Двумерные модели дилатонной гравитации и их приложения в голографии

Лысухина Анастасия 243М

24 мая 2019 года

Введение

AdS/CFT-соответствие, или голографическая дуальность, – описание одной и той же физической системы двумя различными способами, с помощью общей теории относительности и квантовой теории поля.

Соответствие сопоставляет гравитационные явления в пространстве анти-де-Ситтера и квантовую теорию в пределе сильной связи на асимптотической границе этого пространства. Рассмотрим AdS_2/CFT_1-соответствие.

гравитационная теория (двумерная дилатонная гравитация) $\Longleftrightarrow$ квантовая теория на границе (квантовомеханическая система с конформной симметрией)

Эффективной теорией, двойственной двумерной дилатонной гравитации, является теория специального вида – Шварциан.

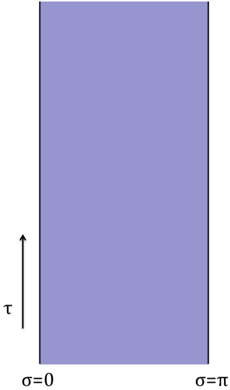
Действие Джекива-Тейтельбойма для AdS_2

Действие Джекива-Тейтельбойма

$$\mathrm{S_{JT}} = -\frac{1}{16\pi \mathrm{G}}\Big(\int \phi\sqrt{\mathrm{g}}(\mathrm{R}+2)\mathrm{dx}^2 +$$
$$+2\int_{\mathrm{bdy_1}} \mathrm{du}\sqrt{\mathrm{g_{bdy_1}}}\phi_\mathrm{b}\mathrm{K} +$$
$$+2\int_{\mathrm{bdy_2}} \mathrm{du}\sqrt{\mathrm{g_{bdy_2}}}\phi_\mathrm{b}\mathrm{K}\Big)$$

Метрика анти-де-Ситтера в глобальных координатах

$$\mathrm{ds}^2 = \frac{\mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}\sigma^2}{\sin^2(\sigma)}, \quad \text{где } 0 < \sigma < \pi$$



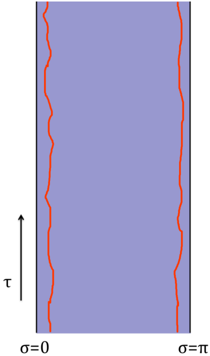
AdS_2 - обрезание границы вдоль динамической границы.

Зафиксируем элемент длины вдоль кривой $(\tau(\mathrm{u}), \sigma(\mathrm{u}))$

$$\mathrm{g}|_{\mathrm{bdy}} = \frac{1}{\epsilon^2}, \qquad \frac{1}{\epsilon^2} = \frac{\tau'^2 + \sigma'^2}{\sin^2(\sigma)}, \qquad \epsilon \to 0$$

Дилатон вдоль кривой : $\phi|_{\mathrm{b}} \to \dfrac{\phi_{\mathrm{r}}(\mathrm{u})}{\epsilon}$

Решение : $\sigma(\mathrm{u}) = \epsilon\tau' \left(1 + \dfrac{\epsilon^2}{6}\dfrac{\tau'^4 + 3\tau''^2}{\tau'^2}\right) + \ldots$



$$S_{\mathrm{JT}} \to -\frac{1}{16\pi G}\int d\tau d\sigma \phi\sqrt{g}\underbrace{(R+2)}_{0} -$$

$$-\frac{1}{8\pi G}\int \frac{du}{\epsilon}\frac{\phi_{\mathrm{r}}(\mathrm{u})}{\epsilon}K$$

Эффективное действие Дж.-Т. в виде действия Шварциана

Вычисление внешней кривизны

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{T}^{\mu}}{(\mathrm{T})^2}\nabla_{\mathrm{T}}\mathrm{n}_{\mu} = \frac{\mathrm{T}^{\mu}}{(\mathrm{T})^2}\left(\frac{\partial \mathrm{n}_{\mu}}{\partial \mathrm{u}} - \Gamma^{\rho}_{\mu\mathrm{v}}\mathrm{n}_{\rho}\mathrm{T}^{\mathrm{v}}\right) =$$

$$= -\frac{\tau'(\tau'^2 + \sigma'^2 + \sin(\sigma)\sigma'') - \sin(\sigma)\sigma'\tau''}{\left(\tau'^2 + \sigma'^2\right)^{\frac{3}{2}}} \approx$$

$$\approx -1 + \epsilon^2\frac{3(\tau''(\mathrm{u}))^2 - 2\tau'(\mathrm{u})\tau'''(\mathrm{u})}{2(\tau'(\mathrm{u}))^2} = -1 - \epsilon^2\mathrm{S}(\tau(\mathrm{u}),\mathrm{u}) + \mathrm{O}(\epsilon^4)$$

Эффективное действие:два невзаимодействующих Шварциана с константами связи $\phi_{1,2}(\mathrm{u})$

$$\mathrm{S}_{\mathrm{JT}} \to \mathrm{S}_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{8\pi\mathrm{G}}\int \mathrm{du}\left[\phi_{\mathrm{r1}}(\mathrm{u})\mathrm{S}(\tau_1(\mathrm{u}),\mathrm{u}) + \phi_{\mathrm{r2}}(\mathrm{u})\mathrm{S}(\tau_2(\mathrm{u}),\mathrm{u})\right]$$

Рассмотрим случай пространства анти-де-Ситтера в глобальных координатах, когда дилатон взаимодействует с полями материи. Материя вводит взаимодействие между двумя теориями на границах анти-де-Ситтера.

$$\mathrm{S_{eff}} = \frac{1}{8\pi \mathrm{G}} \int \mathrm{du} \left[\phi_{\mathrm{r1}}(\mathrm{u})\mathrm{S}(\tau_1(\mathrm{u}), \mathrm{u}) + \phi_{\mathrm{r2}}(\mathrm{u})\mathrm{S}(\tau_2(\mathrm{u}), \mathrm{u}) + \mathrm{O}(\tau_1(\mathrm{u}))\mathrm{O}(\tau_2(\mathrm{u}))\right]$$

Модель двумерной гравитации

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int dx^2\sqrt{-g}\,[\phi(\tau,\sigma)\,(R+2)-2A]+S_{matter}$$

Анзац для метрики

$$ds^2 = b(\sigma)(-d\tau^2+d\sigma^2)$$

Для точечной частицы действие имеет вид

$$S_{matter} = -m\int d\tau\int dx\,\delta(x^\mu - X^\mu(\tau))\sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\cdot\partial_\tau X^\mu(\tau)\cdot\partial_\tau X^\nu(\tau)}$$

Уравнения движения для дилатона

Вариация по полю

$$\frac{\delta \mathrm{S}}{\delta \phi} = -\mathrm{b}(\sigma)\mathrm{b}''(\sigma) + \mathrm{b}'^2(\sigma) + 2\mathrm{b}^3(\sigma) = 0$$

Вариация по компонентам метрики

$$\begin{aligned}
&\mathrm{b}'(\sigma)\phi_\sigma(\tau,\sigma) - 2\mathrm{b}(\sigma)\left(\phi_{\sigma\sigma}(\tau,\sigma) + \mathrm{b}(\sigma)(\mathrm{A} - \phi(\tau,\sigma))\right) = \mathrm{T}_{\tau\tau}(\tau,\sigma)\\
&\mathrm{b}'(\sigma)\phi_\tau(\tau,\sigma) - 2\mathrm{b}(\sigma)\phi_{\tau\sigma}(\tau,\sigma) = \mathrm{T}_{\sigma\tau}(\tau,\sigma)\\
&\mathrm{b}'(\sigma)\phi_\sigma(\tau,\sigma) - 2\mathrm{b}(\sigma)\left(\mathrm{b}(\sigma)(\phi(\tau,\sigma) - \mathrm{A}) + \phi_{\tau\tau}(\tau,\sigma)\right) = \mathrm{T}_{\sigma\sigma}(\tau,\sigma)
\end{aligned}$$

$$\text{тензор-энергии импульса } \mathrm{T}_{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-\mathrm{g}}}\frac{\delta \mathrm{S}_{\mathrm{matter}}}{\delta \mathrm{g}^{\alpha\beta}}$$

Решение соответствующее глобальному AdS_2

$$\mathrm{b}_{\mathrm{G}}(\sigma) = \frac{1}{\sin^2\sigma}, \quad 0 < \sigma < \pi$$

В отсутствии материи дилатон имеет вид

$$\phi(\tau,\sigma) = \mathrm{A} + \mathrm{c}_1 \frac{\cos\sigma}{\sin\sigma} + \mathrm{c}_2 \frac{\sin\tau}{\sin\sigma} + \mathrm{c}_3 \frac{\cos\tau}{\sin\sigma}, \qquad \sigma \in (0,\pi)$$

c_1, c_2, c_3 – произвольные константы

Взаимодействие с точечной неподвижной частицей энергии E

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}_{\tau\sigma} = \mathrm{T}_{\sigma\sigma} = 0, \\ &\mathrm{T}_{\tau\tau}(\sigma) = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{\mathrm{b_G}(\sigma)}\sqrt{-\mathrm{g}}}\delta\left(\sigma - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{b_G^{3/2}}(\sigma)}\delta\left(\sigma - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Решение для дилатона:

$$\phi(\tau,\sigma) = \mathrm{A} + \theta(2\sigma - \pi)\frac{\mathrm{E}}{2}\frac{\cos\sigma}{\sin\sigma} + \left(\mathrm{c}_1 - \frac{\mathrm{E}}{2}\right)\frac{\cos\sigma}{\sin\sigma} + \mathrm{c}_2\frac{\sin\tau}{\sin\sigma} + \mathrm{c}_3\frac{\cos\tau}{\sin\sigma}$$

Рассмотрим внимательней точки пространства-времени, где скалярное поле дилатона ϕ обращается в ноль. Известно, что гравитационную теорию Джекива-Тейтельбойма можно получить размерной редукцией некоторой черной дыры высшей размерности, например, редукцией почти экстремальной черной дыры Рейснера-Нордстрема или БТЗ-черной дыры.

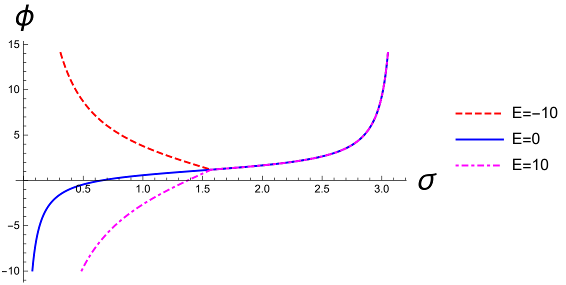
После редукции, сингулярность черной дыры соответсвует нулям поля дилатона. Будем в дальнейшем называть точки τ_0, σ_0, где поле дилатона обращается в ноль $\phi(\tau_0, \sigma_0) = 0$, точками сингулярности.

$$\phi(\tau_0, \sigma_0) = 0 \longleftrightarrow \text{сингулярность}$$

Рассмотрим простейшую конфигурацию скалярного поля дилатона, $c_2 = c_3 = 0$

$$\phi(\tau, \sigma) = A + \theta(2\sigma - \pi)\frac{E}{2}\frac{\cos\sigma}{\sin\sigma} + \left(c_1 - \frac{E}{2}\right)\frac{\cos\sigma}{\sin\sigma}$$

$$c_1 = -1,\ A = 1$$



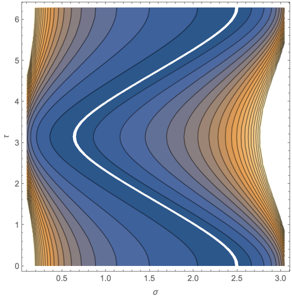
Проходимость кротовой норы

$$c_1 < \sqrt{c_2^2 + c_3^2}, \quad E = 2c_1 + \sqrt{c_2^2 + c_3^2}$$

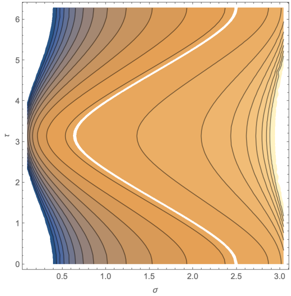
Взаимодействие дилатона с массивной движущейся частицей

$$\phi = \mathrm{A} + \left(\mathrm{c}_1 - \frac{\mathrm{E}}{2}\theta(2\sigma - \pi)\right)\gamma \cot(\sigma) + \left(\mathrm{c}_1 - \frac{\mathrm{E}}{2}\theta(2\sigma - \pi)\right)\mathrm{v}\gamma\frac{\cos\tau}{\sin\sigma}$$

$$\mathrm{c}_2 = \mathrm{c}_3 = 0,\ \mathrm{c}_1 = -1,\ \mathrm{A} = 0.5,\ \mathrm{v} = 0.8$$



$\mathrm{E} = -3$



$\mathrm{E} = 3$

Энтропия зацепленности

Первая система: $|\mathrm{A}\rangle \in \mathrm{H_A}$
Вторая система: $|\mathrm{B}\rangle \in \mathrm{H_B}$
Состояние составной системы:

$$|\Psi\rangle \in \mathrm{H_{AB}} = \mathrm{H_A} \otimes \mathrm{H_B}$$

Матрица плотности системы:

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

Определение приведенной матрицы плотности:

$$\rho_\mathrm{A} = \sum_\mathrm{j} \langle \mathrm{j}|_\mathrm{B} |\Psi\rangle\langle\Psi| |\mathrm{j}\rangle_\mathrm{B} = \mathrm{Tr_B}\rho$$

Энтропия зацепленности двух систем:

$$\mathrm{S_A} = -\mathrm{Tr}(\rho_\mathrm{A} \log \rho_\mathrm{A})$$

Энтропия зацепленности в $\mathrm{AdS}_2/\mathrm{CFT}_1$

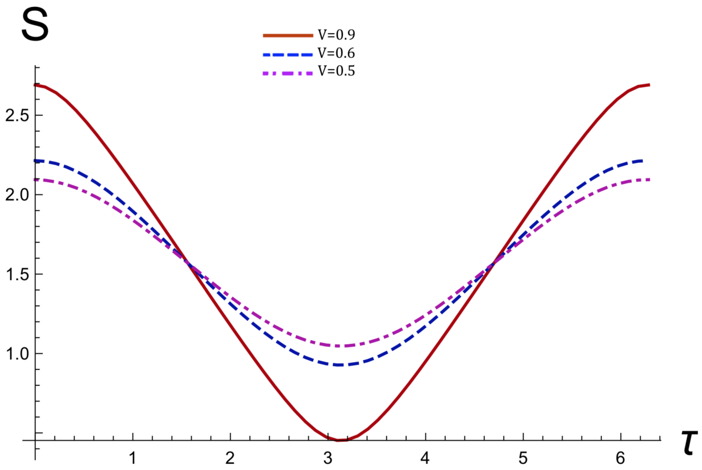
Существует голографическая прескрипция вычисления энтропии зацепленностти – HRRT (Hubeny, Rangamani, Ryu, Takayanagi, arXiv:0605073).

Для двумерной дилатонной гравитации имеет вид (Azeyanagi, Nishioka, Takayanagi – arXiv:0710.2956; Goel, Lam, Turiaci, Verlinde – arxiv:1807.03916)

$$\mathrm{S}_{\mathrm{ent}}(\tau) = \phi(\sigma, \tau)\Big|_{\sigma=\sigma_{\mathrm{m}}}$$

Посчитаем энтропию зацепленности между двумя связанными теориями на левой и правой границе пространства анти-де-Ситтера в глобальных координатах, возмущенного массивной частицей.

Эволюция энтропии зацепленности



Заключение

Для модели двумерной дилатонной гравитации найдены решения уравнений движения для случая взаимодействия поля дилатона с точечной массивной частицей, двигающейся с произвольной постоянной скоростью.

Получено условие на энергию статической частицы, когда кротовая нора становится проходимой.

Изучена эволюция энтропии зацепленности для двух копий квантовых теорий, живущих на двух разных границах пространства анти-де-Ситтера в глобальных координатах, возмущенного точечной частицей.

Рассмотрен вывод действия Шварциана с помощью теории возмущения как эффективного действия дилатонной гравитации модели Джекива-Тейтельбойма.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!

Буст в глобальных координатах

$$\sigma \to \operatorname{arccotan}\left[\gamma\left(\mathrm{v}\frac{\cos(\tau)}{\sin(\sigma)}+\cot(\sigma)\right)\right]$$

$$\tau \to \arccos\left[\frac{\gamma\left(\frac{\cos(\tau)}{\sin(\sigma)}+\mathrm{v}\cot(\sigma)\right)}{\sqrt{1+\gamma^2\left(\mathrm{v}\frac{\cos(\tau)}{\sin(\sigma)}+\cot(\sigma)\right)^2}}\right]$$

$$\text{где } \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2}}$$

Траектория движения частицы после буста

$$\sigma=\arccos\left(\pm\mathrm{v}\cos\tau\right)$$

Дилатон после буста

$$\phi=\mathrm{A}+\left(\mathrm{c}_1-\frac{\mathrm{E}}{2}\theta(2\sigma-\pi)\right)\gamma\cot(\sigma)+\left(\mathrm{c}_1-\frac{\mathrm{E}}{2}\theta(2\sigma-\pi)\right)\mathrm{v}\gamma\frac{\cos\tau}{\sin\sigma}$$