$\begin{cases} k < l(\frac{U_n}{W_n} - 1) \\ \\ k > l(\frac{U_n}{Q_n} - 1) \\ \\ k + l < 0. \end{cases} \tag{1.5.17}$$

Для иллюстрации решения систем (1.5.16) и (1.5.17) найдём решения этих систем при конкретных значениях параметра $n$.
Системы (1.5.16 и (1.5.17)) при значении $n = 1$ имеют вид:

$$\begin{cases} k > -\frac{45}{59}l \\ k < -\frac{169}{197}l \\ k < -l \end{cases} \tag{1.5.18}$$

Область значений параметров $(k, l)$, которая является решением системы (1.5.18), изображена на рисунке ниже:




## 1.6 Тензор энергии-импульса для первого варианта лагранжиана

**Используемые обозначения:**

$$\partial_\lambda A\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda}$$

$$A_{\mu;\lambda} = \partial_\lambda A\mu - \Gamma^\xi_{\mu\lambda} A_\xi$$

$$\Gamma_{\nu,\rho\lambda} = g_{\nu\xi}\Gamma^\xi_{\rho\lambda}$$

Для произвольных функций $f$ и $g$ от координат $x^\mu$, таких что:

$$\exists\ (t_1, t_2)(t_1 < t_2)\ \forall x^i\ (f(t_1) = f(t_2) = 0,\ g(t_1) = g(t_2) = 0).$$

Выражение:

$$f \Rightarrow g$$

означает, что:

$$f = g + \nabla_\nu(u^\nu),$$

где функция $u^\nu$ - произвольная функция от координат $x^\mu$, имеющая такую же лоренцовую структуру, как и четырёх-вектор и удовлетворяющая требованиям:

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\partial N_R} u_\nu dS^\nu = 0,$$

$$\forall x^i \; (u^\nu(t_1) = u^\nu(t_2) = 0),$$

где:

$$r = \sqrt{-r^i r^j g_{ij}}$$

$$N_R = \{(t, x^i) : t_1 \le t \le t_2; r < R\},$$

$dS^\nu$- элемент площади.

**Расмотрим лагранжиан первого типа (1.1.23):**

$$\mathscr{L}_{(1)} = f(F, B, C, D)A^\theta \Box A_\theta + L(A_\mu; A_{\mu;\nu}). \tag{1.6.1}$$

Для того чтобы эта модель (1.6.1) была галилеоном и в искрвлённом пространстве, т.е. в пространстве с произвольной метрикой, необходимо, чтобы в $T_{\mu\nu}$ отсутствовали члены со старшими производными от метрики и от полей, т.е. члены с третьими производными. Условие отсутствия третьих производных в $T_{\mu\nu}$ эквивалентно условию отсутствия их в $\delta(\sqrt{-g}\mathscr{L}_{(1)})$. Расписывая $\delta(\sqrt{-g}\mathscr{L}_{(1)})$ с точностью до членов старшего порядка по производным, получаем:

$$\begin{aligned}2\delta(\sqrt{-g}\mathscr{L}_{(1)}) \Rightarrow & f_B g^{\mu\theta}(\delta B\partial_{\mu\theta}F + \delta F\partial_{\mu\theta}B) + f_C\sqrt{-g}(\delta C\partial_{\mu\theta}F + \delta F\partial_{\mu\theta}C)+\\ & + f_D g^{\mu\theta}(\delta D\partial_{\mu\theta}F + \delta F\partial_{\mu\theta}D) + ...\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Видим, что выражение (1.6.2) действительно содержит третьи производные как от метрики, так и от полей, так как в переменных $B$, $C$, и $D$ содержатся ковариантные производные от $A^\mu$, что в свою очередь приводит к тому, что в $\delta B$, $\delta C$, и $\delta D$ содержатся производные от вариаций метрики и при интегрировании по частям это приведёт к появлению третьих производных как от метрики, так и от полей в выражении (1.6.2). Выражение (1.6.2) состоит из трёх членов, обозначим их за $I_1$, $I_2$ и $I_3$ соответственно:

$$I_1 = f_B\sqrt{-g}g^{\mu\theta}(\delta B\partial_{\mu\theta}F + \delta F\partial_{\mu\theta}B) \tag{1.6.3}$$

$$I_2 = f_C\sqrt{-g}g^{\mu\theta}(\delta C\partial_{\mu\theta}F + \delta F\partial_{\mu\theta}C) \tag{1.6.4}$$

$$I_3 = f_D\sqrt{-g}g^{\mu\theta}(\delta D\partial_{\mu\theta}F + \delta F\partial_{\mu\theta}D) \tag{1.6.5}$$

Заметим, что:

$$B = \frac{1}{4} F^{,\theta} F_{\theta} \tag{1.6.6}$$

И обозначим:

$$F^{,\theta} F_{\theta} \tag{1.6.7}$$

за $Y$, то есть:

$$Y = F^{,\theta} F_{\theta}. \tag{1.6.8}$$

Тогда с точностью до членов старшего порядка по производным от метрики и полей:

$$I_1 = \frac{\sqrt{-g}}{2} f_Y g^{\mu\theta} (\delta Y \partial_{\mu\theta} F + \delta F \partial_{\mu\theta} Y), \tag{1.6.9}$$

где вариация берётся по $\delta g^{\mu\nu}$.
Расписывая (1.6.9) подробнее в старшем порядке по производным, получаем:

$$I_1 \Rightarrow \sqrt{-g} f_Y g^{\mu\theta} (F^{\nu} \partial_{\nu\mu\theta} F - F^{\nu} \partial_{\nu\mu\theta} F) \delta F = 0 + ... \tag{1.6.10}$$

Видим, что слагаемое $I_1$ в выражении (1.6.2) не даёт членов, содержащих производные третьего порядка.
Расписывая $I_3$ подробнее и оставляя только члены, содержащие третьи производные, получаем:
С точностью до членов старшего порядка по производным от метрики:

$$\begin{aligned} f_D \sqrt{-g} g^{\mu\theta} (\delta D \partial_{\mu\theta} F + \delta F \partial_{\mu\theta} D) = f_D \sqrt{-g} A^{\lambda} A_{\xi} A^{\nu} A^{\rho} A^{\mu} g^{\psi\theta} (\partial_{\psi\theta} g_{\mu\nu} \delta \Gamma^{\xi}_{\rho\lambda} + \partial_{\psi\theta} \Gamma^{\xi}_{\rho\lambda} \delta g_{\mu\nu}) + ... \Rightarrow \\ \Rightarrow f_D \sqrt{-g} A^{\lambda} A^{\xi} A^{\nu} A^{\rho} A^{\mu} g^{\psi\theta} (\partial_{\psi\theta\xi} g_{\mu\nu} \delta g_{\rho\lambda} - \partial_{\psi\theta\rho} g_{\mu\nu} \delta g_{\lambda\xi}) = 0 + ... \end{aligned} \tag{1.6.11}$$

С точностью до членов старшего порядка по производным от поля:

$$\begin{aligned} f_D \sqrt{-g} g^{\mu\theta} (\delta D \partial_{\mu\theta} F + \delta F \partial_{\mu\theta} D) = -f_D \sqrt{-g} A^{\lambda} A^{\rho} g^{\psi\theta} (A_{\xi} \delta \Gamma^{\xi}_{\rho\lambda} A^{\mu} \partial_{\psi\theta} A_{\mu} + \partial_{\psi\theta\lambda} A_{\rho} A^{\mu} A^{\nu} \delta g_{\mu\nu}) \Rightarrow \\ \Rightarrow -f_D \sqrt{-g} A^{\lambda} A^{\rho} A^{\mu} A^{\nu} g^{\psi\theta} (\partial_{\psi\theta\lambda} A_{\mu} \delta g_{\rho\nu} - \partial_{\psi\theta\lambda} A_{\rho} \delta g_{\mu\nu}) = 0 + ... \end{aligned} \tag{1.6.12}$$

Видим, что слагаемое $I_3$ в выражении (1.6.2) также не даёт членов, содержащих производные старшего порядка как по метрике, так и по полям.
Рассмотрим слагаемое $I_2$, тогда расписывая $I_2$ подробнее и оставляя только члены, содержащие третьи производные, получаем:
С точностью до членов старшего порядка по производным от поля:

$$\begin{aligned} & f_C \sqrt{-g} g^{\mu\theta} (\delta C \partial_{\mu\theta} F + \delta F \partial_{\mu\theta} C) \Rightarrow \\ & \Rightarrow -2 f_C \sqrt{-g} g^{\xi\psi} A^{\lambda;\theta} A_{\theta} A^{\mu} A^{\nu} A^{\rho} (\partial_{\xi\psi\rho} A_{\lambda} - \partial_{\xi\psi\lambda} A_{\rho}) \delta g_{\mu\nu} + ... \end{aligned} \tag{1.6.13}$$

С точностью до членов старшего порядка по производным от метрики:

$$\begin{aligned} & f_C \sqrt{-g} g^{\mu\theta} (\delta C \partial_{\mu\theta} F + \delta F \partial_{\mu\theta} C) \Rightarrow \\ & \Rightarrow f_C \sqrt{-g} g^{\xi\psi} A^{\rho;\theta} A_{\theta} A^{\mu} A^{\nu} A^{\lambda} A^{\phi} (\partial_{\xi\psi\rho} g_{\lambda\phi} - \partial_{\xi\psi\rho} g_{\lambda\phi}) \delta g_{\mu\nu} + ... = 0 + ... \end{aligned} \tag{1.6.14}$$

Видим, что в слагаемом $I_2$ остаются третьи производные от полей. Единственный вариант, когда тензор энергии-импульса для лагранжиана (1.6.1) не содержит старших производных, возможен лишь при обращении в ноль выражения $I_2$ в старшем порядке по третьим производным от полей. В свою очередь, требование обращения в ноль выражения $I_2$ в старшем порядке равносильно требованию:

$$f_C = 0 \tag{1.6.15}$$

Отсюда следует, что для того чтобы модель (1.2.3) была галилеоном и в искривлённом пространстве, необходимо и достаточно наложить на функцию $f$ условие (1.6.15), которое, в свою очередь, эквивалентно условию:

$$f(B, C, D, F) = f(B, D, F) \tag{1.6.16}$$

В случае искривлённого пространства лагранжиан (1.6.1) для произвольного вида функции $f$ не будет являтся галилеоном. Значит общий вид лагранжиана первого типа, который является галилеоном в искривлённом пространстве, -это:

$$\mathscr{L}^{gal}_{(1)} = f(B, D, F)A^{\theta}\Box A_{\theta} + L(A_{\mu}; A_{\mu;\nu}) \tag{1.6.17}$$

Попробуем добавить в лагранжиан для поля $A_{\nu}$ (1.6.1) дополнительное слагаемое вида $P(A_{\mu}, A_{\nu;\theta}; g_{\xi\psi})$ , такое, что при его добавлении сокращались бы третьи производные в тензоре энергии-импульса, а в плоском пространстве лагранжиан оставался бы таким же, как для модели (1.2.3). Тогда новый лагранжиан имеет вид:

$$\mathscr{L} = P(A_{\mu}, A_{\nu;\theta}; g_{\xi\psi}) + f(B, C, D, F)A^{\theta}\Box A_{\theta} + L(A_{\mu}; A_{\mu;\nu}) \tag{1.6.18}$$

Используя тождества (1.6.2), (1.6.13) и (1.6.14), получаем, что условие отсутствие в (1.6.18) третьих производных как от полей, так и от метрики имеет вид:

$$\delta(\sqrt{-g}P(A_{\mu}, A_{\nu;\theta}; g_{\xi\psi})) \Rightarrow f_C\sqrt{-g}g^{\xi\psi}A^{\lambda;\theta}A_{\theta}A^{\mu}A^{\nu}A^{\rho}(\partial_{\xi\psi\rho}A_{\lambda} - \partial_{\xi\psi\lambda}A_{\rho})\delta g_{\mu\nu} + ..., \tag{1.6.19}$$

А требование того, чтобы модель (1.6.18) в плоском пространстве была эквивалентна модели (1.6.1), принимает вид[1]:

$$P(A_{\mu}, A_{\nu;\theta})|_{g_{\xi\psi}=\eta_{\xi\psi}} = 0 \tag{1.6.20}$$

[1]Вообще говоря,

$$P(A_{\mu}, A_{\nu;\theta})|_{g_{\xi\psi}=\eta_{\xi\psi}} = \nabla^{\nu}u_{\nu},$$

где: $u_{\nu}$- любая достаточно гладкая функция.

с точностью до членов старшего порядка. Для того чтобы выполнялось требование (1.6.19), необходимо, чтобы:

$$P = P(A_\mu, A_{\nu;\theta}; g_{\xi\psi}, g_{\xi\psi,\phi}, g_{\xi\psi,\phi\theta}) \tag{1.6.21}$$

Т.е. $P$ зависит от метрики, первых и вторых производных от метрики и от поля $A_\nu$ и от его первых производных.
Единственная конструкция тензорного вида в 4-мерии, содержащая вторые производные от метрики, - это тензор кривизны. Значит самый общий вид для P - это[2]:

$$P = R_{\mu\nu\theta\rho} K^{\mu\nu\theta\rho}(A_{\xi;\lambda}; A_\psi) \tag{1.6.22}$$

Распишем вариацию $\delta(\sqrt{-g}P(A_\mu, A_{\nu;\theta}; g_{\xi\psi}))$ подробнее, сохраняя в выражении только члены, содержащие третьи производные от полей и от метрики:
Члены с третьими производными от полей:

$$\delta(\sqrt{-g}P(A_\mu, A_{\nu;\theta}; g_{\xi\psi})) = \sqrt{-g}\frac{\partial K^{\mu\nu\theta\rho}}{\partial A_{\xi;\lambda}}(\partial_\lambda A_\xi \delta R_{\mu\nu\theta\rho}) + ... \tag{1.6.23}$$

Члены с третьими производными от метрики:

$$\delta(\sqrt{-g}P(A_\mu, A_{\nu;\theta}; g_{\xi\psi})) = -\sqrt{-g}\frac{\partial K^{\mu\nu\theta\rho}}{\partial A_{\xi;\lambda}}(A_\psi \Gamma^\psi_{\xi\lambda} \delta R_{\mu\nu\theta\rho} + R_{\mu\nu\theta\rho} A_\psi \delta\Gamma^\psi_{\xi\lambda}) + ... \tag{1.6.24}$$

Т.к. (1.6.19) должно выполняться для любого вида функции $f$, то возьмём самый простой вид функции $f$, для которой не пропадает зависимость от $C$. При таких предположениях условие (1.6.19) переходит в:

$$\begin{cases} \frac{\partial K^{\mu\nu\theta\rho}}{\partial A_{\xi;\lambda}}(\partial_\lambda A_\xi \delta R_{\mu\nu\theta\rho}) \Rightarrow f_C(C) g^{\xi\psi} A^{\lambda;\theta} A_\theta A^\mu A^\nu A^\rho (\partial_{\xi\psi\rho} A_\lambda - \partial_{\xi\psi\lambda} A_\rho)\delta g_{\mu\nu} + ... \\ \frac{\partial K^{\mu\nu\theta\rho}}{\partial A_{\xi;\lambda}}(A_\psi \Gamma^\psi_{\xi\lambda} \delta R_{\mu\nu\theta\rho} + R_{\mu\nu\theta\rho} A_\psi \delta\Gamma^\psi_{\xi\lambda}) \Rightarrow 0 + ... \end{cases} \tag{1.6.25}$$

Первое уравнение из системы (1.6.25) эквивалентно:

$$\begin{aligned} &(J^{\mu\nu\theta\xi\rho\lambda} + J^{\nu\mu\xi\theta\rho\lambda} - J^{\mu\nu\xi\theta\rho\lambda} - J^{\nu\mu\theta\xi\rho\lambda})\partial_{\lambda\nu\theta} A_\rho \delta g_{\mu\xi} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (g^{\nu\theta} f_C A^\mu A^\xi A_\psi (A^{\lambda;\psi} A^\rho - A^{\rho;\psi} A^\lambda))\partial_{\lambda\nu\theta} A_\rho \delta g_{\mu\xi}, \end{aligned} \tag{1.6.26}$$

[2]Вообще говоря, возможны варианты, когда:

$$P = R_{\mu_1\nu_1\theta_1\rho_1} ... R_{\mu_j\nu_j\theta_j\rho_j} K^{\mu_1\nu_1\theta_1\rho_1...\mu_j\nu_j\theta_j\rho_j}(A_{\xi;\lambda}; A_\psi),$$

но такие варианты требуют наложения дополнительных условий, обеспечивающих отсутствие производных старше третьей в вариации $\delta(\sqrt{-g}P(A_\mu, A_{\nu;\theta}; g_{\xi\psi}))$ на функцию: $K^{\mu_1\nu_1\theta_1\rho_1...\mu_j\nu_j\theta_j\rho_j}(A_{\xi;\lambda}; A_\psi)$. А единственный вариант, который не требует наложения никаких дополнительных условий на функцию $K^{\mu\nu\theta\rho}(A_{\xi;\lambda}; A_\psi)$ - это (1.6.22), поэтому в дальнейшем будем рассматривать именно его.

где:

$$J^{\mu\nu\theta\xi\rho\lambda} = \frac{\partial K^{\mu\nu\theta\xi}}{\partial A_{\rho;\lambda}}$$

С другой стороны:

$$J^{\mu\nu\theta\xi\rho\lambda} R_{\mu\nu\theta\xi} = \frac{\partial P}{\partial A_{\rho;\lambda}} \tag{1.6.27}$$

Умножая правую и левую часть (1.6.26) на $R_{\mu\nu\theta\xi}$, получаем:

$$4\frac{\partial P}{\partial A_{\rho;\lambda}} \Rightarrow R_{\mu\nu\theta\xi}(g^{\nu\theta} f_C A^\mu A^\xi A_\psi (A^{\lambda;\psi} A^\rho - A^{\rho;\psi} A^\lambda)) \tag{1.6.28}$$

Из (1.6.27) и (1.6.28) получаем:

$$J^{\mu\nu\theta\xi\rho\lambda} \Rightarrow \frac{1}{4}(g^{\nu\theta} f_C A^\mu A^\xi A_\psi (A^{\lambda;\psi} A^\rho - A^{\rho;\psi} A^\lambda)) \tag{1.6.29}$$

Хотя компоненты тензора $R_{\mu\nu\theta\xi}$ и не являются независимыми, переход от равенства (1.6.28) к (1.6.29) корректен, так как он совершается с точностью до членов, дающих ноль при свёртке их с $R_{\mu\nu\theta\xi}$, а функция $J^{\mu\nu\theta\xi\rho\lambda}$, в свою очередь, в силу (1.6.27) определена тоже с точностью до членов, дающих ноль при свёртке их с $R_{\mu\nu\theta\xi}$.
Подставляя (1.6.29) обратно в (1.6.26), получаем противоречие. Значит невозможно подобрать такую функция $K^{\mu\nu\theta\xi}$, чтобы выполнялось (1.6.26). Следовательно невозможно сделать галилеоном в кривом пространстве лагранжиан первого типа при зависимости функции $f$ от $C$.

## 1.7 Тензор энергии-импульса для второго варианта лагранжиана

**Рассмотрим лагранжиан второго типа (1.1.24):**

$$\mathscr{L}_{(2)} = f(C, F) A_\lambda A^{\theta;\lambda} \Box A_\theta + L(A_\mu; A_{\mu;\nu}). \tag{1.7.1}$$

Сначала рассмотрим вариант, когда:

$$f = f(F). \tag{1.7.2}$$

А исходный лагранжиан принимает вид:

$$\mathscr{L}_{(2)} = f(F) A_\lambda A^{\theta;\lambda} \Box A_\theta + L(A_\mu; A_{\mu;\nu}). \tag{1.7.3}$$

Преобразуем лагранжиан (1.7.3) по частям, учитывая (1.7.2) и оставляя только члены со вторыми ковариантными производными от поля $A^{\mu}$:

$$\mathscr{L}_{(2)} = f(F)A_{\lambda}A^{\theta;\lambda}\Box A_{\theta} + L(A_{\mu}; A_{\mu;\nu}) \to -A^{\mu}{}_{;\theta\nu}A^{\theta}A_{\mu}{}^{;\nu}f(F) + ... \tag{1.7.4}$$

Здесь " $\to$ " означает интегрирование по частям.
Используя тождество:

$$-R^{\mu}{}_{\nu\theta\xi}A^{\nu} = (\nabla_{\theta\xi} - \nabla_{\xi\theta})A^{\mu}, \tag{1.7.5}$$

равенство (1.7.4) и интегрируя по частям, получаем, что:

$$-A^{\mu}{}_{;\theta\nu}A^{\theta}A_{\mu}{}^{;\nu}f(F) \to f(F)R^{\mu}{}_{\lambda\theta\nu}A^{\lambda}A^{\theta}A_{\mu}{}^{;\nu} + \frac{1}{2}\nabla_{\theta}(f(F)A^{\theta})A^{\mu;\nu}A_{\mu;\nu}. \tag{1.7.6}$$

В силу (1.7.4) и (1.7.6) получаем, что:

$$f(F)A_{\lambda}A^{\theta;\lambda}\Box A_{\theta} + L(A_{\mu}; A_{\mu;\nu}) - f(F)R^{\mu}{}_{\lambda\theta\nu}A^{\lambda}A^{\theta}A_{\mu}{}^{;\nu} = L_{(1)}(A_{\mu}; A_{\mu;\nu}), \tag{1.7.7}$$

где функция $L_1$ - некая функция от поля $A^{\nu}$ и его производной. Выражение (1.7.7) означает, что лагранжиан (1.7.3) преобразуется посредством интегрирования по частям к лагранжиану, содержащему только поля и первые производные от полей. Значит (1.7.1) не будет являться галилеоном ни в плоском, ни в искривлённом пространства при зависимости функции $f$ только от $F$.
Рассмотрим вариант, когда функция $f$ зависит от $C$ и $F$, т.е. вариант (1.6.1) без каких-либо дополнительных ограничений на функцию $f$. Для того чтобы эта модель (1.7.1) была галилеоном и в искрвлённом пространстве, т.е. в пространстве с произвольной метрикой, необходимо, чтобы в $T_{\mu\nu}$ отсутствовали члены со старшими производными от метрики и от полей, т.е. члены с третьими производными. Условие отсутствия третьих производных в $T_{\mu\nu}$ эквивалентно условию отсутствия их в $\delta(\sqrt{-g}\mathscr{L}_{(2)})$. Но, исходя из возможности присутствия третьих производных как по метрике, так и по полям в $\delta(\sqrt{-g}\mathscr{L}_{(2)})$, будем рассматривать не лагранжиан (1.6.1), а новый лагранжиан, который равен (1.6.1) плюс некотрый член, зависящий от полей и его производных, у которого есть потенциальная возможность скомпенсировать третьи производные в выражении для тензора энергии-импульса. Т.е. новый лагранжиан имеет вид:

$$\mathscr{L}_{(new)} = f(C,F)A_{\lambda}A^{\theta;\lambda}\Box A_{\theta} + L(A_{\mu}; A_{\mu;\nu}) + P(A_{\mu}, A_{\nu;\theta}; g_{\xi\psi}). \tag{1.7.8}$$

Возможный вид члена $P(A_{\mu}, A_{\nu;\theta}; g_{\xi\psi})$ был выяснен в разделе 1.6 (1.6.22):

$$P = R_{\mu\nu\theta\rho}K^{\mu\nu\theta\rho}(A_{\xi;\lambda}; A_{\psi}) \tag{1.7.9}$$

Для начала попробуем так подобрать член $P$, чтобы избавиться от третьих производных от полей в $\delta(\sqrt{-g}\mathscr{L}_{(new)})$, т.е. должно выполняться равенство:

$$\delta(\sqrt{-g}\mathscr{L}_{(new)}) = 0 + ..., \tag{1.7.10}$$

при отбрасывании членов с младшими производными от полей и с производными любого порядка от метрики. Расписывая $\delta(\sqrt{-g}\mathscr{L}_{()})$ с точностью до членов старшего порядка по производным от полей, получаем:

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}\mathscr{L}_{(new)}) \Rightarrow -\frac{\sqrt{-g}}{2}(g^{\xi\mu}I^{\lambda\theta\rho\nu} - g^{\nu\theta}I^{\mu\rho\lambda\xi})\partial_{\lambda\nu\theta}A_\rho\delta g_{\xi\mu}+ \\ + \sqrt{-g}(W^{\xi\theta\nu\mu\rho\lambda} + W^{\theta\xi\mu\nu\rho\lambda} - W^{\xi\theta\mu\nu\rho\lambda} - W^{\theta\xi\nu\mu\rho\lambda})\partial_{\lambda\nu\theta}A_\rho\delta g_{\xi\mu},\end{aligned} \tag{1.7.11}$$

где:

$$J^{\mu\nu\theta\xi\rho\lambda} = \frac{\partial K^{\mu\nu\theta\xi}}{\partial A_{\rho;\lambda}}, \tag{1.7.12}$$

$$I^{\lambda\mu\rho\xi} = (fA^\lambda g^{\mu\rho} + 2A_\nu A^{\mu;\nu}f_C)A^\xi, \tag{1.7.13}$$

$$W^{\xi\theta\nu\mu\rho\lambda} = I^{\lambda\mu\rho\xi}g^{\theta\nu} + J^{\xi\theta\nu\mu\rho\lambda}. \tag{1.7.14}$$

Для того чтобы выполнялось условие отсутствия третьих производных от полей в $\delta(\sqrt{-g}\mathscr{L}_{(new)})$, необходимо и достаточно выполнение следующего равенства:

$$\frac{1}{2}(g^{\xi\mu}I^{\lambda\theta\rho\nu} - g^{\nu\theta}I^{\mu\rho\lambda\xi}) = W^{\xi\theta\nu\mu\rho\lambda} + W^{\theta\xi\mu\nu\rho\lambda} - W^{\xi\theta\mu\nu\rho\lambda} - W^{\theta\xi\nu\mu\rho\lambda} \tag{1.7.15}$$

Умножая обе части выражения на $R_{\xi\theta\nu\mu}$, получаем:

$$R_{\xi\theta\nu\mu}(\frac{1}{8}(g^{\xi\mu}I^{\lambda\theta\rho\nu} - g^{\nu\theta}I^{\mu\rho\lambda\xi}) - W^{\xi\theta\nu\mu\rho\lambda}) = 0 \tag{1.7.16}$$

Пользуясь теми же аргументами, что и в разделе 1.6, когда совершали переход из (1.6.28) в (1.6.29), получаем, что (1.7.16) эквивалентно выражению ниже:

$$W^{\xi\theta\nu\mu\rho\lambda} = \frac{1}{8}(g^{\xi\mu}I^{\lambda\theta\rho\nu} - g^{\nu\theta}I^{\mu\rho\lambda\xi}), \tag{1.7.17}$$

Подставляя (1.7.17) обратно в (1.7.10), получаем противоречие. Значит невозможно подобрать такую функцию $K^{\mu\nu\theta\xi}$, чтобы выполнялось (1.7.10). Что, в свою очередь, означает, что невозможно подобрать такой дополнительный член $P$ в лагранжиане, чтобы он занулял хотя бы третьи производные от полей в тензоре энергии-импульса. Следовательно любыми дополнительными членами[3] в лагранжиане невозможно сделать галилеоном в кривом пространстве модель, имеющую такой же член по структуре со вторыми производными, как и в лагранжиане второго типа при зависимости функции $f$ от $C$.

[3]При условии, что рассматривается только возможность добавления членов, содержащих тензор кривизны в степени не выше первой.

# Глава 2

# Устойчивое решение, нарушающее изотропное условие энергодоминантности

Выше было показано, что только для первого варианта лагранжиана (1.2.3) возможно построить модель, которая является галилеоном и в кривом пространстве, причём функция $f$ должна удовлетворять условию (1.6.16). Будем рассматривать пространственно однородный случай, так как для анализа различных космологических моделей, описывающих ускоренное расширение вселенной на различных этапах, именно он представляет определённый интерес. И попробуем построить такой лагранжиан, который позволяет нарушить условие энергодоминантности (0.0.1), т.е. у уравнений движения, получающихся из лагранжиана этой модели, должно существовать решение, такое, что на нём:

$$\rho + p < 0, \tag{2.0.1}$$

где $\rho = T_{00}$, $p = T_{11} = T_{22} = T_{33}$. Так как нас интересует именно пространственно однородный случай, то необходимо искать однородное и изотропное фоновое решение уравнений движения, а именно:

$$A^{\mu}_{back} = (A(t), 0, 0, 0). \tag{2.0.2}$$

Также для того чтобы теория была физически осмысленной, необходимо потребовать устойчивость фонового решения и отсутствие возмущений, движущихся со скорость больше световой. Для упрощения дальнейшего анализа будем рассматривать случай, когда функция $f$ зависит не от трёх переменных, а от одной переменной. Очевидно, что вариант:

$$f = f(F) \tag{2.0.3}$$

$$\mathscr{L} = f(F) A^{\theta} \Box A_{\theta} + L(A_{\mu}; A_{\mu;\nu}) \tag{2.0.4}$$

не является галилеоном, т.к. $F = A_\nu A^\nu$, поэтому не представляет интерес для дальнейшего анализа.
Рассмотрим случай, когда:

$$f = f(B) \tag{2.0.5}$$

$$\mathscr{L} = f(B) A^\theta \Box A_\theta + L(A_\mu; A_{\mu;\nu}), \tag{2.0.6}$$

Заметим, что член со вторыми производными в этом варианте (2.0.6) аналогичен члену со старшими производными в галилеонном лагранжиане для скалярного поля (см. [1], [2], [3] ) с точностью до замены:

$$\pi \to F, \tag{2.0.7}$$

где $\pi$- скалярное поле.

$$f(F, B)[A^\mu \Box A_\mu + A_{\mu,\nu} A^{\mu,\nu}] \to \frac{1}{2} f(\pi; \frac{1}{4} \pi^\nu \pi_\nu) \Box \pi. \tag{2.0.8}$$

Значит этот вариант (2.0.6) также не представляет интерес для дальнейшего исследования, т.к. является аналогом скалярного галилеона, который подробно исследовался в различных работах (см. [5], [6],[7], [8], [12]).
Рассмотрим вариант, когда функция $f$ зависит только от $D$:

$$f = f(D) \tag{2.0.9}$$

$$\mathscr{L} = f(D) A^\theta \Box A_\theta + L(A_\mu; A_{\mu;\nu}). \tag{2.0.10}$$

Этот вариант (2.0.10) является галилеоном как в плоском, так и в кривом пространстве (см. раздел 1.6), а также не сводится к скалярному галилеону, который уже исследовался, т.е. является новым и актуальным для дальнейшего исследования.
Будем искать степенное устойчивое решение, нарушающее условие энергодоминантности, в виде:

$$A(t) = \beta t^{-1}, \tag{2.0.11}$$

Такой выбор степени в выражении (2.0.11) объясняется, например, тем, что для космологической модели, допускающей сценарий генезиса [9] , необходимо, чтобы поле, создающее "отрицательное давление"стремилось к нулю при больших временах.
Вариант, когда функция $f$ зависит только от $D$, уже рассматривался в разделе 1.4.2. При этом для того чтобы удовлетворить условиям устойчивости и условиям на отсутствия сверхсветовых возмущений, выбирался конкретный вид функций $L$ (1.4.30) и $f$ (1.4.29), а исходный лагранжиан (1.4.26), принимал вид (1.4.43):

$$\mathscr{L} = f(D) A^\mu \Box A_\mu + L(B, D, F), \tag{2.0.12}$$

где:

$$f(D) = D^2,$$

$$L(B,D,F) = kB^2 + lC^2 + vF^6$$

Для этого варианта (2.0.12) и фонового решения (2.0.11) условия устойчивости фонового решения и условия отсутствия сверхсветовых возмущений , а именно (1.4.42) имеют вид:

$$\begin{cases} l > 3-k \\ l < 0 \\ l > \frac{36-12k}{13} \\ \beta = (\frac{3k+3l-5}{v})^{1/4} \\ v > 0 \end{cases} \tag{2.0.13}$$

В дальнейшем нам понадобится значение тензора энергии-импульса для лагранжиана (2.0.12) при подстановке фонового решения (2.0.11) и метрики $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , поэтому вычислим его:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = \frac{2\delta(\sqrt{-g}\mathscr{L})}{\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}} =& \Big( g_{\mu\nu}\partial_\theta f \partial^\theta F - \partial_\mu f \partial_\nu F - \partial_\nu f \partial_\mu F + 2(\Box f)A_\mu A_\nu + \\ &+ (f_D \Box F + L_D)(A_\mu A^\lambda A_{\nu;\lambda} + A_\nu A^\lambda A_{\mu;\lambda} + A_\mu A^\theta A_{\theta;\nu} + A_\nu A^\theta A_{\theta;\mu}) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{-g}}(U^{\theta\lambda}{}_\mu \Gamma_{\nu,\theta\lambda} + U^{\theta\lambda}{}_\nu \Gamma_{\mu,\theta\lambda}) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\theta U^\theta{}_{\mu\nu} + \\ &+ 2L_F A_\nu A_\mu + \frac{1}{2}L_B F_{;\mu}F_{;\nu} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\theta(\sqrt{-g}F^\theta L_B)A_\mu A_\nu - \\ &- g_{\mu\nu}L \Big)\Big|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu};\ A(t)=\beta t^{-1};\ f=D^2;\ L=kB^2+lC^2+vF^6} = \\ &= \{0,p,p,p\}, \end{aligned} \tag{2.0.14}$$

где:

$$U^\theta{}_{\mu\nu} = -\sqrt{-g}A^\theta A_\mu A_\nu (f_D \Box F + L_D)$$

$$p = \beta^8 t^{-12}(v\beta^{-4} + x - 9)$$

Осталось лишь потребовать выполнения условия (2.0.1). Условие (2.0.1) при подстановке фонового решения (2.0.2), использовании лагранжиана (2.0.12) и формулы (2.0.14) переходит в:

$$p + \rho = \beta^8 t^{-12}(v\beta^{-4} + x - 9) < 0. \tag{2.0.15}$$

Тогда система уравнений на существование устойчивого решения, нарущающего условие энергодоминантности при отсутствии сверхсветовых возмущений, эквивалентна одновременному выполнению условия (2.0.15) и системе (2.0.13) и имеет вид:

$$\begin{cases} l < 0 \\ l > 3 - k \\ l < 3.5 - k \\ l > \frac{36-12k}{13} \\ \beta = \left(\frac{3k+3l-5}{v}\right)^{1/4} \\ v > 0 \\ \end{cases} \tag{2.0.16}$$

Тензор энергии-импульса имеет вид:

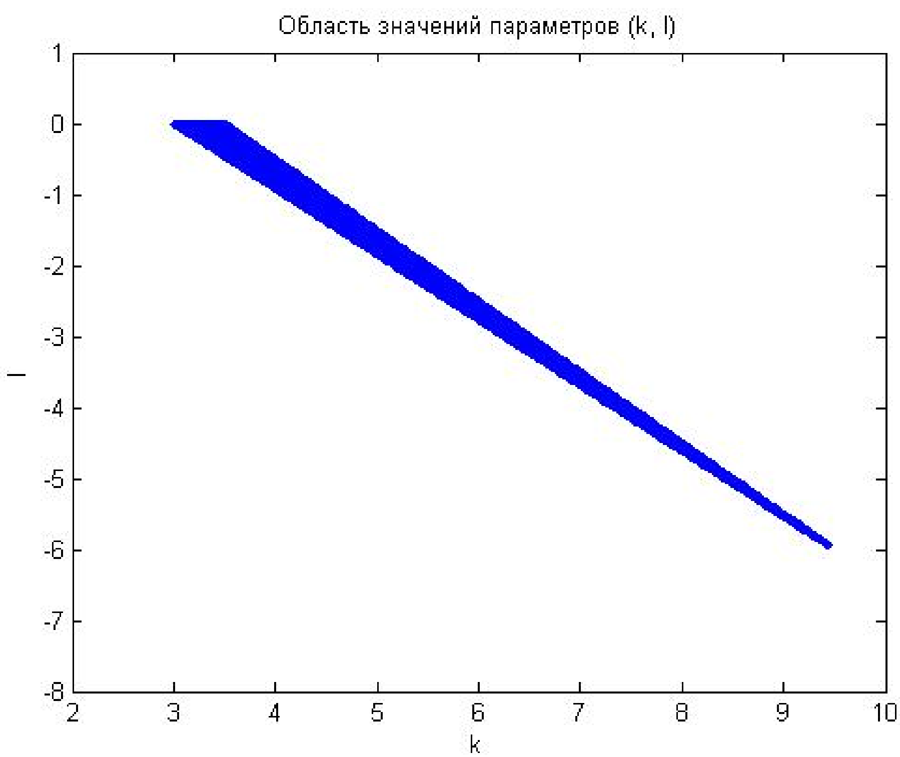
$$T_{00} = 0 \tag{2.0.17}$$

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = \beta^8 t^{-12}(4(k+l) - 14) \tag{2.0.18}$$

А исходный лагранжиан имеет вид:

$$\mathscr{L} = f(D)A^{\theta}\Box A_{\theta} + L(A_{\mu}; A_{\mu;\nu}). \tag{2.0.19}$$

Область значений параметров $(k, l)$, которая является решением системы (2.0.16), изображена на рисунке ниже:



# Заключение

В результате выполнения работы были построены простейшие варианты векторных лагранжианов, содержащих вторые производные, но при этом приводящих к уравнениям второго порядка:

$$\mathscr{L}_{(1)} = f(F, B, C, D)A^{\theta}\Box A_{\theta} + L(A_{\mu}; A_{\mu;\nu})$$

и

$$\mathscr{L}_{(2)} = f(C, F)A_{\lambda}A^{\theta;\lambda}\Box A_{\theta} + L(A_{\mu}; A_{\mu;\nu}).$$

Также было показано, что в плоском пространстве существует всего два варианта лагранжианов, содержащих вторую производную в виде деламбертиана от $A_{\nu}$ и приводящих к уравнениям движения не старше второго порядка (см. раздел 1.1).

Были полученны условия устойчивости и условия отсутствия сверхсветовых возмущений для двух вариантов лагранжианов для однородного и изотропного фонового решения в плоском пространстве (см. раздел 1.2 и 1.3). Показана возможность существования однородного и изотропного устойчивого решения, удовлетворяющего условиям отсутствия сверхсветовых возмущений над ним. В явном виде для двух вариантов лагранжианов найдены однородные и изотропные устойчивые решения (см. раздел 1.4 и 1.5). Необходимое и достаточное условие того, что теория является галилеоном в искривлённом пространстве, - это отсутствие старших производных в тензоре энергии-импульса. Для первого варианта лагранжиана было показано, что в искривлённом пространстве условие отсутствия третьих производных в тензоре энергии-импульса эквивалентно условию на структуру функции $f$, а именно $f$ должна зависеть только от переменных $B$, $C$ и $D$. А также доказано, что при добавлении в лагранжиан любых членов, содержащих тензор кривизны в степени не выше первой и обращающихся в ноль в плоском пространстве, невозможно одновременно обратить в ноль в тензоре энергии-импульса члены, содержащие третьи производные от полей и члены, содержащие третьи производные от метрики (см. раздел 1.6).

Второй же вариант лагранжиана при любом выборе функции $f$ и при добавлении любых членов, содержащих тензор кривизны в степени не выше первой и обращающихся в ноль в плоском пространстве, будет содержать в тензоре энергии-импульса либо третьи производные от метрики, либо третьи производные от полей. В свою очередь это означает, что второй вариант лагранжиана не будет являться галилеоном в искривлённом пространстве (см. раздел 1.7).

Поэтому общий вид лагранжиана[1], содержащего один деламбертиан от $A_{\nu}$, который при этом является галилеоном и в пространстве с произвольной метрикой, - это:

$$\mathscr{L}_{(1)}^{gal} = f(B, D, F)A^{\theta}\Box A_{\theta} + L(A_{\mu}; A_{\mu;\nu}).$$

[1]При условии, что рассматривается только возможность добавления членов, содержащих тензор кривизны в степени не выше первой.

В главе 2 было показано, что вариант, когда функция $f$ зависит только от двух переменных  и $F$ соответственно, является аналогом скалярного галилеона, который уже исследовался в различных работах ([1], [2], [5], [15]) , поэтому этот вариант не представляет большого интереса для дальнейшего анализа. Тем не менее вариант, когда функция $f$ зависит от переменный $D$, уже не сводится к скалярному галилеону. В свою очередь это означает, что этот вариант является новым и актуальным для исследования.

Одной из интересных особенностей теорий с галилеонным лагранжианом является то, что эти теории имеют устойчивые решения, нарушающие условия энергодоминантности ([1], [16]), эта особенность открывает огромное поле для построения различных космологических моделей ([5], [7], [11], [14]), поэтому в первую очередь необходимо проверить, обладает ли этой особенностью теория, исследуемая в данной работе, а именно теория с векторным галилеонным лагранжианом. Такая проверка была выполнена в главе 2. И в явном виде было найдено устойчивое решение, нарушающее изотропное условие энергодоминантности. Это означает, что на основе лагранжианов с векторными галилеонными полями также возможно построение космологических моделей, рассматривающих нарушения условия NEC.

# Литература


[1] Рубаков В. А. УФН т. 184(2) 137 (2014)
http://dx.doi.org/10.3367/UFNr.0184.201402b.0137

[2] Nicolis A., Rattazzi R. and Trincherini E., Phys. Rev. D vol. 79(6) 064036 (2009)
arXiv:0811.2197 [hep-th]
URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.064036

[3] Rubakov V. A. 2015
arXiv:1509.08808 [hep-th]

[4] Arbitrary p-form Galileons Deffayet, S. Deser, arXiv:1007.5278

[5] Galilean Genesis: an alternative to inflation
Paolo Creminelli, Alberto Nicolis and Enrico Trincherini
https://arxiv.org/pdf/1007.0027.pdf

[6] More about wormholes in generalized Galileon theories
V.A. Rubakov arXiv:1601.06566 [hep-th]

[7] Generalized Galileons: instabilities of bouncing and Genesis cosmologies and modified Genesis
M. Libanov, S. Mironov, V. Rubakov
arXiv:1605.05992 [hep-th]

[8] Cosmological bounce and Genesis beyond Horndeski
R. Kolevatov, S. Mironov, N. Sukhov, V. Volkova.
arXiv:1705.06626 [hep-th]

[9] Creminelli P, Nicolis A, Trincherini E JCAP (11) 021 (2010); arXiv:1007.0027

[10] Horndeski G W Int. J. Theor. Phys. 10 363 (1974)

[11] Farhi E, Guth A H Phys. Lett. B 183 149 (1987)

[12] ] Deffayet C., Esposito-Farese G. and Vikman A. Phys. Rev. D vol.79(8) ‘ 084003 (2009) arXiv:0901.1314 [hep-th] http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.084003

[13] Bouncing Galileon Cosmologies Taotao Qiu (Taiwan, Chung Yuan Christian U.), Jarah Evslin (Beijing, Inst. High Energy Phys. & TPCSF, Beijing), Yi-Fu Cai (Beijing, Inst. High Energy Phys. & TPCSF, Beijing & Arizona State U.), Mingzhe Li (Nanjing U.), Xinmin Zhang (Beijing, Inst. High Energy Phys. & TPCSF, Beijing) arXiv:1108.0593 [hep-th]

[14] Subluminal Galilean Genesis Paolo Creminelli (ICTP, Trieste), Kurt Hinterbichler (Perimeter Inst. Theor. Phys.& Pennsylvania U.), Justin Khoury (Pennsylvania U.), Alberto Nicolis (ISCAP, New York & Columbia U.), Enrico Trincherini (INFN, Pisa& Pisa, Scuola Normale Superiore) arXiv:1209.3768 [hep-th]

[15] Bounce and Collapse in the Slotheonic Universe Debabrata Adak (Gov. Gen. Degree Coll., Singur), Amna Ali (Bose Natl. Ctr., Kolkata)
arXiv:1610.01203 [gr-qc]

[16] Unitary null energy condition violation in P(X) cosmologies Claudia de Rham (Imperial Coll., London & Case Western Reserve U., CERCA), Scott Melville (Imperial Coll., London)
arXiv:1703.00025 [hep-th]