Дуальности и q-деформация

Спиридонов Андрей
МГУ имени М. В. Ломоносова

План

SYM
Индекс Виттена
Эйлерова характеристика
Суперконформный индекс
Что я изучал
Что я собираюсь изучать

Рассмотрим четырехмерную SYM $\mathcal{N} = 1$ теорию с полной группой симметрий $G_{full} = SU(2,2|1) \times G \times F$. Нас интересует подалгебра

$$\left\{Q, Q^{\dagger}\right\} = 2\mathcal{H}, \quad Q^2 = \left(Q^{\dagger}\right)^2 = 0, \quad [\mathcal{H}, Q] = 0 \tag{1}$$

И оператор, считающий число фермионов, F (тогда $(-1)^F$ это $\mathbb{Z}_2$ градуировка нашего пространства состояний)

Индекс Виттена -

$$I_{\mathrm{W}} := \mathrm{Tr}(-1)^F e^{-\beta\mathcal{H}} = \int [d\phi] e^{-S} \tag{2}$$

Если суперсимметрия точная, то эта величина не зависит от параметра β.
Можно увидеть, что индекс Виттена - количество суперсимметричных вакуумов теории

$$Q|0\rangle = Q^\dagger|0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}|0\rangle = 0 \tag{3}$$

На римановом многообразии размерности n такая теория с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(\phi) \frac{d\phi^i}{dt} \frac{d\phi^j}{dt} + \frac{i}{2} g_{ij}(\phi) \overline{\psi}^i \gamma^0 \left(\frac{d\psi^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} \frac{d\phi'}{dt} \psi^k \right) + \frac{1}{12} R_{ijkl} \overline{\psi^i} \psi^k \overline{\psi^j} \psi^l \tag{4}$$

Дает после квантования

$$Q = d, \quad Q^\dagger = d^*, \quad 2\mathcal{H} = dd^* + d^* d \tag{5}$$

Пространство состояний разделяется на два по четности - четные и нечетные формы соответствуют бозонам и фермионам, а след в индексе Виттена превращается в

$$I_W = \sum_{j=0}^{n} (-1)^i b_i = \chi(\mathcal{M}) \tag{6}$$

знакопеременную сумму чисел Бетти, то есть Эйлерову характеристику многообразия, на котором мы рассматривали нашу теорию. Здесь и проявляется дуальность - итоговая сумма не зависит от параметра β, поэтому, теории в разных режимах совпадают.

Пусть теперь

$$\left\{Q, Q^{\dagger}\right\} = 2\mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = H - 2\overline{J}_3 - 3R/2 \tag{7}$$

Где оператор R соответствует $U(1)$ вращениям в грассмановой алгебре фермионов. Тогда

$$I(y; p, q) = \mathrm{Tr}\left((-1)^{\mathrm{F}} p^{\mathcal{R}/2+J_3} q^{\mathcal{R}/2-J_3} \prod_k y_k^{F_k} \prod_a z_a^{G_a} e^{-\beta H}\right) \tag{8}$$

так называемый суперконформный индекс. Параметры y, p, q - параметры групповых преобразований (например, упомянутый $U(1)$ поворот $e^{2\pi i q}$)

для "электрической"

$$G = SU(2), F = SU(6) \tag{9}$$

теории:

$$I_E\left(t_k; p, q\right) = \kappa \int_T \frac{\prod_{j=1}^{6} \Gamma\left(t_j z^{\pm 1}; p, q\right)}{\Gamma\left(z^{\pm 2}; p, q\right)} \frac{dz}{z} \tag{10}$$

$$\kappa = \frac{(p;p)_\infty (q:q)_\infty}{4\pi i} \tag{11}$$

и эллиптическая гамма функция дается

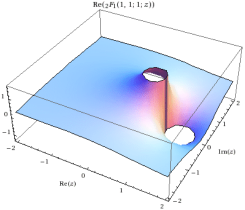
$$\Gamma(z; p, q) = \prod_{j,k=0}^{\infty} \frac{1 - z^{-1} p^{j+1} q^{k+1}}{1 - z p' q^k}$$

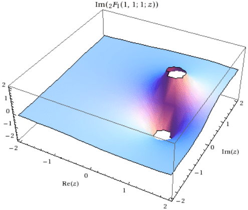
А в "магнитном"случае:

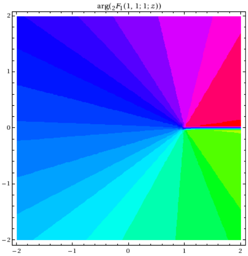
$$I_M\left(t_k;p,q\right)=\prod_{1\le j\le 6}\Gamma\left(t_jt_k;p,q\right) \qquad (12)$$

Благодаря анализу симметрий эллиптических функций Вячеслав Спиридонов показал, что эти индексы эквивалентны для $|t_j|<1$, обосновав тем самым электромагнитную дуальность Зайберга.

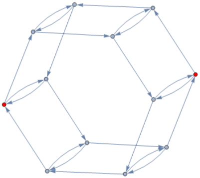
Монодромии

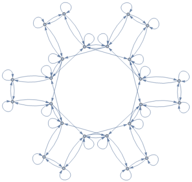


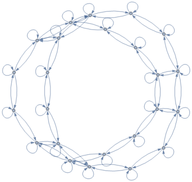


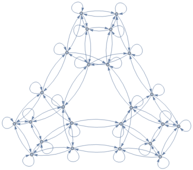


Симметрии







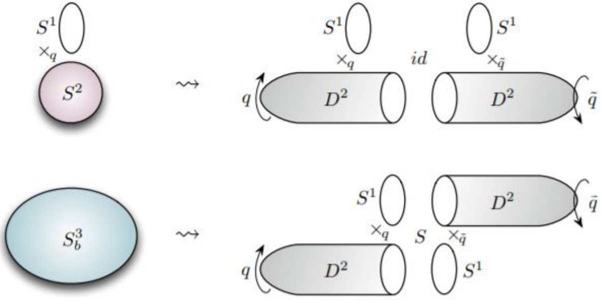


$$\mathcal{B}^{D_2\times S^1}_{T[SU(N)]}(\vec{\mu},\vec{\tau},q,t) = \tag{13}$$

$$= F(q,t,\vec{\tau})\int_\Gamma \prod_{a=1}^{N-1}\prod_{i=1}^{a}\left(\frac{dx_i^{(a)}}{x_i^{(a)}} e^{X_i^{(a)}(T_a-T_{a+1})/\hbar} t^{-X_i^{(a)}/\hbar}\right)\times \tag{14}$$

$$\times\prod_{a=1}^{N-1}\frac{\prod_{i\neq j}^{a}\left(\frac{x_j^{(a)}}{x_i^{(a)}};q\right)_\infty}{\prod_{i,j=1}^{a}\left(t\frac{x_j^{(a)}}{x_i^{(a)}};q\right)_\infty}\prod_{a=1}^{N-2}\prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{a+1}\frac{\left(t\frac{x_j^{(a+1)}}{x_i^{(a)}};q\right)_\infty}{\left(\frac{x_j^{(a+1)}}{x_i^{(a)}};q\right)_\infty}\times \tag{15}$$

$$\times\prod_{p=1}^{N}\prod_{i=1}^{N-1}\frac{\left(t\frac{\mu_p}{x_i^{(N-1)}};q\right)_\infty}{\left(\frac{\mu_p}{x_i^{(N-1)}};q\right)_\infty} \tag{16}$$


S^1
$\times_q$
S^2
$\rightsquigarrow$
S^1
$\times_q$
id
S^1
$\times_{\tilde{q}}$
q
D^2
D^2
$\tilde{q}$
S^1
D^2
$\tilde{q}$
S_b^3
$\rightsquigarrow$
$\times_q$
S
$\times_{\tilde{q}}$
q
D^2
S^1

Спасибо!